



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

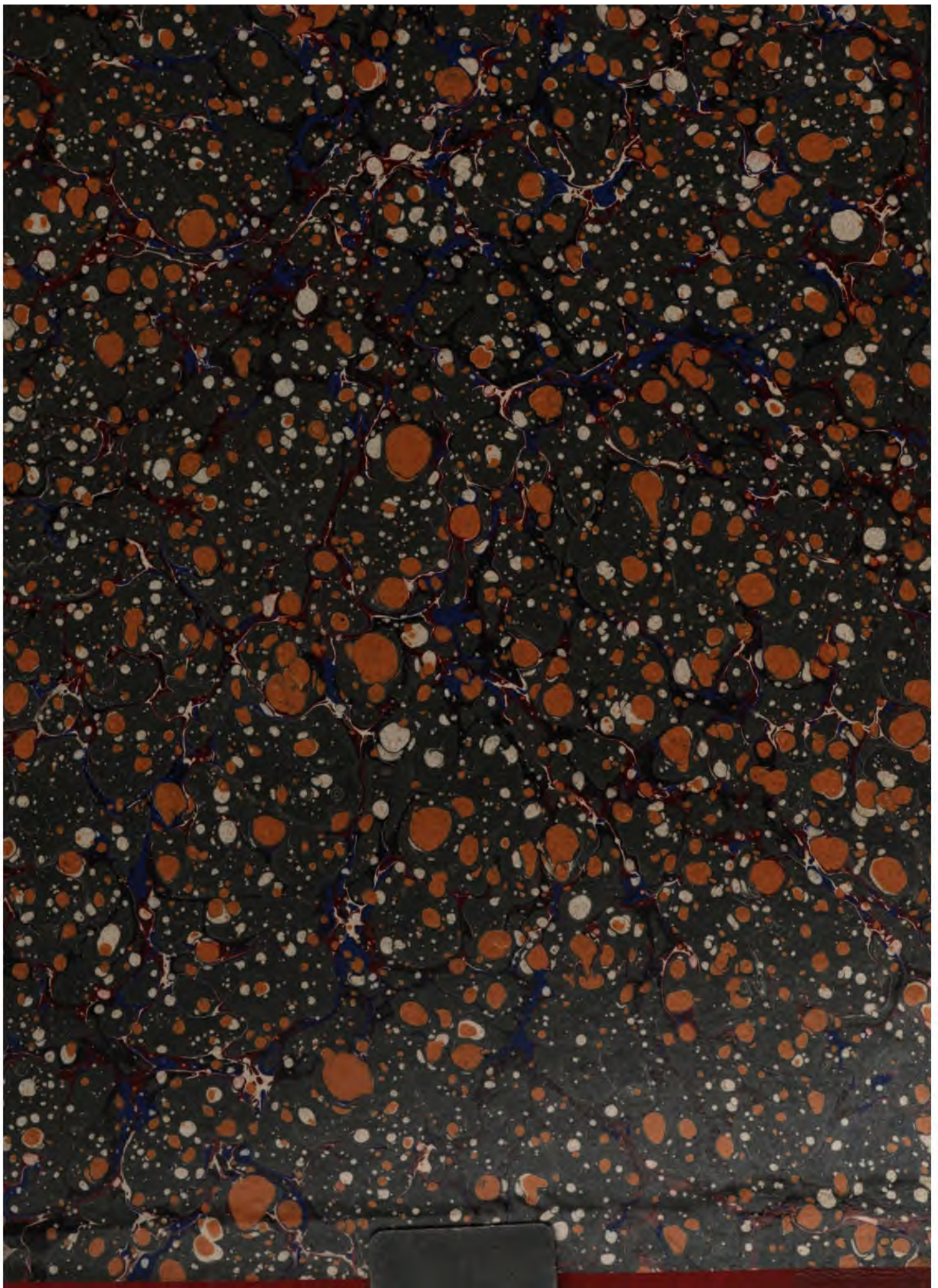
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

Stanford University Libraries

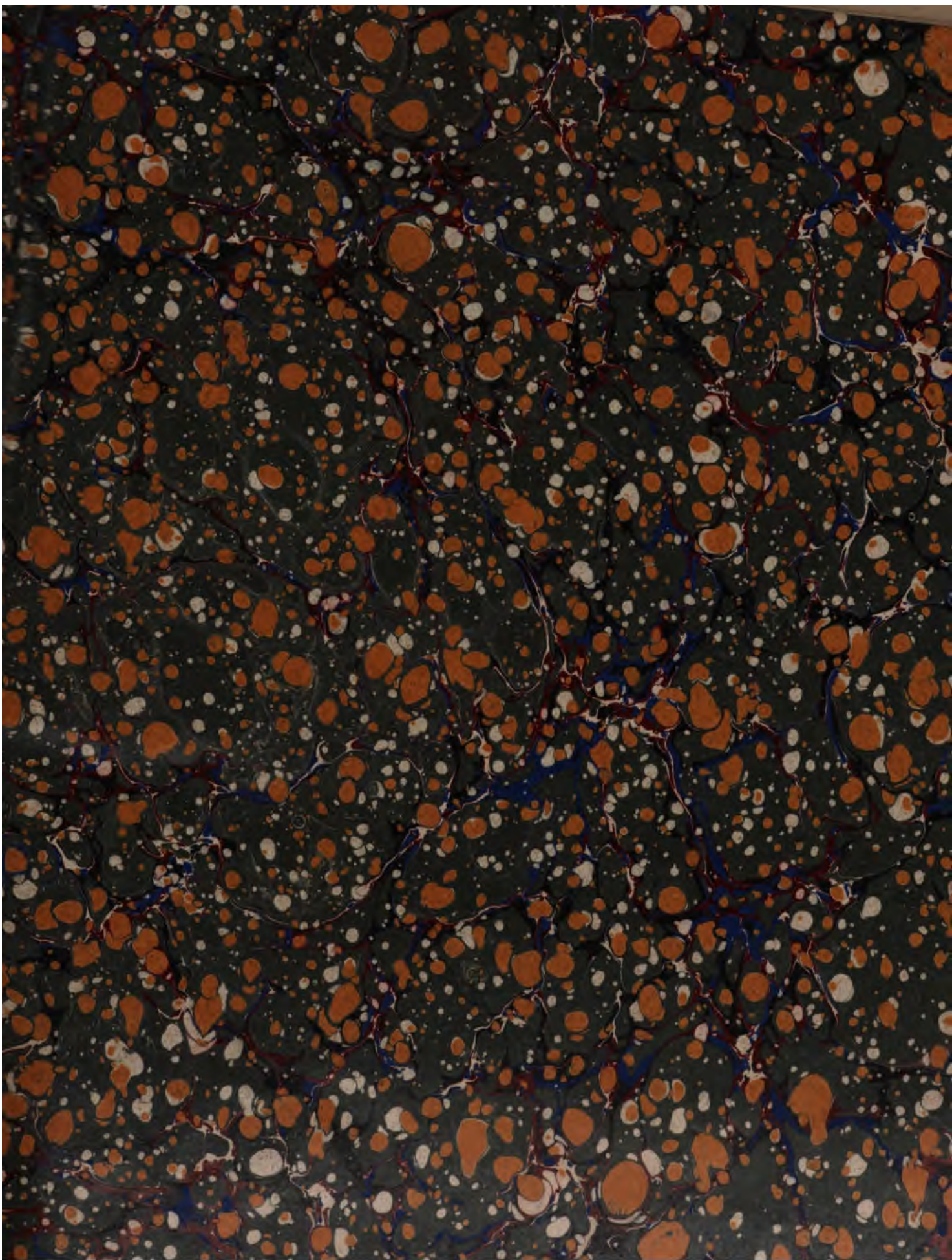


3 6105 027 650 311









TZ25









100





ANNALES  
DE LA  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES  
SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,  
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1903.

---

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS,  
IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE,  
ED. PRIVAT,  
IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

1903

(Ce Recueil paraît chaque trimestre.)

**Premier fascicule.**

1777

THE NEW YORK STATE ARCHIVES

ALBANY, NEW YORK

**ANNALES**  
**DE LA**  
**FACULTÉ DES SCIENCES**  
**DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,**  
**POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.**



# **COMITÉ DE RÉDACTION.**

---

<b>PRÉSIDENT.....</b>	<b>M. LECLERC DU SABLON, Doyen.</b>
<b>SECRÉTAIRE .....</b>	<b>M. COSSERAT.</b>
<b>MEMBRES.....</b>	<b>MM. BAILLAUD, LEGOUX, SABATIER, DESTREM, MATHIAS, FABRE, PARAF, BOUASSE, BOURGET, CAMICHEL.</b>

# ANNALES

DE LA

## FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,  
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1903.

---

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS,  
IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE,  
ED. PRIVAT,  
IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1903

(Tous droits réservés.)

LIBRARY  
LELAND STANFORD JUNIOR  
UNIVERSITY

УРАЭН  
ХӨӨН. ОЮУАТ ОУА.Н  
УТЭЭВН



ANNALES  
DE LA  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

---

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM.

---

TROISIÈME PARTIE.

SUR LES QUASI-ONDES (<sup>1</sup>).

---

§ 1. — DÉFINITION DES QUASI-ONDES. FORMULES ANALOGUES  
AUX FORMULES D'HUGONIOT.

Au sein d'un fluide non visqueux, on peut observer deux sortes d'ondes qui soient du premier ordre (<sup>2</sup>) par rapport aux composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de la vitesse. Les unes sont des *ondes transversales* qui ne se propagent pas; les autres sont des *ondes longitudinales*; ce sont ces dernières qui vont nous occuper.

Pour ne pas introduire dans nos raisonnements de complications inutiles, nous supposons que le fluide est soumis seulement à des actions newtoniennes; nous aurons alors deux cas à distinguer :

1° *Le fluide est doué de conductibilité :*

$$k > 0.$$

Les ondes longitudinales se propagent alors avec une vitesse donnée par la loi

---

(<sup>1</sup>) *Sur les quasi-ondes* (Comptes rendus, t. CXXXV, p. 761, séance du 10 novembre 1902).

(<sup>2</sup>) *Recherches sur l'Hydrodynamique*; deuxième Partie : *Sur la propagation des ondes*, Chapitre IV (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2<sup>e</sup> série, t. IV, 1902, p. 145).

de Newton [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, II<sup>e</sup> Partie, égalité (228 bis)]

$$(\mathfrak{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}.$$

2<sup>o</sup> Le fluide n'est pas conducteur :

$$k = 0.$$

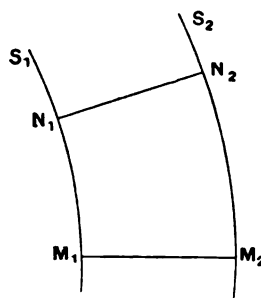
Les ondes longitudinales se propagent alors avec une vitesse donnée par la loi de Laplace [*Ibid.*, égalité (233)]

$$(\mathfrak{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C}{c}.$$

L'air est très peu conducteur de la chaleur; cependant sa conductibilité n'est pas rigoureusement nulle. Une onde du premier ordre par rapport aux composantes de la vitesse doit donc, si elle est longitudinale, s'y propager avec une vitesse donnée par la loi de Newton. Or l'expérience montre que la vitesse de propagation d'une onde sonore n'est nullement régie par la formule de Newton, mais bien par la formule de Laplace. Il y a là une apparence de contradiction qu'il nous faut examiner.

Considérons deux surfaces  $S_1, S_2$  (fig. 1). Si, par un point  $M_1$  de  $S_1$ , nous

Fig. 1.



élevons une normale à cette surface, elle rencontre la surface  $S_2$  en  $M_2$ . Nous désignerons par  $\epsilon$  la distance  $M_1 M_2$ . Nous supposerons que la distance  $\epsilon$  est une très petite quantité.

Nous supposerons que la région du fluide où sont tracées les surfaces  $S_1, S_2$  n'est traversée par aucune onde; les quantités  $u, v, w, \rho, \Pi, T$  seront donc, dans toute cette région et pendant tout le laps de temps considéré, des fonctions analytiques de  $x, y, z, t$ .

Soit  $f$  une fonction quelconque de  $x, y, z$ ; nous désignerons par  $(f)_1^2$  l'excès  $f(M_2) - f(M_1)$  de sa valeur au point  $M_2$  sur sa valeur au point  $M_1$ .

Nous admettrons que les six quantités

$$(u)_1^2, (\nu)_1^2, (w)_1^2, (\rho)_1^2, (\Pi)_1^2, (T)_1^2$$

sont des quantités très petites, du même ordre que  $\varepsilon$ , qui varient d'une manière continue lorsque  $M_1$  décrit la surface  $S_1$ , tandis que parmi les quantités

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2, \\ \left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)_1^2, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2 \end{aligned}$$

il en est au moins une qui a une valeur finie.

Lorsqu'il en sera ainsi, nous dirons que la tranche comprise entre les deux surfaces  $S_1, S_2$  forme une *quasi-onde* du premier ordre par rapport aux composantes  $u, \nu, w$  de la vitesse. Il est clair qu'au point de vue expérimental, une quasi-onde ne se distingue pas d'une onde véritable; au point de vue algébrique, au contraire, elle en est essentiellement distincte.

Sur la surface  $S_1$ , prenons un point quelconque  $N_1$ , voisin du point  $M_1$ ; par ce point, menons une normale à la surface  $S_1$ ; soit  $N_2$  le point où cette normale rencontre la surface  $S_2$ . Visiblement, nous pourrions écrire

$$[u(N_2) - u(N_1)] - [u(M_2) - u(M_1)] = \lambda \varepsilon \overline{M_1 N_1},$$

en désignant par  $\lambda$  une quantité finie.

Cette égalité peut encore s'écrire

$$(1) \quad [u(M_1) - u(N_1)] - [u(M_2) - u(N_2)] = \lambda \varepsilon \overline{M_1 N_1}.$$

Si, par le point  $M_1$ , on mène une tangente au chemin  $M_1 N_1$ , et si l'on désigne par  $l, m, n$  les cosinus directeurs de cette tangente, on aura

$$(2) \quad u(N_1) - u(M_1) = \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 l + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 m + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1 n \right] \overline{M_1 N_1},$$

en désignant par  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1, \dots$  les valeurs des quantités  $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$  au point  $M_1$ .

Si, de même, par le point  $M_2$  on mène une tangente au chemin  $M_2 N_2$  et si l'on désigne par  $l', m', n'$  ses cosinus directeurs, on aura

$$(2 \text{ bis}) \quad u(N_2) - u(M_2) = \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 l' + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 m' + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 n' \right] \overline{M_2 N_2},$$

en désignant par  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2, \dots$  les valeurs des quantités  $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$  au point  $M_2$ .

Les quantités  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1, \dots$  peuvent être finies; au contraire, les différences  $l' - l, m' - m, n' - n$  sont sûrement de l'ordre de  $\epsilon$ ; il en est de même de la différence  $\frac{M_2 N_2}{M_1 N_1} - 1$ . Dès lors, les égalités (1), (2) et (2 bis) nous permettent d'écrire

$$(3) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 l + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 m + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 n = \mu \epsilon,$$

$\mu$  étant une quantité finie.

Cette égalité (3) doit avoir lieu pour tout système de valeurs de  $l, m, n$  assujetti aux égalités

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0.$$

L'une des trois quantités  $\alpha, \beta, \gamma$ , soit  $\alpha$ , est sûrement différente de zéro. Si l'on pose

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \psi,$$

l'égalité (3) deviendra

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 - \beta \psi\right] m + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 - \gamma \psi\right] n = \mu \epsilon.$$

Il nous est loisible de faire prendre à  $n$  la valeur zéro; cette égalité nous montrera alors que la différence  $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 - \beta \psi\right]$  a une valeur très petite de l'ordre de  $\epsilon$ ; nous pouvons, de même, donner à  $m$  la valeur zéro; nous voyons que la différence  $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 - \gamma \psi\right]$  a une valeur très petite de l'ordre de  $\epsilon$ . En résumé, à chaque point  $M_1$  de la surface  $S_1$ , on peut faire correspondre quatre quantités finies  $\psi, \alpha, b, c$ , telles que l'on ait

$$(4) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha \psi + a \epsilon, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 = \beta \psi + b \epsilon, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 = \gamma \psi + c \epsilon. \end{cases}$$

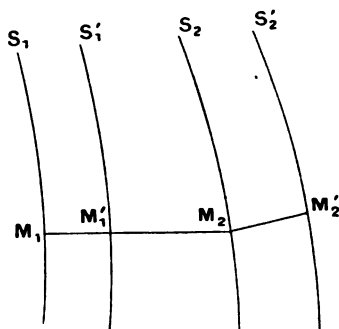
On justifierait de même les égalités

$$(4 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha' \psi + a' \epsilon, & \dots, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha'' \psi + a'' \epsilon, & \dots \end{cases}$$

Ces égalités jouent pour les quasi-ondes le même rôle que le premier lemme d'Hugoniot pour les ondes proprement dites.

Considérons maintenant une quasi-onde *persistante*; limitée, à l'instant  $t$ , par les surfaces  $S_1, S_2$ , elle est limitée, à l'instant  $(t + dt)$ , par les surfaces  $S'_1, S'_2$  (*fig. 2*). La normale à la surface  $S_1$ , menée par le point  $M_1$ , rencontre la sur-

Fig. 2.



face  $S'_1$  en  $M'_1$ ; la normale à la surface  $S_2$ , menée par le point  $M_2$ , rencontre la surface  $S'_2$  en  $M'_2$ ; on a

$$M_1 M'_1 = \mathfrak{K} dt, \quad \overline{M_2 M'_2} = \mathfrak{K}_2 dt,$$

$\mathfrak{K}$  et  $\mathfrak{K}_2$  ayant, pour chaque point  $M_1$  de la surface  $S_1$ , des valeurs déterminées; de plus,  $(\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K})$  est de l'ordre de  $\varepsilon$ .

Nous pouvons évidemment écrire

$$[u(M'_2) - u(M'_1)] - [u(M_2) - u(M_1)] = \lambda \varepsilon dt,$$

$\lambda$  étant une quantité finie; ou bien encore

$$(5) \quad [u(M'_2) - u(M_2)] - [u(M'_1) - u(M_1)] = \lambda \varepsilon dt.$$

Or on a

$$(6) \quad u(M'_1) - u(M_1) = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \alpha + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 \beta + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_1 \gamma \right] \mathfrak{K} dt + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_1 dt.$$

Si  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  sont les cosinus directeurs de la normale  $M_2 M'_2$ , on a de même

$$(6 \text{ bis}) \quad u(M'_2) - u(M_2) = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 \alpha_2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_2 \beta_2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_2 \gamma_2 \right] \mathfrak{K}_2 dt + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_2 dt.$$

Mais, visiblement, les différences  $(\alpha_2 - \alpha)$ ,  $(\beta_2 - \beta)$ ,  $(\gamma_2 - \gamma)$  sont des quantités

très petites de l'ordre de  $\varepsilon$ . Les égalités (5), (6), (6 bis) donnent donc l'égalité

$$\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1^2 \alpha + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_1^2 \beta + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_1^2 \gamma \right] \mathfrak{K} + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_1^2 = \mu \varepsilon.$$

Comparée aux égalités (4), cette relation devient la première des égalités

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{K} \mathfrak{U} + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_1^2 = d \varepsilon, \\ \mathfrak{K} \mathfrak{V} + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_1^2 = d' \varepsilon, \\ \mathfrak{K} \mathfrak{W} + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_1^2 = d'' \varepsilon, \end{array} \right.$$

$d, d', d''$  étant trois quantités finies.

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue. Ces égalités (7) sont, pour les quasi-ondes, ce que le second lemme d'Hugoniot est pour les ondes.

## § 2. — DES QUASI-ONDES DANS LES FLUIDES PARFAITS.

L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

est vraie en tout point de l'espace; écrivons-la au point  $M_2$ , puis au point  $M_1$ , et retranchons membre à membre les deux égalités obtenues; nous trouvons

$$(8) \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1^2 + u \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1^2 + v \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1^2 + w \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1^2 + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)_1^2 = \lambda \varepsilon,$$

$\lambda$  étant une quantité finie. Mais une démonstration semblable à celle qui a fourni les égalités (4), (4 bis) et (7) montre qu'à tout point  $M_1$  de la surface  $S_1$  correspondent cinq quantités finies  $A, B, C, D, \mathfrak{A}$  telles que l'on ait

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1^2 = \alpha \mathfrak{A} + A \varepsilon, \\ \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1^2 = \beta \mathfrak{A} + B \varepsilon, \\ \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1^2 = \gamma \mathfrak{A} + C \varepsilon, \\ \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1^2 + \mathfrak{K} \mathfrak{A} = D \varepsilon. \end{array} \right.$$



En vertu des égalités (4), (4 bis) et (9), l'égalité (8) devient

$$(10) \quad (\mathcal{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathcal{R} - \rho(\alpha \mathcal{V} + \beta \mathcal{V} + \gamma \mathcal{W}) = \mathbf{E}\varepsilon,$$

E étant, en tout point  $M_1$  de la surface  $S_1$ , une quantité finie.

Raisonnons de même sur les trois équations hydrodynamiques; écrivons la première

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho X + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

au point  $M_2$ , puis au point  $M_1$ , et retranchons membre à membre les deux égalités obtenues; la différence  $[X(M_2) - X(M_1)]$  étant supposée très petite de l'ordre de  $\varepsilon$ , nous trouverons l'égalité

$$(11) \quad \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_1 + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_1 + \rho u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 + \rho v \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 + \rho w \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_1 = \lambda \varepsilon,$$

où  $\lambda$  est une quantité finie.

Mais, en tout point  $M_1$  de la surface  $S_1$ , il existe cinq quantités finies  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $\mathcal{Q}$  telles que l'on ait les égalités

$$(12) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_1 = \alpha \mathcal{Q} + A' \varepsilon, \\ \dots\dots\dots, \\ \left( \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right)_1 + \mathcal{K} \mathcal{Q} = D' \varepsilon, \end{cases}$$

analogues aux égalités (9). Moyennant les égalités (4) et (12), et en désignant par  $F$  une quantité finie, l'égalité (11) devient la première des égalités

$$(13) \quad \begin{cases} \rho(\mathcal{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathcal{V} - \alpha \mathcal{Q} = F \varepsilon, \\ \rho(\mathcal{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathcal{V} - \beta \mathcal{Q} = G \varepsilon, \\ \rho(\mathcal{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathcal{W} - \gamma \mathcal{Q} = H \varepsilon. \end{cases}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En chaque point du fluide, nous avons l'équation de compressibilité [*Recherches*, 1<sup>re</sup> Partie, égalité (75)]

$$\Pi - \rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0,$$

qui nous permet d'écrire, en particulier,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \left( 2\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Écrivons cette égalité pour le point  $M_2$  et pour le point  $M_1$ , et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons l'égalité

$$(14) \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_1 - \left(2\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1 = 0.$$

Deux cas sont à distinguer :

1° La quasi-onde est du second ordre par rapport à la température  $T$ ;  $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1$ ,  $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1$ ,  $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1$  sont des quantités de l'ordre de  $\varepsilon$ ; alors, en vertu des égalités (9) et (12), l'égalité (14) devient

$$(15) \quad \mathfrak{P} - \left(2\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right) \mathfrak{R} = J\varepsilon,$$

$J$  étant une quantité finie.

2° La quasi-onde est du premier ordre par rapport à la température  $T$ ; il existe alors cinq quantités  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$ ,  $\mathfrak{E}$ , finies en tout point de la surface  $S_1$ , telles que l'on ait

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1 = \alpha \mathfrak{E} + A''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 = \beta \mathfrak{E} + B''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1 = \gamma \mathfrak{E} + C''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_1 + \mathfrak{K} \mathfrak{E} = D''\varepsilon. \end{array} \right.$$

En vertu de ces égalités (16) et des égalités analogues (9) et (12), l'égalité (14) devient

$$(17) \quad \mathfrak{P} - \left(2\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right) \mathfrak{R} - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \mathfrak{E} = K\varepsilon,$$

$K$  étant une quantité finie.

Pour connaître celui des deux cas auquel nous avons affaire, nous allons recourir à la considération de la conductibilité.

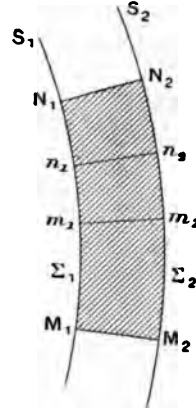
Sur la surface  $S_1$ , prenons (*fig. 3*) une aire d'étendue finie  $M_1 N_1$  ou  $\Sigma_1$ ; par les divers points  $M_1$ ,  $N_1$ , ... du contour de cette aire, menons des normales à la surface  $S_1$  et prolongeons-les jusqu'à la surface  $S_2$ ; elles y dessinent le contour  $M_2 N_2$  d'une aire finie  $\Sigma_2$ . Demandons à la théorie de la conductibilité l'expression de la quantité de chaleur  $dQ$  dégagée, dans le temps  $dt$ , par le volume  $M_1 N_1 M_2 N_2$ . Si  $dS$  est un élément de la surface  $S$  qui limite ce volume,

si  $\nu$  est la normale à cet élément vers l'intérieur de ce volume, nous avons

$$dQ = dt \int k \frac{\partial T}{\partial \nu} dS.$$

La surface  $S$  se compose de trois parties : les deux aires  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et la surface réglée  $\sigma$  qui s'appuie sur leurs contours. Soit  $m_1 n_1 = d\Sigma_1$ , un élément de l'aire  $\Sigma_1$  ; des normales à  $S_1$ , issues des divers points  $m_1, n_1, \dots$  du contour de cet élément,

Fig. 3.



découpent en l'aire  $\Sigma_2$  un élément  $m_2 n_2 = d\Sigma_2$ , qui correspond à l'élément  $d\Sigma_1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les cosinus directeurs de la normale  $m_1 m_2$  à la surface  $S_1$  ; la normale menée en  $m_2$  à la surface  $S_2$ , dirigée dans le même sens que la précédente, a pour cosinus directeurs  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ . Nous aurons alors

$$dQ = dt \int_{\sigma} k \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma + dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_1 \alpha + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_1 \beta + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_1 \gamma \right] d\Sigma_1 \\ - dt \int_{\Sigma_2} k(m_2) \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 \alpha_2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_2 \beta_2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_2 \gamma_2 \right] d\Sigma_2,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(18) \quad dQ = - dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_1^2 \alpha + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_1^2 \beta + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_1^2 \gamma \right] d\Sigma_1 \\ - dt \int_{\Sigma_2} \left\{ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 \left[ \alpha_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \alpha k(m_1) \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_2 \left[ \beta_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \beta k(m_1) \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_2 \left[ \gamma_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \gamma k(m_1) \right] \right\} d\Sigma_1 + dt \int_{\sigma} k \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma.$$

L'aire  $\sigma$  est de l'ordre de  $\varepsilon$ ; si le coefficient de conductibilité est très petit de l'ordre de  $\chi$ , l'intégrale  $\int_{\sigma} k \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma$  sera de l'ordre de  $\varepsilon\chi$ .

Les différences

$$\alpha_2 - \alpha, \quad \beta_2 - \beta, \quad \gamma_2 - \gamma, \quad \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - 1$$

sont assurément de l'ordre de  $\varepsilon$ ; on a

$$k(m_2) - k(m_1) = k(\rho_2, T_2) - k(\rho_1, T_1),$$

et, comme les différences  $(\rho_2 - \rho_1)$ ,  $(T_2 - T_1)$  sont de l'ordre de  $\varepsilon$ , la différence  $k(m_2) - k(m_1)$  sera de l'ordre de  $\varepsilon\chi$ . Il en sera de même des différences

$$\alpha_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \alpha k(m_1),$$

$$\beta_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \beta k(m_1),$$

$$\gamma_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \gamma k(m_1),$$

et de la seconde intégrale en l'égalité (18). Cette égalité peut s'écrire

$$dQ = -dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_1^2 \alpha + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_1^2 \beta + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_1^2 \gamma \right] d\Sigma_1 + \lambda \varepsilon \chi dt,$$

$\lambda$  étant une quantité finie. Mais les quantités

$$k(m_1) \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_1^2 \alpha, \quad k(m_1) \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_1^2 \beta, \quad k(m_1) \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_1^2 \gamma$$

sont d'ordre  $\varepsilon\chi$  si la quasi-onde est du premier ordre en  $T$ , et d'ordre  $\varepsilon^2\chi$  si la quasi-onde est du deuxième ordre en  $T$ ; on peut donc écrire, en toute circonstance,

$$(19) \quad dQ = \lambda \varepsilon \chi dt.$$

$\lambda$  étant une quantité finie.

La quantité de chaleur  $dQ$  peut encore s'exprimer d'une autre manière; on a [*Recherches*, 1<sup>re</sup> Partie, égalité (90)]

$$E dQ = dt \int \left[ T\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w + \frac{\partial T}{\partial t} \right) - T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] d\omega,$$

l'intégrale s'étendant au volume  $M_1 N_1 N_2 M_2$ . Ce volume est de l'ordre de  $\varepsilon$ ; on

voit alors que la quantité sous le signe  $\int$  doit, selon l'égalité (19), être de l'ordre de  $\chi$  :

$$T\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w + \frac{\partial T}{\partial t} \right) - T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \mu \chi,$$

$\mu$  étant une quantité finie. Si nous écrivons cette égalité au point  $m_1$ , puis au point  $m_2$ , et si nous retranchons membre à membre les résultats obtenus, nous trouverons sans peine l'égalité

$$(20) \quad T\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_1 u + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_1 v + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_1 w + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_1 \right] \\ - T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_1 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_1 \right] = \nu \chi + \varpi \varepsilon,$$

$\nu$  et  $\varpi$  étant deux quantités finies.

Si la quasi-onde considérée est du premier ordre par rapport à  $T$ , les égalités (4), (4 bis) et (16) transformeront l'égalité (20) en

$$(21) \quad T\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} (\mathcal{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w) \mathcal{E} + T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} (\alpha \mathcal{V} + \beta \mathcal{V} + \gamma \mathcal{W}) = \nu \chi + \theta \varepsilon,$$

$\theta$  étant une quantité finie.

En chaque point du fluide, on peut écrire la relation supplémentaire [*Recherches*, I<sup>re</sup> Partie, égalité (94)]

$$(22) \quad k \Delta T + \frac{\partial k}{\partial T} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \frac{\partial k}{\partial \rho} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \\ + \frac{T}{E\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w + \frac{\partial T}{\partial t} \right) \\ - \frac{T}{E\rho^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

Le premier membre se compose de cinq termes; en toutes circonstances, le quatrième et le cinquième sont au plus finis, le deuxième et le troisième sont de l'ordre de  $\chi$ .

Si la quasi-onde est du premier ordre par rapport à la température  $T$ , les dérivées partielles du second ordre de  $T$  en  $x, y, z$ , seront, en général, d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon}$  à l'intérieur de cette quasi-onde; il en sera de même de  $\Delta T$ ;  $k \Delta T$  sera donc de

l'ordre de grandeur  $\frac{\gamma}{\epsilon}$ . Si, au contraire, la quasi-onde est, en T, d'ordre supérieur au premier,  $\Delta T$  est fini et  $k \Delta T$  est de l'ordre de  $\gamma$ .

L'égalité précédente nous enseigne donc que, *pour qu'une quasi-onde, du premier ordre en  $u, v, w, p, \Pi$ , puisse être du premier ordre en T, il faut que  $\frac{\gamma}{\epsilon}$  soit fini, ou que son épaisseur soit du même ordre de grandeur que le coefficient de conductibilité; si, au contraire, son épaisseur  $\epsilon$  est très petite par rapport au coefficient de conductibilité, la quasi-onde est d'ordre supérieur au premier par rapport à T.*

Dans ce dernier cas, on a

$$(23) \quad \bar{\epsilon} = 0.$$

Dans le premier, l'égalité (21) peut s'écrire

$$(24) \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial T^2} (\mathfrak{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w) \bar{\epsilon} + \rho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho \partial T} (\alpha v + \beta \varphi + \gamma \Psi) = \eta \epsilon,$$

$\gamma$  étant une quantité finie.

Les égalités (10), (13), (15), (17), (24) ne diffèrent que par des termes de l'ordre de  $\epsilon$  des équations qui nous ont permis de traiter la propagation des ondes proprement dites dans les fluides parfaits (*Recherches*, 2<sup>e</sup> Partie, Chap. IV). Nous parvenons donc sans peine aux résultats suivants :

*Au sein d'un fluide parfait très peu conducteur, on peut observer :*

1<sup>o</sup> *Des quasi-ondes sensiblement transversales. Elles ne se propagent pas, en sorte que l'on a sensiblement*

$$\mathfrak{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w = 0.$$

2<sup>o</sup> *Des quasi-ondes sensiblement longitudinales. Celles-ci sont de deux sortes :*

A. *Les unes ont une épaisseur très petite par rapport au coefficient de conductibilité du fluide; leur vitesse de propagation est donnée sensiblement par la formule de Newton*

$$(\mathfrak{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}.$$

B. *Les autres ont une épaisseur du même ordre de grandeur que le coefficient de conductibilité du fluide; leur vitesse de propagation est sensible-*



ment donnée par la formule de Laplace

$$(\mathfrak{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C}{c}.$$

*Les ondes proprement dites, dont l'épaisseur est rigoureusement nulle, doivent être regardées comme la forme limite des premières ondes.*

Nous voyons maintenant que les observations faites sur la propagation du son dans l'air et les autres gaz concordent avec les résultats de la théorie, pourvu que l'on admette la proposition suivante :

*En aucun cas on n'observe, au sein de l'air ou d'un gaz peu conducteur, ni la propagation d'une onde proprement dite, ni la propagation d'une quasi-onde dont l'épaisseur soit très petite par rapport au coefficient de conductibilité.*

### § 3. — DES QUASI-ONDES AU SEIN DES FLUIDES VISQUEUX.

Il reste à rechercher les raisons que l'on peut avoir d'admettre l'exactitude d'une telle proposition. Ces raisons vont être tirées de la remarque suivante : *Ni l'air, ni les autres gaz ne sont des fluides parfaits; leurs coefficients de viscosité ne sont pas rigoureusement nuls; ils sont seulement très petits.*

Or, ce que nous savons déjà (*Recherches*, II<sup>e</sup> Partie, Chap. III) nous enseigne qu'*aucune onde proprement dite ne peut se propager dans un fluide visqueux, quelque petits que soient les coefficients de viscosité.* \*

Mais il y a plus. Nous allons voir que l'existence de la viscosité, si faible soit-elle, impose une limite inférieure à l'épaisseur d'une quasi-onde capable de se propager.

Considérons une quasi-onde  $S_1 S_2$  du premier ordre par rapport à  $u, v, w, \rho, \Pi$ . Par cet énoncé, nous excluons les quasi-ondes qui seraient du premier ordre par rapport à certains de ces éléments et du second ordre par rapport à d'autres; comme les ondes proprement dites jouissant de telles propriétés, de semblables quasi-ondes sont possibles, mais elles ne se propagent pas.

Au sein de la quasi-onde  $S_1 S_2$ , découpons le volume  $M_1 N_1 N_2 M_2$  représenté par la figure 3. Donnons un déplacement virtuel à la masse fluide que renferme ce volume. Nous supposerons que lorsqu'on traverse ce volume suivant une normale  $m_1 m_2$  à la surface  $S_1$ , les composantes  $\delta x, \delta y, \delta z$  varient de telle sorte que leurs dérivées partielles  $\frac{\partial \delta x}{\partial x}, \dots$ , soient du même ordre de grandeur que  $\delta x, \dots$ ;



La surface  $S$  se décompose en trois parties que nous avons désignées par  $\sigma$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ . Il est clair que, dans l'égalité (25), la partie de l'intégrale  $\int_s$  qui se rapporte à la surface  $\sigma$  est infiniment petite de l'ordre de  $\varepsilon \delta x$ .

Si donc nous désignons par  $K$  une quantité du même ordre de grandeur que les déplacements virtuels  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , l'égalité (25) pourra s'écrire

$$(28) \quad \int_{\Sigma_1} [P_x(m_1) \delta x_1 + P_y(m_1) \delta y_1 + P_z(m_1) \delta z_1] d\Sigma_1 \\ + \int_{\Sigma_2} [P_x(m_2) \delta x_2 + P_y(m_2) \delta y_2 + P_z(m_2) \delta z_2] d\Sigma_2 = K \varepsilon.$$

Considérons la somme

$$P_x(m_1) \delta x_1 d\Sigma_1 + P_x(m_2) \delta x_2 d\Sigma_2.$$

On peut l'écrire

$$(29) \quad [P_x(m_2) + P_x(m_1)] \delta x_1 d\Sigma_1 + P_x(m_2) [\delta x_2 d\Sigma_2 - \delta x_1 d\Sigma_1].$$

La quantité  $P_x(m_2)$  est finie; la différence  $(\delta x_2 d\Sigma_2 - \delta x_1 d\Sigma_1)$  est de l'ordre de grandeur de  $\varepsilon \delta x_1 d\Sigma_1$ ; il en est donc de même du second terme de l'expression (29).

Considérons le premier terme.

En  $m_1$ ,

$$\cos(n_1, x) = \alpha, \quad \cos(n_1, y) = \beta, \quad \cos(n_1, z) = \gamma,$$

En  $m_2$ ,

$$\cos(n_2, x) = -\alpha_2, \quad \cos(n_2, y) = -\beta_2, \quad \cos(n_2, z) = -\gamma_2.$$

Nous pourrions donc écrire en vertu des égalités (26),

$$P_x(m_2) + P_x(m_1) = (\Pi_1 - \Pi_2 + \nu_{x1} - \nu_{x2})\alpha + (\tau_{z1} - \tau_{z2})\beta + (\tau_{y1} - \tau_{y2})\gamma \\ - (\Pi_2 + \nu_{x2})(\alpha_2 - \alpha) - \tau_{z2}(\beta_2 - \beta) - \tau_{y2}(\gamma_2 - \gamma).$$

Les quantités  $(\Pi_2 - \Pi_1)$ ,  $(\alpha_2 - \alpha)$ ,  $(\beta_2 - \beta)$ ,  $(\gamma_2 - \gamma)$  étant des quantités très petites de l'ordre de  $\varepsilon$ , nous pourrions réduire  $P_x(m_2) + P_x(m_1)$  à

$$(\nu_{x1} - \nu_{x2})\alpha + (\tau_{z1} - \tau_{z2})\beta + (\tau_{y1} - \tau_{y2})\gamma,$$

augmenté d'une quantité très petite de l'ordre de  $\varepsilon$ .

Par ces raisonnements et par des raisonnements analogues, on voit que l'éga-

lité (28) peut se mettre sous la forme

$$\int_{\Sigma_1} \{ [(\nu_{x2} - \nu_{x1})\alpha + (\tau_{z2} - \tau_{z1})\beta + (\tau_{y2} - \tau_{y1})\gamma] \delta x_1 \\ + [(\tau_{z2} - \tau_{z1})\alpha + (\nu_{y2} - \nu_{y1})\beta + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\gamma] \delta y_1 \\ + [(\tau_{y2} - \tau_{y1})\alpha + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\beta + (\nu_{z2} - \nu_{z1})\gamma] \delta z_1 \} d\Sigma_1 = L\varepsilon,$$

L étant une quantité du même ordre de grandeur que  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ .

Cette égalité devant avoir lieu quels que soient  $\delta x_1$ ,  $\delta y_1$ ,  $\delta z_1$ , on doit avoir, en tout point de la surface  $\Sigma_1$ ,

$$(30) \quad \begin{cases} (\nu_{x2} - \nu_{x1})\alpha + (\tau_{z2} - \tau_{z1})\beta + (\tau_{y2} - \tau_{y1})\gamma = G \varepsilon, \\ (\tau_{z2} - \tau_{z1})\alpha + (\nu_{y2} - \nu_{y1})\beta + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\gamma = G' \varepsilon, \\ (\tau_{y2} - \tau_{y1})\alpha + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\beta + (\nu_{z2} - \nu_{z1})\gamma = G'' \varepsilon, \end{cases}$$

G, G', G'' étant trois quantités finies.

Selon la première égalité (27), nous pouvons écrire

$$\nu_{x2} - \nu_{x1} = -\lambda(\rho_1, T_1)(\theta)_1^2 - 2\mu(\rho_1, T_1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 \\ - \theta_2[\lambda(\rho_2, T_2) - \lambda(\rho_1, T_1)] - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1[\mu(\rho_2, T_2) - \mu(\rho_1, T_1)].$$

Lors même que les coefficients de viscosité  $\lambda$ ,  $\mu$  ne seraient pas très petits, les différences

$$\lambda(\rho_2, T_2) - \lambda(\rho_1, T_1), \quad \mu(\rho_2, T_2) - \mu(\rho_1, T_1)$$

sont des quantités très petites de l'ordre de  $\varepsilon$ ; il en est donc de même des deux derniers termes de l'égalité précédente.

Par ce raisonnement et par des raisonnements analogues, nous pourrions, au lieu des égalités (30), écrire les égalités

$$(31) \quad \begin{cases} \left\{ \lambda \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_1^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_1^2 \right] + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1^2 \right\} \alpha \\ + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_1^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_1^2 \right] \beta + \mu \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_1^2 \right] \gamma = H \varepsilon, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$\lambda$ ,  $\mu$  étant mis respectivement pour  $\lambda(\rho_1, T_1)$ ,  $\mu(\rho_1, T_1)$  et H, H', H'' étant trois quantités finies,

Moyennant les égalités (4) et (4 bis), ces égalités (31) deviennent

$$(32) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu)(\alpha \mathfrak{V} + \beta \mathfrak{V} + \gamma \mathfrak{W})\alpha + \mu \mathfrak{V} = h \varepsilon, \\ (\lambda + \mu)(\alpha \mathfrak{V} + \beta \mathfrak{V} + \gamma \mathfrak{W})\beta + \mu \mathfrak{V} = h' \varepsilon, \\ (\lambda + \mu)(\alpha \mathfrak{V} + \beta \mathfrak{V} + \gamma \mathfrak{W})\gamma + \mu \mathfrak{W} = h'' \varepsilon, \end{cases}$$

$h, h', h''$  étant trois quantités finies.

Si nous multiplions respectivement ces égalités par  $\alpha, \beta, \gamma$  et si nous les ajoutons membre à membre, nous trouvons l'égalité

$$(\lambda + 2\mu)(\alpha \mathfrak{V} + \beta \mathfrak{V} + \gamma \mathfrak{W}) = (\alpha h + \beta h' + \gamma h'')\varepsilon$$

qui permet de leur donner la forme suivante :

$$(33) \quad \begin{cases} \mathfrak{V} = \left[ h - (\alpha h + \beta h' + \gamma h'')\alpha \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{\varepsilon}{\mu}, \\ \mathfrak{V} = \left[ h' - (\alpha h + \beta h' + \gamma h'')\beta \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{\varepsilon}{\mu}, \\ \mathfrak{W} = \left[ h'' - (\alpha h + \beta h' + \gamma h'')\gamma \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{\varepsilon}{\mu}. \end{cases}$$

Pour que la quasi-onde considérée soit réellement du premier ordre en  $u, v, w$ , il faut que  $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$  soient des quantités finies, et non pas des quantités très petites; il ne faut donc pas que  $\frac{\varepsilon}{\mu}$  soit une quantité très petite. Nous pouvons, dès lors, énoncer les propositions suivantes :

*Un fluide dont le coefficient de viscosité  $\mu$  n'est pas très petit ne permet la propagation d'aucune quasi-onde très mince.*

*Un fluide dont le coefficient de viscosité  $\mu$  est très petit ne permet la propagation d'une quasi-onde que si l'épaisseur  $\varepsilon$  de cette quasi-onde est au moins de l'ordre de  $\mu$ ; si l'épaisseur  $\varepsilon$  de la quasi-onde était très petite par rapport à  $\mu$ , cette quasi-onde ne pourrait se propager.*

Cette proposition nous donne déjà la raison de celle qui a été admise à la fin du paragraphe précédent.

Mais une question se pose maintenant : L'existence d'une faible viscosité ne modifie-t-elle pas d'une manière notable les lois de la propagation d'une quasi-onde établie au § 1? C'est cette question que nous allons examiner.

Les termes de viscosité n'intervenant ni dans l'équation de continuité, ni dans l'équation de compressibilité, rien n'est changé à l'établissement des équations (10) et (17); il nous faut au contraire reprendre les raisonnements qui ont

donné les équations (13), (21), (23) et (24).

En tout point du milieu, nous devons écrire les égalités

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho X + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ - (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \mu \Delta u - \rho \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ - \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \\ - \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \frac{\partial \mu}{\partial T} = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Au sein de la quasi-onde, les dérivées du second ordre  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , ... sont très grandes, comme  $\frac{1}{\epsilon}$ ; il en est donc de même, en général, de  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ ,  $\Delta u$ . Nous supposons que  $\mu$  soit une quantité très petite de l'ordre de  $\epsilon$ , sans quoi, nous l'avons vu, aucune quasi-onde ne pourrait se propager; dès lors, aux premiers membres des équations (34), tous les termes sont assurément finis, sauf peut-être les termes

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Les équations (34) ne peuvent avoir lieu que si ces termes sont aussi finis.

Supposons d'abord  $\lambda$  fini; il faudra que  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$  soient, dans toute l'étendue de la quasi-onde, non pas des quantités très grandes de l'ordre de  $\frac{1}{\epsilon}$ , mais simplement des quantités finies. Dès lors,  $\theta(m_2) - \theta(m_1)$ , au lieu d'être une quantité finie, sera une quantité très petite de l'ordre de  $\epsilon$ .

Mais les égalités (4) et (4 bis) donnent

$$\theta(m_2) - \theta(m_1) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_1^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_1^2 = (\alpha \mathfrak{U} + \beta \mathfrak{V} + \gamma \mathfrak{W}) + (\alpha + \beta' + \gamma') \epsilon.$$

On voit donc que si  $\lambda$  est fini,  $(\alpha \mathfrak{U} + \beta \mathfrak{V} + \gamma \mathfrak{W})$  devra être une quantité très petite de l'ordre de  $\epsilon$ ; toute quasi-onde sera sensiblement transversale. Laissons de côté cette onde transversale, dont l'existence était prévue et dont la vitesse de propagation est nulle.

Nous ne pourrions observer une quasi-onde autre que celle-là, à moins que  $\lambda$  ne soit une quantité très petite du même ordre que  $\epsilon$ , et partant que  $\mu$ .

Tous les termes qui figurent aux premiers membres des égalités (34) seront



maintenant des termes finis. Nous pourrions donc écrire ces équations au point  $m_2$ , puis au point  $m_1$ , et retrancher membre à membre les équations correspondantes; mais, auparavant, nous devons prendre une précaution qui, jusqu'ici, était inutile.

Les dérivées partielles telles que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , ... sont, à l'intérieur de la quasi-onde, très grandes de l'ordre  $\frac{1}{\varepsilon}$ ; en dehors de la quasi-onde, elles redeviennent finies.

On aura soin de tracer les surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  dans les parties de l'espace où ces dérivées du second ordre ont des valeurs finies.

Moyennant cette précaution, l'opération indiquée redonnera les équations (11) et (13).

Venons maintenant à l'équation (20) et au raisonnement qui l'a fournie.

Il devra être modifié ainsi qu'il suit :

On a [*Recherches*, I<sup>re</sup> Partie, égalité (90)]

$$\begin{aligned} E dQ = dt \int \left\{ T \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w + \frac{\partial T}{\partial t} \right) \right. \\ - T \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ + 2 \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} d\omega, \end{aligned}$$

l'intégrale s'étendant au volume  $M_1 N_1 N_2 M_2$ .

Si l'on observe que ce volume est de l'ordre de  $\varepsilon$  et que  $dQ$  doit, selon l'égalité (19), être de l'ordre  $\varepsilon \chi dt$ , on voit que la quantité sous le signe  $\int$  doit être de l'ordre de  $\chi$ . Si l'on observe, d'ailleurs, que  $\lambda$  et  $\mu$  sont des quantités du même ordre de grandeur que  $\varepsilon$ , on voit que l'on peut écrire

$$T \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w + \frac{\partial T}{\partial t} \right) - T \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \sigma \chi + \xi \varepsilon.$$

Écrivons cette égalité pour le point  $m_1$ , puis pour le point  $m_2$ , et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous retrouvons l'égalité

$$\begin{aligned} (20) \quad T \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_1 u + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_1 v + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_1 w + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_1 \right] \\ - T \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_1 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_1 \right] = \nu \chi + \omega \varepsilon. \end{aligned}$$

Quant à l'égalité (22), elle devra être complétée en ajoutant au premier membre [*Recherches*, 1<sup>re</sup> Partie, égalité (94)] les termes

$$\frac{\lambda}{E} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{2\mu}{E} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Ces termes, qui ont en facteur  $\lambda$  ou  $\mu$ , sont de l'ordre de  $\epsilon$ ; il ne modifient donc rien aux conclusions tirées de l'égalité (22).

En résumé, *dans un milieu très peu visqueux, une quasi-onde dont l'épaisseur  $\epsilon$  est du même ordre de grandeur que les coefficients de viscosité  $\lambda$  et  $\mu$ , se propage sensiblement suivant les mêmes lois qu'en un fluide parfait.*

#### CONCLUSION DE LA TROISIÈME PARTIE.

Nous voyons, par ce qui précède, que dans l'air ou dans tout autre gaz très peu conducteur et très peu visqueux, on n'a jamais observé la propagation d'une onde proprement dite; ce qui semble une onde à l'expérimentateur apparaît au mathématicien comme une quasi-onde.

L'étude de la propagation du son avait si bien familiarisé les physiciens avec la notion d'onde et de vitesse de propagation d'une onde, que ce mode de propagation semblait à beaucoup d'entre eux le seul possible; ils répugnaient à admettre que certaines propriétés, telle la température au sein d'une masse conductrice, pussent dépendre exclusivement de fonctions analytiques de  $x, y, z, t$ , en sorte qu'il n'y eût, dans l'acte de leur propagation, ni onde, ni vitesse. Il est piquant de constater que ce mode de propagation est précisément celui qui convient au mouvement sonore dans l'air et que, même dans ce cas, l'existence d'ondes, l'existence d'une vitesse de propagation sont seulement des apparences et des approximations.

## QUATRIÈME PARTIE.

## DES CONDITIONS AUX LIMITES.

## CHAPITRE I.

## SUR LE FROTTEMENT.

## § 1. — DU FROTTEMENT EN GÉNÉRAL.

Le principe de d'Alembert a longtemps été regardé comme fournissant les équations les plus générales du mouvement d'un système; puis il a été nécessaire de généraliser ces équations en y introduisant les actions de viscosité; cette introduction nous a conduits aux équations générales de l'Hydrodynamique, étudiées en la première Partie de ces *Recherches* <sup>(1)</sup>.

Cette généralisation ne suffit pas à mettre en équations tous les problèmes mécaniques; pour traiter plusieurs d'entre eux il est nécessaire d'introduire dans les formules de la Dynamique de nouveaux termes, les termes de frottement; c'est cette introduction, dont nous avons, en un autre endroit <sup>(2)</sup>, approfondi les principes, qu'il nous faut étudier à nouveau afin de préciser certains points demeurés obscurs ou incomplets.

Considérons un système dénué de frottement, mais qui peut être affecté de viscosité; supposons que la déformation virtuelle la plus générale de ce système soit définie par des *variations normales*. Les équations du mouvement de ce système s'obtiendront en écrivant que l'on a, en toute modification virtuelle,

$$(1) \quad d\mathcal{E}_e - \delta_T \mathcal{F} + d\mathcal{E}_j + d\mathcal{E}_v = 0.$$

Dans cette égalité,  $d\mathcal{E}_e$  est le travail virtuel des actions extérieures;  $d\mathcal{E}_j$  est le

---

<sup>(1)</sup> *Recherches sur l'Hydrodynamique*, I<sup>re</sup> Partie : *Sur les Principes fondamentaux de l'Hydrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, t. III, 1901, p. 315).

<sup>(2)</sup> *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5<sup>e</sup> série, t. II, 1896).

travail virtuel des forces d'inertie;  $d\mathcal{E}_v$  est le travail virtuel des actions de viscosité; enfin  $\delta_T \mathcal{F}$  est la variation subie par le potentiel interne dans une modification virtuelle qui diffère en un seul point de la modification considérée : elle laisse invariable la température en chacun des éléments matériels du système.

C'est cette égalité fondamentale (1) que nous allons modifier par l'introduction d'un nouveau terme en son premier membre; nous la remplacerons par l'égalité

$$(2) \quad d\mathcal{E}_e - \delta_T \mathcal{F} + d\mathcal{E}_f + d\mathcal{E}_v + d\mathcal{E}_f = 0,$$

où  $d\mathcal{E}_f$  sera le *travail virtuel du frottement*; à l'égard de ce travail, nous allons formuler une suite d'hypothèses.

Nous admettrons tout d'abord que toute modification virtuelle du système peut être représentée au moyen d'un système particulier de variations normales que nous nommerons les *variations privilégiées*; celles-ci, d'ailleurs, se partageront en deux groupes : le premier groupe sera formé par les *variations à frottement*  $\delta a, \delta b, \dots, \delta l$ ; le second groupe sera formé par les *variations sans frottement*  $\delta m, \dots, \delta n$ .

La modification réelle éprouvée par le système dans le temps  $dt$  sera représentée par les variations privilégiées

$$\delta a = a' dt, \quad \delta b = b' dt, \quad \dots, \quad \delta l = l' dt, \quad \delta m = m' dt, \quad \dots, \quad \delta n = n' dt.$$

$a', b', \dots, l', m', \dots, n'$  seront les *vitesse privilégiées* qui correspondent respectivement aux variations privilégiées  $\delta a, \delta b, \dots, \delta l, \delta m, \dots, \delta n$ .

Cela posé, le travail virtuel des actions de frottement sera supposé de la forme suivante :

$$(3) \quad d\mathcal{E}_f = g_a \frac{a'}{|a'|} \delta a + g_b \frac{b'}{|b'|} \delta b + \dots + g_l \frac{l'}{|l'|} \delta l.$$

Les quantités  $g_a, g_b, \dots, g_l$  dépendent :

1° De l'état du système à l'instant considéré, y compris la température en chaque point;

2° Des vitesses privilégiées, parmi lesquelles ne se trouve pas la vitesse de variation de la température en chaque point;

3° Des actions extérieures qui sollicitent le système à l'instant considéré.

Lorsque les vitesses privilégiées  $a', b', \dots, l', m', \dots, n'$  tendent vers 0, les quantités  $g_a, g_b, \dots, g_l$  ne tendent pas vers 0, mais vers des limites finies  $\gamma_a, \gamma_b, \dots, \gamma_l$  qui dépendent de l'état du système à l'instant considéré, y compris la distribution des températures sur le système, et des actions extérieures qui sollicitent ce système.

Enfin les quantités  $g_a, g_b, \dots, g_l$  sont essentiellement négatives :

$$(4) \quad g_a < 0, \quad g_b < 0, \quad \dots, \quad g_l < 0.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_{mm} & \dots & \mathbf{P}_{mn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{P}_{nm} & \dots & \mathbf{P}_{nn} \end{array}$$
[illegible]
$$\delta a, \delta b, \dots, \delta l, \delta m', \dots, \delta n'$$

Parmi les variations privilégiées qui définissent la modification virtuelle la plus générale d'un système, il en existe toujours au moins 6 qui sont des variations sans frottement; on peut toujours choisir les variations sans frottement de telle sorte que ces six variations-là définissent le déplacement d'ensemble le plus général du système dans l'espace. Un simple déplacement d'ensemble du système dans l'espace n'entraîne donc aucun travail des actions de frottement.

**Donnons-en un exemple :**

$$\partial s = s' dt, \quad \partial m = 0.$$

La variation privilégiée  $\delta m$  correspond, par définition, à une vitesse  $m'$  identiquement nulle; dès lors, ce doit être une variation sans frottement; le travail virtuel de frottement se réduit à

$$(5) \quad d\mathcal{E}_f = g_s \frac{s'}{|s'|} \delta s.$$

Le frottement équivaut, dans ce cas, à une force appliquée au point M, qui aurait pour valeur absolue  $-g_s$  et qui serait dirigée en sens contraire de la vitesse du point M. C'est ce qu'on admet dans les *Traité élémentaire de Mécanique*.

Il faut bien observer, dans l'application de ce postulat important, que si la vitesse  $m'$  qui correspond à la variation privilégiée  $\delta m$  est nulle par définition, il n'en doit pas être de même de la variation virtuelle  $\delta m$ ; si, par suite des liaisons imposées au système, on avait non seulement  $m' = 0$ , mais encore  $\delta m = 0$ , le postulat précédent deviendrait un simple truisme, car, grâce à l'égalité  $\delta m = 0$ , l'expression de  $d\mathcal{E}_f$  ne renfermerait sûrement aucun terme en  $\delta m$ .

Bien des questions pourraient être développées à partir des principes que nous venons de poser; nous renverrons à l'exposé que nous en avons donné ailleurs <sup>(1)</sup>; nous nous contenterons d'étudier ici ce qui arrive lorsqu'on associe plusieurs systèmes primitivement indépendants.

Nous considérerons d'abord un système formé de plusieurs parties indépendantes et, pour simplifier les notations sans inconvénient réel au point de vue de la généralité, nous supposerons qu'il n'existe que deux telles parties, les parties 1 et 2.

Nous supposerons que, pour définir la modification virtuelle la plus générale de la partie 1, il faille joindre, aux variations que subit la température des diverses portions du corps 1, les variations normales privilégiées

$$\partial a_1, \quad \partial b_1, \quad \dots, \quad \partial l_1, \quad \partial m_1, \quad \dots, \quad \partial n_1,$$

les unes affectées de frottement, les autres dénuées de frottement. Pour la partie 2, nous adopterons les notations analogues

$$\partial a_2, \quad \partial b_2, \quad \dots, \quad \partial l_2, \quad \partial m_2, \quad \dots, \quad \partial n_2.$$

Le potentiel interne de la partie 1 sera représenté par  $\mathcal{F}_1$ , le potentiel interne de la partie 2 par  $\mathcal{F}_2$  et le potentiel interne du système que forment ces deux parties par

$$(6) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + E\Psi.$$

---

<sup>(1)</sup> *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* (*Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5<sup>e</sup> série, t. II, 1896).



Nous écrirons

$$\begin{aligned} -\delta_1 \mathcal{F}_1 &= A_1 \delta a_1 + B_1 \delta a_1 + \dots + L_1 \delta l_1 + M_1 \delta m_1 + \dots + N_1 \delta n_1, \\ -\delta_2 \mathcal{F}_2 &= A_2 \delta a_2 + B_2 \delta a_2 + \dots + L_2 \delta l_2 + M_2 \delta m_2 + \dots + N_2 \delta n_2, \\ -E \delta \Psi &= \mathfrak{A}'_1 \delta a_1 + \mathfrak{B}'_1 \delta b_1 + \dots + \mathfrak{L}'_1 \delta l_1 + \mathfrak{M}'_1 \delta m_1 + \dots + \mathfrak{N}'_1 \delta n_1 \\ &\quad + \mathfrak{A}'_2 \delta a_2 + \mathfrak{B}'_2 \delta b_2 + \dots + \mathfrak{L}'_2 \delta l_2 + \mathfrak{M}'_2 \delta m_2 + \dots + \mathfrak{N}'_2 \delta n_2. \end{aligned}$$

Les quantités  $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{B}'_1, \dots, \mathfrak{L}'_1, \mathfrak{M}'_1, \dots, \mathfrak{N}'_1$  sont les actions du corps 2 sur le corps 1; les quantités  $\mathfrak{A}'_2, \mathfrak{B}'_2, \dots, \mathfrak{L}'_2, \mathfrak{M}'_2, \dots, \mathfrak{N}'_2$  sont les actions du corps 1 sur le corps 2.

Le travail des actions extérieures appliquées au corps 1 peut, en une modification virtuelle quelconque, s'écrire

$$d\mathcal{E}_{e1} = (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}'_1) \delta a_1 + \dots + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}'_1) \delta l_1 + \dots + (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}'_1) \delta n_1,$$

$\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{N}_1$  étant les actions extérieures, non émanées du corps 2, qui s'exercent sur le corps 1.

De même, le travail virtuel des actions extérieures appliquées au corps 2 peut s'écrire

$$d\mathcal{E}_{e2} = (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}'_2) \delta a_2 + \dots + (\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}'_2) \delta l_2 + \dots + (\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}'_2) \delta n_2,$$

$\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{L}_2, \dots, \mathfrak{N}_2$  étant les actions extérieures, non émanées du corps 1, qui s'exercent sur le corps 2.

Enfin désignons, pour le corps 1, les travaux virtuels d'inertie, de viscosité et de frottement par

$$d\mathcal{E}_{f1} = J_{a1} \delta a_1 + \dots + J_{l1} \delta l_1 + J_{m1} \delta m_1 + \dots + J_{n1} \delta n_1,$$

$$d\mathcal{E}_{v1} = f_{a1} \delta a_1 + \dots + f_{l1} \delta l_1 + f_{m1} \delta m_1 + \dots + f_{n1} \delta n_1,$$

$$d\mathcal{E}_{f1} = g_{a1} \frac{a'_1}{|a'_1|} \delta a_1 + g_{b1} \frac{b'_1}{|b'_1|} \delta b_1 + \dots + g_{l1} \frac{l'_1}{|l'_1|} \delta l_1.$$

Dans la dernière égalité, chacune des quantités  $g$  dépend de l'état du système 1, des vitesses  $a'_1, b'_1, \dots, l'_1, m'_1, \dots, n'_1$ , enfin de

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}'_1), \dots, (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}'_1), \dots, (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}'_1).$$

Pour la partie 2, adoptons des notations analogues.



indépendantes 1 et 2, et supposons que cette suite ait pour limite un système où les parties 1 et 2 présentent un ou plusieurs contacts correspondant à une liaison bilatérale exprimée par des égalités de la forme

$$(9) \quad \begin{cases} P_{a_1} \delta a_1 + \dots + P_{n_1} \delta n_1 + P_{a_2} \delta a_2 + \dots + P_{n_2} \delta n_2 = 0, \\ P'_{a_1} \delta a_1 + \dots + P'_{n_1} \delta n_1 + P'_{a_2} \delta a_2 + \dots + P'_{n_2} \delta n_2 = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Ces égalités s'obtiennent en exprimant que les parties 1 et 2, qui sont en contact avant le déplacement virtuel  $\delta a_1, \dots, \delta n_1, \delta a_2, \dots, \delta n_2$ , sont encore en contact après; pour les former, il suffit donc de connaître la figure et la position des parties 1 et 2 avant ce déplacement virtuel et le changement que cette modification virtuelle apporte à cette figure et à cette position. Dès lors, si certaines variations, dites *variations sans inertie*, définissent des modifications virtuelles où chacune des parties du système change de propriétés, mais sans changer de figure ni d'état, ces variations ne figurent pas dans les conditions (9) et une modification où ces variations diffèrent seules de 0 n'altère pas la valeur des quantités  $P, P'$ .

Les variations  $\delta a_1, \dots, \delta n_1, \delta a_2, \dots, \delta n_2$  étant supposées normales, la figure et la position des diverses parties du système ne varient pas lorsque les températures varient seules. Dès lors, les considérations précédentes montrent que les températures des diverses parties du système ne peuvent influencer sur les valeurs des coefficients  $P, P'$ .

Nous supposons que lorsque le système formé de deux parties indépendantes tend vers cette forme limite, les diverses grandeurs que nous avons eu à considérer dans l'étude de ce système tendent vers des limites bien déterminées.

*Nous admettons alors qu'une égalité analogue à l'égalité (2) est vérifiée, non pas en toute modification virtuelle du système 1-2, mais en toute modification virtuelle qui vérifie les conditions de liaison (9).*

Dans cette équation dont nous admettons l'existence, les termes  $d\mathcal{E}_e, \delta_T \mathcal{F}, d\mathcal{E}_i$  sont simplement les limites vers lesquelles tendent les termes analogues relatifs au système formé de deux parties indépendantes; mais il n'en est pas de même des termes  $d\mathcal{E}_v$  et  $d\mathcal{E}_f$ .

Le terme  $d\mathcal{E}_v$  sera la somme de trois autres :

1° La limite  $d\mathcal{E}_{v_1}$  du travail virtuel des actions de viscosité relatives à la partie 1;

2° La limite  $d\mathcal{E}_{v_2}$  du travail virtuel des actions de viscosité relatives à la partie 2;

3° Un terme  $d\mathcal{E}_w$ , travail virtuel de la *viscosité au contact* des parties 1 et 2. Les suppositions à faire au sujet de ce terme vont arrêter un instant notre attention.

Au moyen des variations normales  $\delta a_1, \dots, \delta n_1, \delta a_2, \dots, \delta n_2$ , on peut former des combinaisons linéaires et homogènes dont les coefficients dépendent de l'état du système 1-2, mais point de la distribution des températures sur ce système; on peut évidemment choisir ces combinaisons  $\delta f, \dots, \delta g, \delta h, \dots, \delta k$  de telle sorte qu'elles soient déterminées lorsque l'on connaît le déplacement virtuel relatif des parties 1 et 2 au voisinage de leurs points de contact et réciproquement; en outre, de telle sorte que, dans le cas où le déplacement relatif en question s'annule, on ait

$$\delta f = 0, \quad \dots, \quad \delta g = 0, \quad \delta h = 0, \quad \dots, \quad \delta k = 0.$$

Dès lors, il est clair que les conditions de liaisons (9) peuvent toujours se mettre sous la forme

$$(10) \quad \begin{cases} p_f \delta f + \dots + p_g \delta g + p_h \delta h + \dots + p_k \delta k = 0, \\ p'_f \delta f + \dots + p'_g \delta g + p'_h \delta h + \dots + p'_k \delta k = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Les quantités  $p, p', \dots$  dépendent de l'état des corps 1 et 2 au voisinage de leurs contacts, mais point de leur température.

Pour repasser de la forme (10) des équations de liaison à la forme (9), il suffit de remplacer  $\delta f, \dots, \delta g, \delta h, \dots, \delta k$  par leurs expressions en fonctions de  $\delta a_1, \dots, \delta n_1, \delta a_2, \dots, \delta n_2$ . On voit alors que les quantités  $P, P', \dots$  sont des fonctions linéaires et homogènes des quantités  $p, p', \dots$ , les coefficients dépendant de l'état des deux corps en contact, mais point de la distribution des températures.

Dans le temps  $dt$ , les parties des corps 1 et 2 qui avoisinent les contacts éprouvent un déplacement relatif réel dans lequel

$$\delta f = f' dt, \quad \dots, \quad \delta g = g' dt, \quad \delta h = h' dt, \quad \dots, \quad \delta k = k' dt.$$

$f', \dots, g', h', \dots, k'$  sont les vitesses relatives au voisinage du contact.

Si ces vitesses sont constamment nulles

$$(11) \quad f' = 0, \quad \dots, \quad g' = 0, \quad h' = 0, \quad \dots, \quad k' = 0,$$

la liaison considérée est une soudure.

Ces préliminaires posés, nous admettrons que  $d\mathfrak{C}_w$  est de la forme suivante :

$$(12) \quad d\mathfrak{C}_w = F_f \delta f + \dots + F_g \delta g + F_h \delta h + \dots + F_k \delta k.$$

Les quantités  $F$  dépendent de l'état des parties 1 et 2 au voisinage des contacts, y compris la température de ces parties; elles dépendent en outre des vitesses

relatives  $f', \dots, g', h', \dots, k'$ ; elles s'annulent lorsque toutes ces vitesses sont nulles, en sorte que les égalités (11) entraînent les égalités

$$(13) \quad F_f = 0, \quad F_g = 0, \quad F_h = 0, \quad \dots, \quad F_k = 0.$$

Lorsque la liaison établie entre deux corps est une soudure, les actions de viscosité au contact de ces deux corps sont identiquement nulles. C'est une proposition que nous avons énoncée et dont nous avons fait usage en la première Partie de ces *Recherches*.

Enfin, lorsque les égalités (11) ne sont pas simultanément vérifiées, on a

$$(14) \quad F_f f' + \dots + F_g g' + F_h h' + \dots + F_k k' \leq 0.$$

Aux propositions précédentes on peut en adjoindre d'autres si l'on admet l'hypothèse de lord Rayleigh aux termes de laquelle il existe, pour tout système indépendant, une *fonction dissipative*.

Le corps 1, en effet, tant qu'il demeure indépendant, doit, selon cette hypothèse, admettre une fonction dissipative; les actions de viscosité qui figurent dans  $d\mathcal{E}_1$ , doivent donc dériver d'une telle fonction. Il doit en être de même des actions qui figurent dans  $d\mathcal{E}_2$ . Dès lors, pour que le système tout entier dérive d'une fonction dissipative, *il faut et il suffit que les actions de viscosité qui figurent dans  $d\mathcal{E}_w$  dérivent d'une fonction dissipative qui sera forcément une forme quadratique en  $f', \dots, g', h', \dots, k'$ .*

Supposons qu'à l'une des variations virtuelles  $\delta f, \dots, \delta g, \delta h, \dots, \delta k$ , soit la variation  $\delta k$ , corresponde une vitesse  $k'$  identiquement nulle; la fonction dissipative dont nous venons de parler ne renfermera pas de terme en  $k'$ , en sorte que  $F_k$  sera égal à 0 et que  $d\mathcal{E}_w$  ne renfermera pas de terme en  $\delta k$ .

Occupons-nous maintenant du terme  $d\mathcal{E}_f$ .

Ce terme, lui aussi, est la somme de trois autres :

1° Du terme

$$(15) \quad d\mathcal{E}_{f1} = g_{a1} \frac{a'_1}{|a'_1|} \delta a_1 + \dots + g_{l1} \frac{l'_1}{|l'_1|} \delta l_1.$$

Les termes  $g_{a1}, \dots, g_{l1}$  dépendent de l'état de tout le système formé par les parties 1 et 2, y compris la distribution des températures sur ce système; des actions extérieures appliquées à ce système; enfin des vitesses des diverses parties de ce système.

Le terme  $g_{a1}$  n'est pas la limite vers laquelle tend le terme  $g_a$ , lorsque les deux parties 1 et 2 viennent au contact. Nous verrons tout à l'heure quelle relation existe entre les quantités  $g_{a1}$  et  $g_a$ .

On a ailleurs

$$G_{a1} < 0, \quad \dots, \quad G_{a1} < 0.$$

Deuxième

$$d\mathcal{E}_{\varphi_2} = G_{a2} \frac{a'_2}{|a'_2|} \delta a_2 + \dots + G_{l2} \frac{l'_2}{|l'_2|} \delta l_2,$$

analogue au terme  $d\mathcal{E}_{\varphi_1}$ .

Le terme  $d\mathcal{E}_{\psi}$ , travail virtuel du *frottement au contact des corps 1 et 2*. Ce terme va être étudié de près.

Parmi les diverses manières de déterminer les variations virtuelles  $\delta f, \dots, \delta g, \delta h, \dots, \delta k$ , nous supposons qu'il en existe au moins une telle que l'on puisse écrire

$$(12) \quad d\mathcal{E}_{\psi} = G_f \frac{f'}{|f'|} \delta f + \dots + G_g \frac{g'}{|g'|} \delta g,$$

le travail virtuel  $d\mathcal{E}_{\psi}$  ne renfermant aucun terme en  $\delta h, \dots, \delta k$ ; il se peut, du reste, qu'il n'existe aucune variation telle que  $\delta h, \dots, \delta k$ .

Si l'une des quantités  $\delta f, \dots, \delta g, \delta h, \dots, \delta k$  correspond à une valeur nulle de celle des quantités  $f', \dots, g', h', \dots, k'$  qui lui correspond, le facteur  $G$  correspondant est supposé égal à 0; la variation correspondante est une des variations  $\delta h, \dots, \delta k$ . Dans l'étude du mouvement d'un point matériel sur une surface, nous avons déjà trouvé une occasion d'appliquer cette remarque.

Si l'une des quantités  $\delta f$  est nulle *par liaison*, elle cesse évidemment de figurer dans l'expression de  $d\mathcal{E}_{\psi}$ , ce qui revient au même que si l'on supposait  $G_f = 0$ ; si la liaison établie par les égalités (10) ou les égalités (11), qui leur sont équivalentes, est telle que

$$\delta f = 0, \quad \dots, \quad \delta g = 0,$$

$d\mathcal{E}_{\psi}$  est identiquement nul; le résultat est alors le même que si l'on supposait

$$(13) \quad G_f = 0, \quad \dots, \quad G_g = 0.$$

Les quantités  $G$  qui ne sont pas nulles sont négatives :

$$(14) \quad G_f < 0, \quad \dots, \quad G_g < 0.$$

Les quantités  $G$  dépendent de l'état du système, des actions extérieures qui le sollicitent, des vitesses de ses diverses parties.

On voit qu'en somme, pour passer de ce que nous avons dit au sujet du frottement en général à ce que nous venons de dire au sujet du frottement au contact

de deux corps qui présentent une liaison bilatérale, il suffit de formuler une seule hypothèse qui est la suivante :

*Les variations privilégiées à frottement du système formé par les corps 1 et 2 se composent :*

1° *Des variations privilégiées à frottement  $\delta a_1, \dots, \delta l_1$  de la partie 1 considérée comme un système indépendant;*

2° *Des variations privilégiées à frottement  $\delta a_2, \dots, \delta l_2$  de la partie 2 considérée comme un système indépendant;*

3° *De certaines variations  $\delta f, \dots, \delta g$  qui sont déterminées lorsqu'on connaît le déplacement virtuel relatif des parties voisines du ou des points de contact, et qui s'annulent avec ce déplacement.*

Poussant plus loin, nous allons introduire deux autres hypothèses, auxquelles vont nous conduire les considérations suivantes :

Nous admettons, avons-nous dit, qu'une égalité analogue à l'égalité (2) doit être vérifiée. D'après ce qui vient d'être exposé, cette égalité s'écrira

$$(20) \quad d\mathfrak{E} - \delta_T \mathfrak{F} + d\mathfrak{E}_{11} + d\mathfrak{E}_{12} + d\mathfrak{E}_{v1} + d\mathfrak{E}_{v2} + d\mathfrak{E}_{\varphi1} + d\mathfrak{E}_{\varphi2} \\ + F_f \delta f + \dots + F_g \delta g + F_h \delta h + \dots + F_k \delta k \\ + G_f \frac{f'}{|f'|} \delta f + \dots + G_g \frac{g'}{|g'|} \delta g = 0.$$

Cette égalité (20) doit avoir lieu, non pas identiquement, mais pour toutes les modifications virtuelles qui vérifient les égalités (9) ou, ce qui revient au même, les égalités (10).

Or les quantités  $\delta f, \dots, \delta g, \delta h, \dots, \delta k$  étant des fonctions linéaires et homogènes de  $\delta a_1, \dots, \delta n_1, \delta a_2, \dots, \delta n_2$ , le premier membre de l'égalité (20) est, en définitive, une forme linéaire et homogène des variations

$$\delta a_1, \dots, \delta n_1, \delta a_2, \dots, \delta n_2,$$

forme que nous désignerons par

$$\Delta(\delta a_1, \dots, \delta n_1, \delta a_2, \dots, \delta n_2).$$

Les coefficients de cette forme dépendent de l'état du système formé par les parties 1 et 2, des actions extérieures exercées sur ce système et des vitesses  $a'_1, \dots, n'_1, a'_2, \dots, n'_2$ .

L'égalité (20) ou

$$(21) \quad \Delta(\delta a_1, \dots, \delta n_1, \delta a_2, \dots, \delta n_2) = 0$$

doit être vérifiée toutes les fois que  $\delta a_1, \dots, \delta n_1, \delta a_2, \dots, \delta n_2$  vérifient les égalités (9). Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe des quantités  $\Pi, \Pi', \dots$ , fonctions des coefficients de la forme  $\Delta$  et des quantités  $P, P', \dots$  qui figurent dans les égalités (9), telles que l'on ait *identiquement*

$$(22) \quad \begin{aligned} &\Delta(\delta a_1, \dots, \delta n_1, \delta a_2, \dots, \delta n_2) \\ &\quad + \Pi (P_{a_1} \delta a_1 + \dots + P_{n_1} \delta n_1 + P_{a_2} \delta a_2 + \dots + P_{n_2} \delta n_2) \\ &\quad + \Pi' (P'_{a_1} \delta a_1 + \dots + P'_{n_1} \delta n_1 + P'_{a_2} \delta a_2 + \dots + P'_{n_2} \delta n_2) \\ &\quad + \dots = 0. \end{aligned}$$

Il résulte de ce qui va être supposé que des équations permettent de déterminer les quantités  $\Pi, \Pi', \dots$  lorsqu'on connaît l'état du système 1-2, les actions extérieures qui le sollicitent, enfin les vitesses  $a'_1, \dots, n'_1, a'_2, \dots, n'_2$ . Il est nécessaire de faire cette remarque avant d'énoncer les deux hypothèses que voici :

I. Si la partie 1 formait un système indépendant, le travail virtuel du frottement relatif à ce système serait de la forme

$$g_{a1} \frac{a'_1}{|a'_1|} \delta a_1 + \dots + g_{l1} \frac{l'_1}{|l'_1|} \delta l_1.$$

Les fonctions  $g_{a1}, \dots, g_{l1}$  dépendraient, d'une manière bien déterminée :

- 1° De l'état du système, y compris la température en ses divers points;
- 2° Des vitesses  $a'_1, \dots, n'_1, a'_2, \dots, n'_2$ ;
- 3° Des actions extérieures  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{K}_1$ . Nous mettrons ces dernières variables en évidence en écrivant

$$\begin{aligned} g_{a1} &= g_{a1}(\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{K}_1), \\ &\dots, \\ g_{l1} &= g_{l1}(\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{K}_1). \end{aligned}$$

Or, nous supposons que les fonctions  $g_{a1}, \dots, g_{l1}$  se tirent simplement des fonctions  $g_{a1}, \dots, g_{l1}$  en y remplaçant respectivement  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{K}_1$  par

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \dots, \\ &\dots, \\ &\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}'_1 + \Pi P_{n1} + \Pi' P'_{n1} + \dots \end{aligned}$$



*de telle sorte que l'on ait*

[illegible]

On peut énoncer cette hypothèse sous la forme que voici :

*Le travail virtuel  $d\mathcal{E}_f$ , se calcule exactement comme se calculerait le travail virtuel du frottement au sein d'un système indépendant qui serait identique au corps 1, mais qui serait soumis aux actions extérieures*

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}'_1 + \Pi \mathbf{P}_{a_1} + \Pi' \mathbf{P}'_{a_1} + \dots, \\ \dots\dots\dots, \\ \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}'_1 + \Pi \mathbf{P}_{n_1} + \Pi' \mathbf{P}'_{n_1} + \dots. \end{aligned}$$

Naturellement, cette hypothèse s'étend, *mutatis mutandis*, au travail virtuel  $d\mathfrak{E}_2$ .

II. Nous supposons que les fonctions  $G_f, \dots, G_g$  s'obtiennent en remplaçant  $\Pi, \Pi', \dots$  par leurs valeurs dans certaines fonctions

$$\mathfrak{E}_f(\Pi, \Pi', \dots), \quad \dots, \quad \mathfrak{E}_g(\Pi, \Pi', \dots)$$

qui, outre  $\Pi, \Pi', \dots$ , dépendent exclusivement de l'état des corps 1 et 2 au voisinage immédiat des parties que la liaison (9) met en contact et des vitesses  $f', \dots, g', h', \dots, k'$  :

[illegible]

D'après ce qui a été dit sur le passage des égalités (9) aux égalités (10), on a identiquement

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{a_1} \delta a_1 + \dots + \mathbf{P}_{n_1} \delta n_1 &= p_f \delta f + \dots + p_h \delta h, \\ \mathbf{P}'_{a_1} \delta a_1 + \dots + \mathbf{P}'_{n_1} \delta n_1 &= p'_f \delta f + \dots + p'_h \delta h, \\ &\dots \end{aligned}$$

Dès lors, en vertu des égalités (12), (15), (15 bis), (17), (22), (23) et (24), on peut énoncer la proposition suivante :

*En nombre égal aux équations de liaisons (9), il existe des quantités*



En différentiant ces relations par rapport à  $t$ , nous obtiendrons  $\varpi$  nouvelles relations où figureront celles des accélérations  $a''_1, \dots, n''_1, a''_2, \dots, n''_2$  qui correspondent à des variations à inertie;  $\sigma$  en sera le nombre; ni les températures, ni leurs dérivées par rapport à  $t$  n'y figureront.

Nous obtenons ainsi  $(\sigma + \varpi)$  relations linéaires par rapport aux  $\sigma$  accélérations qui correspondent aux variations à inertie. Ces relations dépendent, en outre, des  $\varpi$  facteurs  $\Pi, \Pi', \dots$ , de l'état du système, y compris la température de ses diverses parties, des actions extérieures et des vitesses  $a'_1, \dots, n'_1, a'_2, \dots, n'_2$ ; les vitesses de variation de la température des diverses parties n'y figurent pas. Ces  $(\sigma + \varpi)$  relations sont ce que nous nommerons les *relations du premier groupe*.

Nous avons, en outre, fournies par les variations sans inertie,  $\rho$  *relations du second groupe*, où figurent les  $\varpi$  facteurs  $\Pi, \Pi', \dots$  et qui dépendent de l'état du système à l'instant  $t$ , y compris sa température aux divers points, des actions extérieures et des vitesses, sauf de la vitesse de variation de la température.

Entre les  $(\sigma + \varpi)$  relations du premier groupe, éliminons les  $\sigma$  accélérations qui y figurent et qui se rapportent toutes aux variations à inertie. Il nous restera  $\varpi$  équations permettant de déterminer les  $\varpi$  facteurs  $\Pi, \Pi', \dots$  en fonctions de l'état du système, y compris la température aux divers points, des actions extérieures et des vitesses  $a'_1, \dots, n'_1, a'_2, \dots, n'_2$ . Ce premier résultat rend légitime les hypothèses formulées tout à l'heure.

Dans les  $(\rho + \sigma)$  relations qui fournit l'identité (25), remplaçons  $\Pi, \Pi', \dots$  par les valeurs ainsi déterminées. Il nous restera  $(\rho + \sigma)$  équations dépendant de l'état du système, y compris la température  $T$  en ses diverses parties, des actions extérieures et des vitesses  $a'_1, \dots, n'_1, a'_2, \dots, n'_2$ ; en outre,  $\sigma$  de ces équations, celles qui proviennent des  $\sigma$  variations à inertie, contiendront les  $\sigma$  accélérations correspondantes.

Si l'on connaissait la loi de variation des actions extérieures et de la température  $T$  en fonction de  $t$ , ces équations détermineraient les lois du mouvement du système, pourvu que l'on connût son état initial et les vitesses initiales qui correspondent aux variations à inertie. Mais, comme la variation des températures  $T$  en fonction de  $t$  n'est pas, en général, connue, il faudra, aux équations précédentes, joindre autant de *relations supplémentaires* qu'il y a, dans le système, de températures indépendantes.

Pour terminer ces considérations générales sur le frottement, il nous reste à faire la remarque suivante :

La méthode qui nous a servi à passer d'un système formé de parties indépendantes à un système où ces parties présentent une liaison, permet également de passer d'un système où figure une liaison à un système où figurent deux liaisons, et ainsi de suite.

A chaque liaison correspondra un système de variations à frottement telles que  $\delta f, \dots, \delta g$ ; des facteurs analogues à  $\Pi, \Pi', \dots$ ; un travail virtuel de frottement analogue à  $d\mathfrak{E}_w$ . *Le travail virtuel des actions de frottement qui s'exercent aux divers contacts est la somme de ces quantités analogues à  $d\mathfrak{E}_w$ .*

## § 2. — FROTTEMENT AU CONTACT DE DEUX CORPS SOLIDES.

Avant d'étendre ces considérations aux systèmes composés d'un solide indéformable et d'un fluide, ou bien aux systèmes composés de deux fluides, nous allons les appliquer au cas bien connu de deux solides indéformables qui se touchent en un point.

Pour un solide indépendant, le potentiel interne dépend exclusivement de la température. On a donc

$$\partial_T \mathfrak{F}_1 = 0, \quad \partial_T \mathfrak{F}_2 = 0$$

et, partant,

$$\partial_T \mathfrak{F} = E \partial \Psi.$$

Le mouvement virtuel le plus général d'un solide invariable n'entraîne aucun travail de viscosité ni de frottement; on a donc

$$\begin{aligned} d\mathfrak{E}_{v_1} &= 0, & d\mathfrak{E}_{v_2} &= 0, \\ d\mathfrak{E}_{\varphi_1} &= 0, & d\mathfrak{E}_{\varphi_2} &= 0. \end{aligned}$$

Le corps 1 et le corps 2 se touchent en un point O. Le déplacement relatif virtuel le plus général du corps 2 par rapport au corps 1 peut toujours se ramener à une rotation autour d'un axe passant par le point O et à une translation. Il en est de même du déplacement relatif réel du corps 2 par rapport au corps 1 pendant le temps  $dt$ . Mais ici, comme on doit supposer les deux corps 1 et 2 en contact aussi bien à l'instant  $(t + dt)$  qu'à l'instant  $t$ , la translation devra être parallèle au plan tangent commun aux deux corps 1 et 2.

Le déplacement relatif réel du corps 2 par rapport au corps 1, dans le temps  $dt$ , peut donc se décomposer en trois :

1° Une rotation  $p' dt$  autour de la normale commune ON aux deux corps; cette rotation constitue le *pivotement* pendant le temps  $dt$ ;

2° Une rotation  $r' dt$  autour d'une droite OR menée dans le plan tangent commun; cette rotation constitue le *roulement* pendant le temps  $dt$  et OR est l'*axe de roulement*.

3° Une translation  $g' dt$  suivant une droite OG située dans le plan tangent commun; cette translation constitue le *glissement* pendant le temps  $dt$  et OG est la *direction du glissement*.

Un déplacement relatif virtuel du corps 2 par rapport au corps 1 peut toujours se décomposer en six autres :

- 1° Une rotation  $\delta p$  autour de la normale commune ON;
- 2° Une rotation  $\delta r$  autour de l'axe de roulement OR;
- 3° Une rotation  $\delta \rho$  autour d'une droite O $\mathcal{R}$ , située dans le plan tangent commun et perpendiculaire à OR;
- 4° Une translation  $\delta n$  parallèle à la normale commune ON;
- 5° Une translation  $\delta g$  parallèle à la direction de glissement OG;
- 6° Une translation  $\delta \gamma$  parallèle à une direction O $\mathcal{G}$  située dans le plan tangent commun et perpendiculaire à OG.

Nous admettrons que les six variations

$$\delta p, \delta r, \delta \rho, \delta n, \delta g, \delta \gamma$$

jouent ici le rôle qui est attribué, dans la théorie générale, aux quantités

$$\delta f, \dots, \delta g, \delta h, \dots, \delta k.$$

En la modification réelle qui se produit pendant le temps  $dt$ , on a

$$\begin{aligned} \delta p &= p' dt, & \delta r &= r' dt, & \delta \rho &= 0, \\ \delta n &= 0, & \delta g &= g' dt, & \delta \gamma &= 0. \end{aligned}$$

D'après ce que nous avons vu, les variations virtuelles  $\delta p, \delta \gamma, \delta n$  ne figureront pas dans le travail virtuel de la viscosité de contact qui aura pour expression

$$(26) \quad d\mathcal{E}_w = F_p \delta p + F_r \delta r + F_g \delta g,$$

les fonctions  $F_p, F_r, F_g$  dépendant de la nature et de l'état des corps en contact et, en outre, des vitesses  $p', r', g'$ .

Les vitesses  $p'$  et  $\gamma'$  étant nulles par définition et  $\delta n$  étant nul par liaison,  $d\mathcal{E}_\psi$  ne renferme aucun terme en  $\delta p, \delta \gamma, \delta n$  :

$$(27) \quad d\mathcal{E}_\psi = G_p \frac{p'}{|p'|} \delta p + G_r \frac{r'}{|r'|} \delta r + G_g \frac{g'}{|g'|} \delta g.$$

Pour définir le déplacement virtuel le plus général du système, il suffit d'ajouter aux six variations

$$\delta p, \delta r, \delta \rho, \delta n, \delta g, \delta \gamma$$

six autres variations définissant un mouvement d'ensemble du système, d'ailleurs identique au déplacement d'ensemble le plus général du corps 1. Ces six variations peuvent toujours se ramener aux trois composantes  $\delta \lambda, \delta \mu, \delta \nu$  d'une rotation et aux trois composantes  $\delta \xi, \delta \eta, \delta \zeta$  d'une translation.

On pourra toujours écrire

$$(28) \quad d\mathfrak{E}_e - E \partial\Psi = X \partial\zeta + Y \partial\eta + Z \partial\zeta \\ + L \partial\lambda + M \partial\mu + N \partial\nu \\ + \mathfrak{A} \partial\rho + \mathfrak{B} \partial r + \mathfrak{C} \partial\rho + \mathfrak{D} \partial n + \mathfrak{E} \partial g + \mathfrak{F} \partial\gamma.$$

Le travail des forces d'inertie  $d\mathfrak{E}_j$  sera une fonction linéaire et homogène des douze mêmes variations indépendantes.

Enfin la liaison qui existe entre les deux corps s'exprimera par l'égalité

$$(29) \quad \partial n = 0.$$

Dès lors, d'après ce que nous avons vu, il existera une grandeur  $\Pi$  dépendant de l'état des deux corps 1 et 2, de leurs vitesses et des actions qui s'exercent sur eux, telle qu'on ait l'égalité

$$(30) \quad d\mathfrak{E}_e - E \partial\Psi + d\mathfrak{E}_i + d\mathfrak{E}_w + d\mathfrak{E}_\psi + \Pi \partial n = 0,$$

quelles que soient les variations

$$\partial\zeta, \quad \partial\eta, \quad \partial\zeta, \quad \partial\lambda, \quad \partial\mu, \quad \partial\nu, \\ \partial\rho, \quad \partial r, \quad \partial\rho, \quad \partial n, \quad \partial g, \quad \partial\gamma.$$

D'ailleurs les coefficients  $G_p, G_r, G_g$  peuvent être ramenés à ne dépendre que de l'état des corps 1 et 2, des vitesses  $p', r', g'$  et de  $\Pi$  :

$$(31) \quad \begin{cases} G_p = \mathfrak{G}_p(\Pi, p', r', g'), \\ G_r = \mathfrak{G}_r(\Pi, p', r', g'), \\ G_g = \mathfrak{G}_g(\Pi, p', r', g'). \end{cases}$$

Dès lors, l'égalité (30), jointe aux égalités (26), (27), (28) et (31), nous fournit les douze relations suivantes :

$$(32) \quad \begin{cases} X + J_\xi = 0, & Y + J_\eta = 0, & Z + J_\zeta = 0, \\ L + J_\lambda = 0, & M + J_\mu = 0, & N + J_\nu = 0, \end{cases}$$

$$(33) \quad \mathfrak{D} + J_n + \Pi = 0,$$

$$(34) \quad \mathfrak{C} + J_\rho = 0, \quad \mathfrak{F} + J_\gamma = 0,$$

$$(35) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} + J_p + F_p + \mathfrak{G}_p \frac{p'}{|p'|} = 0, \\ \mathfrak{B} + J_r + F_r + \mathfrak{G}_r \frac{r'}{|r'|} = 0, \\ \mathfrak{C} + J_g + F_g + \mathfrak{G}_g \frac{g'}{|g'|} = 0, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre la treizième équation

$$(36) \quad n' = 0,$$

qui résulte de la liaison (29), pour obtenir les treize équations du mouvement du système.

Les trois équations (35) n'ont de sens que si les trois quantités  $p'$ ,  $r'$ ,  $g'$  sont différentes de 0. Si l'une d'elles,  $p'$  par exemple, devenait égale à 0, la première n'aurait plus de sens.

Mais, d'autre part, l'hypothèse selon laquelle  $p'$  est différent de 0 peut fort bien, elle aussi, conduire à des résultats inacceptables.

En effet, la première équation (35) équivaut, en réalité, à deux équations distinctes, savoir : L'équation

$$(35 \text{ bis}) \quad \mathfrak{A} + J_p + F_p + \mathfrak{G}_p = 0,$$

que l'on ne doit employer que si  $p'$  est positif, et l'équation

$$(35 \text{ ter}) \quad \mathfrak{A} + J_p + F_p - \mathfrak{G}_p = 0,$$

que l'on ne doit point employer à moins que  $p'$  ne soit négatif.

Or, on peut fort bien se trouver dans les conjonctures suivantes : Si l'on remplace la première équation (35) par l'équation (35 bis), les équations du mouvement du système donnent pour  $p'$  une valeur négative; si, au contraire, on remplace la première équation (35) par l'équation (35 ter), les équations du mouvement du système fournissent pour  $p'$  une valeur positive.

Dans ce cas, l'hypothèse qu'il existe une vitesse de pivotement différente de 0 conduit, on le voit, à une contradiction; on est contraint de supposer que le corps 2 ne pivote pas sur le corps 1, de poser constamment

$$(36) \quad p' = 0.$$

Mais alors, la mise en équation du problème doit être modifiée.

Doit-on considérer l'hypothèse (36) de la manière suivante :

*La vitesse  $p'$  est nulle identiquement, mais la variation virtuelle  $\delta p$  n'est pas nécessairement nulle?*

Dans ce cas, d'après le postulat que nous avons formulé, il suffira d'égaliser  $F_p$ ,  $G_p$  et, partant,  $\mathfrak{G}_p$  à zéro.

Dès lors, la première équation (35) deviendra

$$(35_{IV}) \quad \mathfrak{A} + J_p = 0.$$

Mais alors, à la seule première équation (35), nous nous trouvons avoir substitué les deux équations (35<sub>v</sub>) et (36); comme le nombre des inconnues n'a pas changé, il est à prévoir que le nombre des équations sera devenu surabondant et que le nouveau problème conduira encore à des impossibilités.

Par conséquent, on doit regarder l'égalité (36) comme résultant de l'hypothèse suivante :

*Au problème primitif, reconnu impossible, nous substituons un nouveau problème qui diffère du précédent par l'introduction de l'équation de liaison*

$$(36 \text{ bis}) \quad \delta p = 0.$$

Dans ce cas, on doit bien encore évaluer à 0 les coefficients  $F_p$ ,  $G_p$ ,  $\mathfrak{G}_p$ ; mais l'égalité (30) ne doit plus avoir lieu identiquement, elle doit avoir lieu seulement en vertu de la condition (36 bis); il doit donc exister une grandeur  $P$  dépendant de l'état des deux corps 1 et 2, de leurs vitesses et des actions qui s'exercent sur eux, telle que l'on ait identiquement

$$(30 \text{ bis}) \quad d\mathfrak{E}_r - E \delta\Psi + d\mathfrak{E}_i + d\mathfrak{E}_w + d\mathfrak{E}_\psi - \Pi \delta n - P \delta p = 0.$$

Alors les coefficients  $G_r$ ,  $G_g$  peuvent être ramenés à ne dépendre que de l'état des corps 1 et 2, des valeurs  $r'$  et  $g'$  et des grandeurs  $\Pi$  et  $P$  :

$$(31 \text{ bis}) \quad \begin{cases} G_r = \mathfrak{G}'_r(\Pi, P, r', g'), \\ G_g = \mathfrak{G}'_g(\Pi, P, r', g'). \end{cases}$$

La première égalité (35) est remplacée non par l'égalité (35<sub>v</sub>), mais par l'égalité

$$(35_v) \quad \mathfrak{A} + J_p + P = 0.$$

La première égalité (35) est donc remplacée par les équations (35<sub>v</sub>) et (36), ce qui augmente encore d'une unité le nombre des équations du problème; mais l'introduction de la nouvelle action de liaison  $P$  augmente aussi d'une unité le nombre des inconnues. Cette manière nouvelle d'envisager l'introduction de la relation (36) ne conduit donc plus à une impossibilité, comme la précédente méthode.

Ce que nous venons de dire au sujet du pivotement peut se répéter au sujet du roulement et du glissement.

Habituellement, on fait, au sujet du frottement entre solides, des hypothèses plus restreintes que celles dont nous avons donné l'exposé; on suppose que



l'on a

$$(37) \quad \begin{cases} F_p = 0, & F_r = 0, & F_g = 0, \\ \mathfrak{G}_p = H_p \Pi, & \mathfrak{G}_r = H_r \Pi, & \mathfrak{G}_g = H_g \Pi, \end{cases}$$

les quantités  $H_p, H_r, H_g$  dépendant exclusivement de l'état des corps 1 et 2, mais point des vitesses  $p', r', g'$  de pivotement, de roulement et de glissement, ni de pression  $\Pi$ .



## CHAPITRE II.

### ÉTABLISSEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES.



#### § 1. — VISCOSITÉ ET FROTTEMENT A LA SURFACE DE CONTACT DE DEUX CORPS, DONT L'UN AU MOINS EST FLUIDE.

Au Chapitre précédent, nous avons supposé qu'il existait entre les corps 1 et 2 un nombre limité de liaisons dont chacune correspondait à un nombre également fini de conditions; nous avons été amenés alors à regarder les quantités  $d\mathfrak{E}_w, d\mathfrak{E}_\psi$  comme la somme d'autant de termes distincts qu'il y avait de liaisons indépendantes et nous avons étudié en détail la forme d'un de ces termes.

Nous allons aborder maintenant un cas un peu plus compliqué.

Supposons que deux corps 1 et 2, dont l'un au moins est fluide, soient assujettis à demeurer en contact tout le long d'une certaine surface S. Si  $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$  sont les composantes du déplacement virtuel d'un point du corps 1, tandis que  $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$  sont les composantes du déplacement virtuel d'un point du corps 2, nous devons avoir, à tout instant et en tout point de la surface S,

$$(38) \quad (\delta x_1 - \delta x_2) \cos(N, x) + (\delta y_1 - \delta y_2) \cos(N, y) + (\delta z_1 - \delta z_2) \cos(N, z) = 0,$$

N étant la normale à la surface S dirigée, par exemple, vers l'intérieur du corps 2.

La liaison imposée ici s'exprime non par un nombre limité de conditions, mais par une condition vérifiée en tous les points de la surface S, c'est-à-dire par une infinité d'équations; ou mieux, on peut dire que nous imposons aux corps 1 et 2 une infinité de liaisons bilatérales dont chacune se rapporte à un point de la surface S et s'exprime par la condition (38) qui se rapporte à ce point.

Nous sommes amenés ainsi à penser que le travail de viscosité et le travail de

frottement au contact des corps 1 et 2 peuvent se mettre sous la forme

$$(39) \quad d\mathcal{E}_w = \int d\tau_w dS, \quad d\mathcal{E}_\psi = \int d\tau_\psi dS,$$

$d\tau_w$ ,  $d\tau_\psi$  vérifiant des hypothèses analogues à celles que nous avons énoncées, au Chapitre précédent, pour  $d\mathcal{E}_w$ ,  $d\mathcal{E}_\psi$ .

Soient  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  les composantes de la vitesse en un point du corps 1 et  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $w_2$  les composantes de la vitesse en un point du corps 2. La condition (38) exige que l'on ait, à tout instant et en tout point de la surface S,

$$(40) \quad (u_1 - u_2) \cos(N, x) + (v_1 - v_2) \cos(N, y) + (w_1 - w_2) \cos(N, z) = 0.$$

La vitesse relative est donc tangente à la surface S; en chaque point M de la surface S et à chaque instant, nous désignerons par Mr la tangente à la surface S qui marque la direction de la vitesse relative, dont  $(u_1 - u_2)$ ,  $(v_1 - v_2)$ ,  $(w_1 - w_2)$  sont les composantes, et par  $r'$  cette vitesse relative, comptée positivement suivant Mr.

Soit Ms une ligne tangente en M à la surface S et perpendiculaire à Mr; par définition, nous aurons

$$(41) \quad (u_1 - u_2) \cos(s, x) + (v_1 - v_2) \cos(s, y) + (w_1 - w_2) \cos(s, z) = 0.$$

Considérons, pour les corps 1 et 2, un déplacement virtuel quelconque, soumis ou non à la condition (38); dans cette modification, le déplacement relatif des corps 1 et 2, au voisinage du point M, est déterminé si l'on connaît les trois quantités

$$(42) \quad \begin{cases} \delta N = (\delta x_1 - \delta x_2) \cos(N, x) + (\delta y_1 - \delta y_2) \cos(N, y) + (\delta z_1 - \delta z_2) \cos(N, z), \\ \delta r = (\delta x_1 - \delta x_2) \cos(r, x) + (\delta y_1 - \delta y_2) \cos(r, y) + (\delta z_1 - \delta z_2) \cos(r, z), \\ \delta s = (\delta x_1 - \delta x_2) \cos(s, x) + (\delta y_1 - \delta y_2) \cos(s, y) + (\delta z_1 - \delta z_2) \cos(s, z). \end{cases}$$

Si les corps 1 et 2 sont isotropes, nous admettrons que ces quantités  $\delta N$ ,  $\delta r$ ,  $\delta s$  sont les variations normales privilégiées dont dépendent  $d\tau_w$  et  $d\tau_\psi$ .

Dans le temps  $dt$  se produit une modification réelle pour laquelle on a

$$\delta N = N' dt, \quad \delta r = r' dt, \quad \delta s = s' dt.$$

Mais les égalités (40), (42), (41) donnent sans peine

$$N' = 0, \quad s' = 0.$$

Les quantités  $d\tau_w$ ,  $d\tau_\psi$  ne doivent donc renfermer ni terme en  $\delta N$ , ni terme en  $\delta s$ ,

en sorte que l'on aura

$$(43) \quad d\mathcal{E}_w = \int F \delta r dS,$$

$$(44) \quad d\mathcal{E}_\psi = \int G \frac{r'}{|r'|} \delta r dS.$$

Ces égalités vont se mettre sous une forme un peu différente.

$F$  dépend de l'état des corps 1 et 2 au voisinage du point  $M$  et de la vitesse  $r'$ ; nulle avec  $r'$ , cette quantité est toujours de signe contraire à  $r'$ ; on peut donc écrire

$$(45) \quad F = fr',$$

$f$  étant une fonction de  $r'$  et de l'état des corps 1 et 2 au voisinage du point  $M$ ; cette quantité est toujours négative :

$$(46) \quad f < 0.$$

D'autre part, la seconde égalité (42) donne

$$(47) \quad r' \delta r = (u_1 - u_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (v_1 - v_2)(\delta y_1 - \delta y_2) + (w_1 - w_2)(\delta z_1 - \delta z_2).$$

Les égalités (43), (45) et (47) donnent

$$(48) \quad d\mathcal{E}_w = \int f [(u_1 - u_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (v_1 - v_2)(\delta y_1 - \delta y_2) + (w_1 - w_2)(\delta z_1 - \delta z_2)] dS.$$

Si l'on observe que

$$(49) \quad |r'| = [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2]^{\frac{1}{2}},$$

les égalités (44) et (47) donnent

$$(50) \quad d\mathcal{E}_\psi = \int G \frac{[(u_1 - u_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (v_1 - v_2)(\delta y_1 - \delta y_2) + (w_1 - w_2)(\delta z_1 - \delta z_2)]}{[(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dS.$$

L'équation générale du mouvement du système peut désormais s'écrire sans difficulté.

La quantité  $-E \delta \Psi$  est la somme de deux termes; l'un est le travail virtuel des actions que le corps 2 exerce sur le corps 1, l'autre est le travail virtuel des actions que le corps 1 exerce sur le corps 2; si donc on désigne par  $d\mathcal{E}_{e1}$  le travail virtuel des actions que le corps 1 subit de la part des corps extérieurs, *y compris le corps 2*, par  $d\mathcal{E}_{e2}$  le travail virtuel des actions que le corps 2 subit de

la part des corps extérieurs,  $\gamma$  compris le corps 1, on pourra écrire

$$d\bar{\epsilon}_e - E \delta\Psi = d\bar{\epsilon}_{e1} + d\bar{\epsilon}_{e2}$$

et l'égalité (20) pourra s'écrire

$$(51) \quad \begin{aligned} & d\bar{\epsilon}_{e1} - E \delta_T \bar{f}_1 + d\bar{\epsilon}_{i1} + d\bar{\epsilon}_{v1} + d\bar{\epsilon}_{\varphi1} \\ & + d\bar{\epsilon}_{e2} - E \delta_T \bar{f}_2 + d\bar{\epsilon}_{i2} + d\bar{\epsilon}_{v2} + d\bar{\epsilon}_{\varphi2} \\ & + d\bar{\epsilon}_w + d\bar{\epsilon}_\psi = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité ne doit pas avoir lieu quelles que soient les modifications virtuelles imposées aux corps 1 et 2, mais seulement pour les modifications virtuelles qui respectent la condition de liaison (38). Dès lors, les principes du calcul des variations nous enseignent qu'il existe une quantité  $\varpi$ , variable d'une manière continue le long de la surface S, telle que l'égalité

$$(52) \quad \begin{aligned} & d\bar{\epsilon}_{e1} - E \delta_T \bar{f}_1 + d\bar{\epsilon}_{i1} + d\bar{\epsilon}_{v1} + d\bar{\epsilon}_{\varphi1} \\ & + d\bar{\epsilon}_{e2} - E \delta_T \bar{f}_2 + d\bar{\epsilon}_{i2} + d\bar{\epsilon}_{v2} + d\bar{\epsilon}_{\varphi2} \\ & + d\bar{\epsilon}_w + d\bar{\epsilon}_\psi \\ & - \int \varpi [(\delta x_1 - \delta x_2) \cos(N, x) + (\delta y_1 - \delta y_2) \cos(N, y) + (\delta z_1 - \delta z_2) \cos(N, z)] dS = 0 \end{aligned}$$

ait lieu quelle que soit la modification virtuelle imposée à chacun des corps 1 et 2.

En outre, la quantité G pourra s'exprimer en fonction de l'état des corps 1 et 2 au voisinage du point M auquel elle se rapporte, de  $r'$  et de  $\varpi$ .

Les corps 1 et 2 étant supposées isotropes, l'état de chacun d'eux en un point est déterminé lorsqu'on connaît sa densité et sa température en ce point. Soient  $\rho_1, \rho_2$  les densités des corps 1 et 2 au voisinage du point M; soit T leur commune température au voisinage de ce point; nous pourrons écrire

$$(53) \quad G = \mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, T, r', \varpi) < 0.$$

Nous aurons aussi

$$(46 \text{ bis}) \quad f = f(\rho_1, \rho_2, T, r') < 0.$$

## § 2. — CONDITIONS VÉRIFIÉES A LA SURFACE DE CONTACT DE DEUX FLUIDES.

Supposons que le corps 1 soit un corps fluide. Nous aurons alors, en conservant les hypothèses faites dans la première Partie de ces *Recherches*,

$$d\bar{\epsilon}_{\varphi1} = 0.$$

En outre,  $d\mathcal{E}_{v1}$  sera donné par ce que nous avons dit, en cette première Partie, sur la viscosité au sein des fluides.

Donnons d'abord au fluide 1 une modification virtuelle telle que  $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$  s'annulent tout le long de la surface S; laissons le corps 2 invariable. L'égalité (52) deviendra

$$d\mathcal{E}_{e1} - E \delta_T \mathcal{F}_1 + d\mathcal{E}_{i1} + d\mathcal{E}_{v1} = 0.$$

C'est l'équation (2) de la première Partie de ces *Recherches*. Elle entraîne comme conséquence l'existence, au sein du fluide 1, des équations de l'Hydrodynamique.

Celles-ci admises, on peut obtenir, par un calcul que nous avons déjà fait <sup>(1)</sup>, le résultat suivant :

Dans une modification virtuelle *absolument quelconque* du fluide 1, on a

$$\begin{aligned} (54) \quad d\mathcal{E}_{e1} - E \delta_T \mathcal{F}_1 + d\mathcal{E}_{i1} + d\mathcal{E}_{v1} \\ = \int \{ [\Pi_1 \cos(N, x) + p_{x1}] \delta x_1 + [\Pi_1 \cos(N, y) + p_{y1}] \delta y_1 \\ + [\Pi_1 \cos(N, z) + p_{z1}] \delta z_1 \} dS, \end{aligned}$$

$\Pi_1$  étant la pression à l'intérieur du fluide 1 et  $p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}$  étant, pour ce fluide, les composantes de la pression de viscosité, telles que les déterminent les égalités (48) et (51), en la première Partie de ces *Recherches*.

Supposons maintenant que le corps 2 soit, lui aussi, un fluide; en raisonnant comme nous venons de le faire, nous prouverons, en premier lieu, que les équations de l'Hydrodynamique doivent être vérifiées en tous les points de ce fluide; en second lieu, que l'on a, en toute modification virtuelle du fluide 2,

$$\begin{aligned} (54 \text{ bis}) \quad d\mathcal{E}_{e2} - E \delta_T \mathcal{F}_2 + d\mathcal{E}_{i2} + d\mathcal{E}_{v2} \\ = - \int \{ [\Pi_2 \cos(N, x) - p_{x2}] \delta x_2 + [\Pi_2 \cos(N, y) - p_{y2}] \delta y_2 \\ + [\Pi_2 \cos(N, z) - p_{z2}] \delta z_2 \} dS. \end{aligned}$$

Dès lors, en vertu des égalités (48), (50), (53), (54) et (54 bis), l'égalité (52)

<sup>(1)</sup> *Recherches sur l'Hydrodynamique*, II<sup>e</sup> Partie, Chapitre I, § 2.



A ces égalités il faut joindre la condition (40) qui peut s'écrire indifféremment sous l'une des deux formes

$$(40 \text{ bis}) \quad \begin{cases} (u_1 - u_2) \cos(n_1, x) + (v_1 - v_2) \cos(n_1, y) + (w_1 - w_2) \cos(n_1, z) = 0, \\ (u_2 - u_1) \cos(n_2, x) + (v_2 - v_1) \cos(n_2, y) + (w_2 - w_1) \cos(n_2, z) = 0. \end{cases}$$

De ces égalités tirons quelques conséquences.

Si nous remarquons que

$$\cos(n_1, x) + \cos(n_2, x) = 0,$$

$$\cos(n_1, y) + \cos(n_2, y) = 0,$$

$$\cos(n_1, z) + \cos(n_2, z) = 0$$

et si nous tenons compte des égalités (56), nous voyons que les égalités (57) donnent

$$(58) \quad \begin{cases} p_{x1} + p_{x2} = (\Pi_1 - \Pi_2) \cos(n_1, x), \\ p_{y1} + p_{y2} = (\Pi_1 - \Pi_2) \cos(n_1, y), \\ p_{z1} + p_{z2} = (\Pi_1 - \Pi_2) \cos(n_1, z). \end{cases}$$

*Le vecteur  $p_1$ , dont les composantes sont  $p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}$ , et le vecteur  $p_2$ , dont les composantes sont  $p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}$ , ont une résultante dirigée suivant la normale  $n_1$  et ayant pour grandeur  $(\Pi_1 - \Pi_2)$ ; le plan de ces deux vecteurs est donc normal à la surface  $S$ .*

Ce plan est facile à déterminer.

Multiplions respectivement les trois premières égalités (57) par  $\cos(s, x)$ ,  $\cos(s, y)$ ,  $\cos(s, z)$ ; ajoutons membre à membre les résultats obtenus; observons que l'on a

$$\cos(n_1, x) \cos(s, x) + \cos(n_1, y) \cos(s, y) + \cos(n_1, z) \cos(s, z) = 0$$

et

$$(u_1 - u_2) \cos(s, x) + (v_1 - v_2) \cos(s, y) + (w_1 - w_2) \cos(s, z) = 0.$$

Nous trouvons la première égalité

$$(59) \quad \begin{cases} p_{x1} \cos(s, x) + p_{y1} \cos(s, y) + p_{z1} \cos(s, z) = 0, \\ p_{x2} \cos(s, x) + p_{y2} \cos(s, y) + p_{z2} \cos(s, z) = 0. \end{cases}$$

La seconde se démontre d'une manière analogue.

*Le plan des deux vecteurs  $p_1, p_2$  est le plan normal à la surface  $S$ , mené par la vitesse relative  $v'$  dont  $(u_1 - u_2), (v_1 - v_2), (w_1 - w_2)$  sont les composantes.*

on trouve

en multipliant les premières égalités (57) par  $\cos(r, x)$ ,  $\cos(r, y)$  et ajoutons membre à membre en observant que

$$\cos(r, x) + \cos(n_1, z) \cos(r, z) = 0,$$

$$\cos(r, y) + (w_1 - w_2) \cos(r, z) = r'.$$

on a

$$p_{z1} \cos(r, z) = -\mathfrak{G}(r', \varpi) \frac{r'}{|r'|} - fr',$$

$$p_{z1} \cos(r, z) = \mathfrak{G}(r', \varpi) \frac{r'}{|r'|} + fr'.$$

On en conclut

de même. On voit en premier lieu, que les vecteurs  $p_1, p_2$  ont, sur les normales, des projections égales et directement opposées.

En multipliant les égalités (46) et (53), on voit que la projection du vecteur  $p_1$  est dirigée comme la vitesse relative  $r'$ , et que la projection du vecteur  $p_2$  est dirigée en sens contraire.

La fonction  $\mathfrak{G}$  qui figure dans l'expression de  $\mathfrak{G}$ , est facile à déterminer. Multiplions les égalités (57) par  $\cos(n_1, x)$ , la seconde par  $\cos(n_1, y)$ , la troisième par  $\cos(n_1, z)$ , et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. On trouve, d'après la première condition (40 bis); nous trouvons la première

égalité

$$\Pi_1 = p_{x1} \cos(n_1, x) + p_{y1} \cos(n_1, y) + p_{z1} \cos(n_1, z),$$

$$\Pi_2 = p_{x2} \cos(n_2, x) + p_{y2} \cos(n_2, y) + p_{z2} \cos(n_2, z).$$

On en conclut de même.

On voit qu'il suffit en retranchant de la pression  $\Pi_1$  la projection du vecteur  $p_1$  sur la normale  $n_1$ ; ou bien en retranchant de la pression  $\Pi_2$  la projection du vecteur  $p_2$  sur la normale  $n_2$ .

On a

$$p_{x1} = p_{x1} \cos(n_1, x) + p_{y1} \cos(n_1, y) + p_{z1} \cos(n_1, z)$$

la projection du vecteur  $p_1$  sur la normale  $n_1$  et

$$p_{x2} = p_{x2} \cos(n_2, x) + p_{y2} \cos(n_2, y) + p_{z2} \cos(n_2, z)$$

la projection du vecteur  $p_2$  sur la normale  $n_2$ . Les égalités (61) deviendront

$$\Pi_1 - \varpi = p_{n1}, \quad \Pi_2 - \varpi = p_{n2}$$

ou bien



et les égalités (57) pourront s'écrire :

$$(57 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{n1} \cos(n_1, x) - p_{x1} = \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) (u_1 - u_2), \\ p_{n1} \cos(n_1, y) - p_{y1} = \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) (v_1 - v_2), \\ p_{n1} \cos(n_1, z) - p_{z1} = \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) (w_1 - w_2), \\ p_{n2} \cos(n_2, x) - p_{x2} = \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) (u_2 - u_1), \\ p_{n2} \cos(n_2, y) - p_{y2} = \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) (v_2 - v_1), \\ p_{n2} \cos(n_2, z) - p_{z2} = \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) (w_2 - w_1). \end{array} \right.$$

Les auxiliaires  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\mathfrak{w}$  sont éliminées des conditions aux limites mises sous cette forme.

Tous ces théorèmes n'ont de sens qu'autant que la vitesse relative  $r'$  est différente de 0. Or il peut arriver que cette supposition implique contradiction; nous allons en donner un exemple.

La fonction  $\mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, T, r', \mathfrak{w})$ , qui est toujours négative, selon l'inégalité (53), peut dépendre de  $r'$ ; supposons, ce qui paraît conforme à tous les enseignements de l'expérience, qu'elle soit indépendante de  $r'$ , ou bien que sa valeur absolue croisse en même temps que la valeur absolue de  $r'$ ; si nous posons

$$\mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, T, 0, \mathfrak{w}) = \Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \mathfrak{w}),$$

nous aurons

$$(62) \quad \mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, T, r', \mathfrak{w}) \geq \Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \mathfrak{w}).$$

En vertu des inégalités (46 bis) et (53), le second membre de chacune des égalités (60) a une valeur absolue qui ne peut être inférieure à  $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \mathfrak{w})$ . Dès lors, les égalités (60) nous donnent la proposition suivante :

*Si la valeur absolue commune des projections des deux vecteurs  $p_1$ ,  $p_2$  sur la surface S est inférieure à  $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \mathfrak{w})$ , la vitesse relative  $r'$  des deux fluides le long de la surface S ne peut différer de 0; les deux fluides sont alors soudés le long de cette surface.*

*On est assuré, en particulier, que les deux fluides demeurent sans cesse soudés l'un à l'autre le long de leur surface de contact lorsqu'on suppose nulle la viscosité intrinsèque de chacun d'eux sans supposer nul le frottement au contact.*

Dans ce cas, en effet, les deux vecteurs  $p_1$ ,  $p_2$  sont identiquement nuls; leurs projections sur la surface S sont donc inférieures à  $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \varpi)$ .

*Il en est encore de même si l'on suppose nul le frottement, mais non la viscosité, au contact des deux fluides sans viscosité intrinsèque :*

$$\phi = 0, \quad f < 0.$$

Dans ce cas, en effet, si les deux fluides n'étaient pas soudés l'un à l'autre, on pourrait écrire les égalités (57) réduites à

$$(63) \quad \begin{cases} (\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, x) = f(u_1 - u_2), & (\Pi_2 - \varpi) \cos(n_2, x) = f(u_2 - u_1), \\ (\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, y) = f(v_1 - v_2), & (\Pi_2 - \varpi) \cos(n_2, y) = f(v_2 - v_1), \\ (\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, z) = f(w_1 - w_2), & (\Pi_2 - \varpi) \cos(n_2, z) = f(w_2 - w_1). \end{cases}$$

Multiplions respectivement les trois premières égalités (67) par  $\cos(r, x)$ ,  $\cos(r, y)$ ,  $\cos(r, z)$ , et ajoutons-les membre à membre; nous trouvons

$$fr' = 0 \quad \text{ou} \quad r' = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

*Donc, deux fluides sans viscosité intrinsèque sont forcément soudés l'un à l'autre le long de la surface de contact, à moins que la viscosité de contact et le frottement de contact ne soient nuls tous deux.*

Supposons maintenant que l'un des deux fluides, le fluide 1, soit dénué de viscosité intérieure, tandis que le fluide 2 est visqueux. Le vecteur  $p_1$  sera encore nul, tandis que le vecteur  $p_2$  sera, en général, différent de 0.

En répétant les raisonnements précédents, nous démontrerons encore les propositions suivantes :

*Si deux fluides, dont l'un n'a aucune viscosité intérieure, sont en contact, ils sont soudés le long de la surface de contact, à moins que la viscosité de contact et le frottement de contact ne soient nuls tous deux.*

Comment faut-il modifier les conditions aux limites dans le cas où le glissement des deux fluides l'un sur l'autre est une impossibilité?

En tout point de la surface d'adhérence des deux fluides, nous devons écrire  $r' = 0$ , ce qui, joint aux égalités (40 bis), équivaut à

$$(64) \quad u_2 - u_1 = 0, \quad v_2 - v_1 = 0, \quad w_2 - w_1 = 0.$$

Si nous ne regardions pas l'adhérence des deux fluides comme constituant une

nouvelle liaison qui entraîne, en même temps que les égalités (64), les conditions

$$(65) \quad \delta x_2 - \delta x_1 = 0, \quad \delta y_2 - \delta y_1 = 0, \quad \delta z_2 - \delta z_1 = 0,$$

nous devrions faire simplement

$$(66) \quad f = 0, \quad \Phi = 0,$$

sans apporter dans nos équations aucune autre modification.

Suivons les conséquences de cette manière de voir.

Si on l'adopte, on doit encore écrire les équations (57), mais à la condition de remplacer par 0 tous les seconds membres, ce qui donnera

$$(67) \quad \begin{cases} (\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, x) = p_{x1}, & (\Pi_2 - \varpi) \cos(n_2, x) = p_{x2}, \\ (\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, y) = p_{y1}, & (\Pi_2 - \varpi) \cos(n_2, y) = p_{y2}, \\ (\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, z) = p_{z1}, & (\Pi_2 - \varpi) \cos(n_2, z) = p_{z2}. \end{cases}$$

Soit  $d$  une direction quelconque tangente à la surface  $S$ ; multiplions respectivement les trois premières équations (67) par  $\cos(d, x)$ ,  $\cos(d, y)$ ,  $\cos(d, z)$ , et ajoutons-les membre à membre en observant que

$$\cos(n_1, x) \cos(d, x) + \cos(n_1, y) \cos(d, y) + \cos(n_1, z) \cos(d, z) = 0;$$

nous trouvons la première des égalités

$$(68) \quad \begin{cases} p_{x1} \cos(d, x) + p_{y1} \cos(d, y) + p_{z1} \cos(d, z) = 0, \\ p_{x2} \cos(d, x) + p_{y2} \cos(d, y) + p_{z2} \cos(d, z) = 0. \end{cases}$$

La seconde se démontre d'une manière analogue.

Ces deux égalités entraînent la conséquence suivante :

*Lorsque deux fluides sont soudés l'un à l'autre le long de la surface  $S$ , les deux vecteurs  $p_1$ ,  $p_2$  sont normaux en chaque point à la surface  $S$ .*

Soit  $p_1$  la valeur du premier vecteur, comptée positivement suivant la normale  $n_1$ ; soit  $p_2$  la valeur du second vecteur, comptée positivement selon la normale  $n_2$ ; nous aurons

$$\begin{aligned} p_{x1} \cos(n_1, x) + p_{y1} \cos(n_1, y) + p_{z1} \cos(n_1, z) &= p_1, \\ p_{x2} \cos(n_2, x) + p_{y2} \cos(n_2, y) + p_{z2} \cos(n_2, z) &= p_2. \end{aligned}$$

Ces égalités, jointes aux égalités (61), nous montrent que lorsque les deux fluides sont soudés l'un à l'autre le long de la surface  $S$ , on a les deux éga-

lités

$$(69) \quad \Pi_1 - \varpi = p, \quad \Pi_2 - \varpi = p_2,$$

d'où l'on tire la troisième égalité

$$(70) \quad \Pi_1 - \Pi_2 = p_1 - p_2.$$

Supposons maintenant, à l'imitation de ce qui a été dit au Chapitre I, § 2, qu'au lieu d'admettre, tout le long de la surface d'adhérence, les égalités (64) **sans admettre les conditions (65)**, nous regardions cette adhérence comme **constituant une nouvelle liaison** qui impose aux modifications virtuelles, en tout point de la surface d'adhérence, les conditions (65). Nous devons encore poser, dans nos formules,

$$(66) \quad f = 0, \quad \mathfrak{C} = 0.$$

Dès lors, l'égalité (51) devra avoir lieu, non plus pour toutes les modifications virtuelles qui respectent la condition (38), mais seulement pour toutes les modifications virtuelles qui respectent les trois conditions (65). Il devra **exister trois** fonctions  $\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$ , variables d'une manière continue le long de la surface de contact, telles que l'égalité

$$(52 \text{ bis}) \quad d\mathfrak{C}_{e1} = E \partial_T \mathfrak{F}_1 + d\mathfrak{C}_{i1} + d\mathfrak{C}_{v1} + d\mathfrak{C}_{\varphi1} \\ + d\mathfrak{C}_{e2} = E \partial_T \mathfrak{F}_2 + d\mathfrak{C}_{i2} + d\mathfrak{C}_{v2} + d\mathfrak{C}_{\varphi2} \\ - \int [\varpi_x (\partial x_1 - \partial x_2) + \varpi_y (\partial y_1 - \partial y_2) + \varpi_z (\partial z_1 - \partial z_2)] dS = 0$$

ait lieu quelle que soit la modification virtuelle imposée aux corps 1 et 2.

Nous n'avons pas fait figurer dans cette égalité les quantités  $d\mathfrak{C}_w$  et  $d\mathfrak{C}_\psi$ , qui sont nulles en vertu des égalités (66).

La substitution de l'égalité (52 bis) à l'égalité (52) transforme l'égalité (55) en

$$(55 \text{ bis}) \quad \int_1 \left[ \Pi_1 \cos(N, x) - \varpi_x + p_{x1} \right] \partial x_1 + [\Pi_1 \cos(N, y) - \varpi_y + p_{y1}] \partial y_1 \\ + [\Pi_1 \cos(N, z) - \varpi_z + p_{z1}] \partial z_1 \\ - [\Pi_2 \cos(N, x) - \varpi_x + p_{x2}] \partial x_2 - [\Pi_2 \cos(N, y) - \varpi_y + p_{y2}] \partial y_2 \\ - [\Pi_2 \cos(N, z) - \varpi_z + p_{z2}] \partial z_2 \} dS = 0.$$

Cette égalité entraîne, en tout point de la surface d'adhérence, les égalités

$$(71) \quad \begin{cases} \Pi_1 \cos(n_1, x) + \varpi_x = p_{x1}, & \Pi_2 \cos(n_2, x) - \varpi_x = p_{x2}, \\ \Pi_1 \cos(n_1, y) + \varpi_y = p_{y1}, & \Pi_2 \cos(n_2, y) - \varpi_y = p_{y2}, \\ \Pi_1 \cos(n_1, z) + \varpi_z = p_{z1}, & \Pi_2 \cos(n_2, z) - \varpi_z = p_{z2}. \end{cases}$$

Ces égalités (71) ont encore pour conséquence les relations (58) et le théorème qui les traduit.

On voit en outre que si l'on désigne par  $t$  une direction quelconque tangente à la surface d'adhérence, on tire des égalités (71) les égalités

$$\begin{aligned}
 (72) \quad & p_{x1} \cos(t, x) + p_{y1} \cos(t, y) + p_{z1} \cos(t, z) \\
 & = -p_{x2} \cos(t, x) - p_{y2} \cos(t, y) - p_{z2} \cos(t, z) \\
 & = \varpi_x \cos(t, x) + \varpi_y \cos(t, y) + \varpi_z \cos(t, z).
 \end{aligned}$$

*Le vecteur  $(p_{x1}, p_{y1}, p_{z1})$  et le vecteur  $(p_{x2}, p_{y2}, p_{z2})$  ont encore, sur la surface de contact des deux fluides, des projections égales et directement opposées.*

### § 3. — CONDITIONS VÉRIFIÉES À LA SURFACE DE CONTACT D'UN SOLIDE ET D'UN FLUIDE.

Nous imaginerons maintenant que le corps 1 continue à être un fluide, mais que le corps 2 soit un solide invariable et isotrope.

Le déplacement virtuel le plus général de ce solide consistera en trois rotations  $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$  autour des axes  $Ox, Oy, Oz$ , et en trois translations  $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$  suivant ces trois axes. Les composantes  $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$  du déplacement virtuel le plus général d'un point  $x_2, y_2, z_2$  de ce solide seront

$$(73) \quad \begin{cases} \delta x_2 = \delta\xi - z_2 \delta\mu + y_2 \delta\nu, \\ \delta y_2 = \delta\eta - x_2 \delta\nu + z_2 \delta\lambda, \\ \delta z_2 = \delta\zeta - y_2 \delta\lambda + x_2 \delta\mu. \end{cases}$$

Les composantes de la vitesse du même point seront

$$(74) \quad \begin{cases} u_2 = \xi' - z_2 \mu' + y_2 \nu', \\ v_2 = \eta' - x_2 \nu' + z_2 \lambda', \\ w_2 = \zeta' - y_2 \lambda' + x_2 \mu'. \end{cases}$$

Par des calculs connus, on mettra  $d\mathcal{E}_{e2}$  et  $d\mathcal{E}_{i2}$  sous les formes

$$(75) \quad d\mathcal{E}_{e2} = X \delta\xi + Y \delta\eta + Z \delta\zeta + L \delta\lambda + M \delta\mu + N \delta\nu,$$

$$(76) \quad d\mathcal{E}_{i2} = J_x \delta\xi + J_y \delta\eta + J_z \delta\zeta + J_l \delta\lambda + J_m \delta\mu + J_n \delta\nu,$$

tandis que, le corps considéré étant un solide invariable, l'on aura

$$(77) \quad \delta_T \mathcal{E}_2 = 0, \quad d\mathcal{E}_{v2} = 0, \quad d\mathcal{E}_{\varphi2} = 0.$$

Ces valeurs (75), (76), (77) devront être reportées dans l'égalité (52).

En raisonnant comme nous l'avons fait au paragraphe précédent pour obtenir l'égalité (54), nous trouverons que l'on a, en une modification quelconque du fluide,

$$(78) \quad d\tilde{e}_{e1} = E \delta_T \tilde{x}_1 + d\tilde{e}_{i1} + d\tilde{e}_{v1} = - \int_S [\Pi_1 \cos(n_1, x) - p_{x1}] \delta x_1 \\ + [\Pi_1 \cos(n_1, y) - p_{y1}] \delta y_1 \\ + [\Pi_1 \cos(n_1, z) - p_{z1}] \delta z_1 \delta S,$$

$S$  étant la surface de contact du solide et du fluide et  $n_1$  étant, en chaque point de cette surface, la demi-normale dirigée vers l'intérieur du fluide.

En vertu des égalités (73), (75), (76), (77), (78), (18), (50) et (53), l'égalité (52) pourra s'écrire

$$\int_S \left[ \varpi - \Pi_1 \cos(n_1, x) - p_{x1} - f(u_1 - u_2) + \epsilon \frac{u_1 - u_2}{r} \right] \delta x_1 \\ - \left[ \varpi - \Pi_1 \cos(n_1, y) - p_{y1} - f(v_1 - v_2) + \epsilon \frac{v_1 - v_2}{r} \right] \delta y_1 \\ - \left[ \varpi - \Pi_1 \cos(n_1, z) - p_{z1} - f(w_1 - w_2) + \epsilon \frac{w_1 - w_2}{r} \right] \delta z_1 \delta S \\ - [X - J_x - \int (f(u_2 - u_1) + \epsilon \frac{u_2 - u_1}{r} - \varpi \cos(n_1, x))] dS \delta \tilde{x} \\ - [Y - J_y - \int (f(v_2 - v_1) + \epsilon \frac{v_2 - v_1}{r} - \varpi \cos(n_1, y))] dS \delta \tilde{y} \\ - [Z - J_z - \int (f(w_2 - w_1) + \epsilon \frac{w_2 - w_1}{r} - \varpi \cos(n_1, z))] dS \delta \tilde{z} \\ - [L - J_L - \int (f - \frac{\epsilon}{r}) (u_2 - u_1, y_2 - v_2 - v_1, z_2) - \varpi [y_2 \cos(n_1, z) - z_2 \cos(n_1, y)]] dS \delta \tilde{L} \\ - [M - J_M - \int (f - \frac{\epsilon}{r}) (u_2 - u_1, z_2 - w_2 - w_1, x_2) - \varpi [z_2 \cos(n_1, x) - x_2 \cos(n_1, z)]] dS \delta \tilde{M} \\ - [N - J_N - \int (f - \frac{\epsilon}{r}) (v_2 - v_1, x_2 - u_2 - u_1, y_2) - \varpi [x_2 \cos(n_1, y) - y_2 \cos(n_1, x)]] dS \delta \tilde{N}$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient  $\delta \tilde{x}$ ,  $\delta \tilde{y}$ ,  $\delta \tilde{z}$ ,  $\delta \tilde{L}$ ,  $\delta \tilde{M}$ ,  $\delta \tilde{N}$  et, en outre, quels que soient, aux divers points de la surface  $S$ ,  $\delta x_1$ ,  $\delta y_1$ ,  $\delta z_1$ . On a donc

1° En tout point de la surface S, les trois égalités

$$(80) \quad \begin{cases} (\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, x) - p_{x1} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right) (u_1 - u_2), \\ (\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, y) - p_{y1} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right) (v_1 - v_2), \\ (\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, z) - p_{z1} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right) (w_1 - w_2), \end{cases}$$

identiques aux trois premières égalités (57);

2° Les six égalités

$$(81) \quad \begin{cases} X + J_x + \int \left[ f(u_2 - u_1) + \frac{\mathfrak{G}(u_2 - u_1)}{|r'|} - \varpi \cos(n_1, x) \right] dS = 0, \\ \dots\dots\dots \\ L + J_l - \int \left\{ \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right) [(w_2 - w_1)y_2 - (v_2 - v_1)z_2] - \varpi [\gamma_2 \cos(n_1, z) - z_2 \cos(n_1, \gamma)] \right\} dS = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

qui peuvent encore s'écrire, en vertu des égalités (80),

$$(82) \quad \begin{cases} X + J_x - \int [\Pi_1 \cos(n_1, x) - p_{x1}] dS = 0, \\ Y + J_y - \int [\Pi_1 \cos(n_1, y) - p_{y1}] dS = 0, \\ Z + J_z - \int [\Pi_1 \cos(n_1, z) - p_{z1}] dS = 0, \\ L + J_l + \int \{ \Pi_1 [\gamma_2 \cos(n_1, z) - z_2 \cos(n_1, \gamma)] - (\gamma_2 p_{z1} - z_2 p_{y1}) \} dS = 0, \\ M + J_m + \int \{ \Pi_1 [z_2 \cos(n_1, x) - x_2 \cos(n_1, z)] - (z_2 p_{x1} - x_2 p_{z1}) \} dS = 0, \\ N + J_n + \int \{ \Pi_1 [x_2 \cos(n_1, y) - y_2 \cos(n_1, x)] - (x_2 p_{y1} - y_2 p_{x1}) \} dS = 0. \end{cases}$$

Ces dernières équations feraient connaître le mouvement du corps solide si l'on connaissait  $\Pi_1$ ,  $p_{x1}$ ,  $p_{y1}$ ,  $p_{z1}$ .

Les équations (80) peuvent être traitées comme les trois premières équations (57); elles nous enseignent que l'on a, en tout point de la surface S,

$$(83) \quad \varpi = \Pi_1 - p_{x1} \cos(n_1, x) - p_{y1} \cos(n_1, y) - p_{z1} \cos(n_1, z).$$

Elles nous montrent, en outre, que la projection du vecteur  $p_1$  sur la surface S coïncide avec la direction  $r$  de la vitesse relative  $r'$ . Cette projection

est donnée par l'égalité

$$(81) \quad p_{x1} \cos(r, x) + p_{y1} \cos(r, y) + p_{z1} \cos(r, z) = - \left( f + \frac{\phi}{|r'|} \right) r'.$$

Tout ce que nous venons de dire suppose que le solide et le fluide ne sont pas soudés le long de leur surface de contact.

Dans le cas où ils seraient soudés en une région de leur surface de contact *et où cette soudure ne serait pas regardée comme une liaison nouvelle* <sup>(1)</sup>, on aurait, en tout point de cette région,

$$u_1 - u_2 = 0, \quad v_1 - v_2 = 0, \quad w_1 - w_2 = 0, \quad \phi = 0, \quad f = 0.$$

On devrait donc, pour tout point de cette région, remplacer par 0 le second membre des égalités (80) et, dans les égalités (81), restreindre les intégrales aux parties de la surface de contact qui ne sont pas des soudures.

*Les égalités (82) resteront vraies, même si le solide et le fluide sont soudés tout le long de la surface de contact ou le long d'une partie de cette surface. Mais, en tout point de la surface S où les deux corps sont soudés l'un à l'autre, le vecteur  $p_1$  est normal à la surface S; si l'on désigne par  $p_1$  sa valeur comptée positivement dans le sens de la normale  $n_1$ , on a, en un tel point,*

$$(83) \quad \pi = \Pi_1 - p_1.$$

Ce que nous venons de dire cesse d'être exact *si l'on regarde la condition imposée au fluide d'adhérer au solide comme constituant une nouvelle liaison* <sup>(2)</sup>. Dans ce cas, on doit avoir, en tout point de la surface d'adhérence, non seulement les égalités

$$(64) \quad u_2 - u_1 = 0, \quad v_2 - v_1 = 0, \quad w_2 - w_1 = 0,$$

mais encore les conditions, imposées à tout déplacement virtuel,

$$(65) \quad \delta x_2 - \delta x_1 = 0, \quad \delta y_2 - \delta y_1 = 0, \quad \delta z_2 - \delta z_1 = 0.$$

Dès lors, il ne suffit plus de poser, dans nos équations,

$$f = 0, \quad \phi = 0.$$

<sup>(1)</sup> *Sur les conditions aux limites en Hydrodynamique* (Comptes rendus, t. CXXXIV, p. 149; 20 janvier 1902).

<sup>(2)</sup> *Sur l'extension du théorème de Lagrange aux liquides visqueux* (Comptes rendus, t. CXXXIV, p. 580; 10 mars 1902).



Il faut encore remplacer l'égalité (52) par l'égalité (52 bis). L'égalité (79) est alors remplacée par l'égalité

$$\begin{aligned}
 (86) \quad & \int \{ [\varpi_x + \Pi_1 \cos(n_1, x) - p_{x1}] \delta x_1 + [\varpi_y - \Pi_1 \cos(n_1, y) + p_{y1}] \delta y_1 \\
 & \quad + [\varpi_z - \Pi_1 \cos(n_1, z) + p_{z1}] \delta z_1 \} dS \\
 & - \left[ X + J_x + \int \varpi_x dS \right] \delta \xi - \left[ Y + J_y + \int \varpi_y dS \right] \delta \eta - \left[ Z + J_z + \int \varpi_z dS \right] \delta \zeta \\
 & - \left[ L + J_l + \int (\varpi_y z_1 - \varpi_z y_1) dS \right] \delta \lambda - \left[ M + J_m + \int (\varpi_z x_1 - \varpi_x z_1) dS \right] \delta \mu \\
 & - \left[ N + J_n + \int (\varpi_x y_1 - \varpi_y x_1) dS \right] \delta \nu = 0.
 \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient  $\delta \xi, \delta \eta, \delta \zeta, \delta \lambda, \delta \mu, \delta \nu$  et, en outre, quels que soient  $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$  aux divers points de la surface S.

On a donc :

1° En tout point de la surface S, les trois égalités

$$(87) \quad \begin{cases} \Pi_1 \cos(n_1, x) + \varpi_x = p_{x1}, \\ \Pi_1 \cos(n_1, y) + \varpi_y = p_{y1}, \\ \Pi_1 \cos(n_1, z) + \varpi_z = p_{z1}, \end{cases}$$

identiques aux premières égalités (71);

2° Les égalités

$$(88) \quad \left\{ \begin{aligned} X + J_x + \int \varpi_x dS &= 0, & Y + J_y + \int \varpi_y dS &= 0, & Z + J_z + \int \varpi_z dS &= 0, \\ L + J_l + \int (\varpi_y z_1 - \varpi_z y_1) dS &= 0, \\ M + J_m + \int (\varpi_z x_1 - \varpi_x z_1) dS &= 0, \\ N + J_n + \int (\varpi_x y_1 - \varpi_y x_1) dS &= 0. \end{aligned} \right.$$

Cette seconde manière de voir est celle que les considérations développées au Chapitre I, § 2, nous présentent comme vraisemblable. Nous verrons qu'elle s'impose.





---

# LES GROUPES D'ORDRE $16p$ ,

$p$  ÉTANT UN NOMBRE PREMIER IMPAIR,

PAR M. R. LE VAVASSEUR,

à Toulouse.

---

J'ai divisé la discussion en trois Parties. Dans la première Partie (A), je suppose que le groupe cherché admet un sous-groupe d'ordre  $p$ , conjugué de lui-même; I étant ce sous-groupe, G le groupe cherché, je prends pour  $\frac{G}{I}$  successivement les 14 groupes connus d'ordre 16 (n<sup>os</sup> 2, 3, ..., 15). J'ai ainsi 25 groupes. Pour savoir s'ils sont distincts, j'énumère dans chacun d'eux le nombre d'opérations d'ordre donné (n<sup>os</sup> 16, 17, ..., 40).

Dans la deuxième Partie (B), j'arrive au cas où il n'y a pas dans le groupe cherché de sous-groupe d'ordre  $p$  conjugué de lui-même, mais où il y a un sous-groupe d'ordre 16, conjugué de lui-même (n<sup>os</sup> 41, 42, ..., 56).

Dans la troisième Partie (C), j'envisage le cas où le groupe cherché d'ordre  $16p$  n'admet ni sous-groupe d'ordre  $p$  conjugué de lui-même, ni sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même (n<sup>os</sup> 57, 58, ..., 67).

A la fin est un Tableau résumant les résultats obtenus.

1. Le groupe cherché a au moins un sous-groupe d'ordre  $p$ .

L'égalité

$$16p = pm(1 + hp) \quad (1)$$

donne

$$16 = m(hp + 1).$$

Donc, pour  $p > 7$ , le groupe admet un sous-groupe d'ordre  $p$  conjugué de lui-même.

Pour  $p = 7$ , on peut supposer  $h = 1$ ,  $m = 2$ .

Pour  $p = 5$ ,               »                $h = 3$ ,  $m = 1$ .

Pour  $p = 3$ ,               »                $h = 1$ ,  $m = 4$  ou  $h = 5$ ,  $m = 1$ .

---

(1) Voir § 21, p. 18 de mon Mémoire sur l'Énumération des groupes d'opérations, édité chez Hermann, 8, rue de la Sorbonne, ou chez Privat (Toulouse).

2. A). Nous supposons d'abord que le groupe admet un sous-groupe d'ordre  $p$  conjugué de lui-même.

1. Ce sous-groupe  $\Gamma$  étant d'ordre  $p$ ,  $\frac{G}{\Gamma}$  est du type  $G_{16}$  (1). On a

$$a^{16} = b^p = 1, \quad ba = ab^x \quad \text{avec} \quad x^{16} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Si  $x = 1$ , on a

$$G_{16p} = G_{16} G_p.$$

Si  $x$  appartient à l'exposant 2, le groupe sera désigné par  $G_{16p}^1$ ,

»	4,	»	$G_{16p}^2$ ,
»	8,	»	$G_{16p}^3$ ,
»	16,	»	$G_{16p}^4$ .

3. II.  $\frac{G}{\Gamma}$  est du type  $G_8 G_2$  :

$$(a'^8 = b'^2 = 1, a' b' = b' a').$$

On a

$$a^8 = b^2 = 1, \quad ab = ba, \quad c^p = 1,$$

puis

$$\begin{aligned} ca &= ac^x, & x^8 &\equiv 1 \pmod{p}, \\ cb &= bc^\beta, & \beta^2 &\equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

(1).  $x = \beta = 1$  donne

$$G_8 G_2 G_p = G_{8p} G_2 = G_{2p} G_8.$$

(2). Soit  $\beta = 1$ ,  $x \neq 1$ .

Si  $x$  appartient à l'exposant 2 (mod  $p$ ), on a  $G_{8p}^1 G_2$   $\left. \begin{array}{l} \text{»} \quad 4 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad G_{8p}^2 G_2 \\ \text{»} \quad 8 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad G_{8p}^3 G_2 \end{array} \right\} (2).$

(3). Soit  $x = 1$ ,  $\beta = -1$ , on a  $G_{2p}^1 G_8$ .

(4). Soit  $\beta = -1$ ,  $x \neq 1$ .

Si  $x = -1$ ,  $ca = ac^{-1}$ ,  $cb = bc^{-1}$ ,  $cab = ac^{-1}b = abc$ .

On peut poser  $ab = a'$ .

On retrouvera  $G_{2p}^1 G_8$ .

Si  $x$  appartient à l'exposant 4 (mod  $p$ ) on a le groupe  $G_{16p}^5$  :

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba, \quad ca = ac^x, \quad cb = bc^{-1}$$

[ $x$  appartient à l'exposant 4 (mod  $p$ )].

(1) Loc. cit., Chap. VI.

(2) Loc. cit., Chap. VIII.

Si  $\alpha$  appartient à l'exposant  $8 \pmod{p}$ ,  $\alpha^4$  appartient à l'exposant  $2 \pmod{p}$  :

$$ca^4 = a^4 c^{-1}, \quad cb = bc^{-1}, \quad ca^4 b = a^4 bc.$$

Posons  $a^4 b = b'$ , on retrouve  $G_{8p}^3 G_2$ .

4. III.  $\frac{G}{I}$  est du type  $(G_4)^2$  :

$$(a^4 = b^4 = 1, a' b' = b' a').$$

On a

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \quad ab = ba, \quad ca = ac^2, \quad cb = bc^3,$$

avec

$$\alpha^4 \equiv \beta^4 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1).  $\alpha = \beta = 1$  donne

$$(G_4)^2 G_p = G_{4p} G_4.$$

(2).  $\alpha = 1, \beta \neq 1$  donne

$$G_{4p}^1 G_4 \text{ et } G_{4p}^2 G_4 \quad (1).$$

(3).  $\alpha = -1, \beta \neq 1$ .

Soit  $ca = ac^{-1}, cb = bc^{-1}$ , alors  $cab = abc$ .

Posons  $ab = b'$ , on retrouve  $G_{4p}^1 G_4$ .

Si  $\beta$  appartient à l'exposant  $4 \pmod{p}$

$$ca = ac^{-1}, \quad cb^4 = b^4 c^{-1};$$

donc

$$cab^4 = ab^4 c.$$

Posons  $ab^4 = a'$ , on retrouve  $G_{4p}^2 G_4$ .

(4).  $\alpha$  et  $\beta$  appartiennent tous deux à l'exposant  $4 \pmod{p}$ .

Alors  $\alpha$  et  $\beta$  sont racines de la congruence  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ .

Si l'on suppose  $\alpha = \beta$ , on a

$$ca^4 = a^4 c^{\alpha^2}, \quad cb = bc^{\alpha}, \quad ca^4 b = a^4 c^{\alpha^2} b = a^4 bc.$$

Posons  $a^4 b = b'$ , on retrouve  $G_{4p}^2 G_4$ .

Si  $\alpha$  est différent de  $\beta$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha\beta &\equiv 1 \pmod{p}, \\ ca &= ac^{\alpha}, \quad cb = bc^{\beta}, \quad cab = ac^{\alpha} b = abc^{\alpha\beta} = abc. \end{aligned}$$

On retrouve encore  $G_{4p}^2 G_4$ .

(1) *Loc. cit.*, Chap. V.

*Fac. de T.*, 2<sup>e</sup> S., V.

3. IV.  $\frac{G}{I} = G_4(G_2)^2 :$

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ab = ba, \quad ac = ca, \quad bc = cb,$$

$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^4 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1).  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , on a

$$G_4(G_2)^2 G_p = G_{4,p}(G_2)^2 = G_{2,p} G_4 G_2.$$

(2).  $\beta = \gamma = 1$ ,  $\alpha \neq 1$ , on a

$$G_{4,p}^1(G_2)^2, \quad G_{4,p}^2(G_2)^2.$$

(3).  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\gamma = -1$  donne

$$G_{4,p}^1 G_4 G_2.$$

(4).  $\beta = \gamma = -1$ ,  $db = bd^{-1}$ ,  $dc = cd^{-1}$ ; donc

$$dbc = bcd.$$

On pourra donc toujours supposer  $\beta = 1$ .

(5).  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -1$ ,  $\alpha \neq 1$ .

Si  $\alpha = -1$ ,  $da = ad^{-1}$ ,  $dc = cd^{-1}$ ,  $dac = acd$ .

Posant  $ac = a'$ , on retrouve  $G_{2,p}^1 G_4 G_2$ .

Si  $\alpha$  appartient à l'exposant 4 ( $\text{mod } p$ ),  $a^2 c$  est permutable avec  $d$ .

On pourra prendre  $a^2 c = c'$  à la place de  $c$  comme opération génératrice.

On trouve  $G_{4,p}^2(G_2)^2$ .

6. V.  $\frac{G}{I} = (G_2)^4 :$

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^p = 1,$$

$$ab = ba, \quad ac = ca, \quad ad = da,$$

$$bc = cb, \quad bd = db, \quad cd = dc,$$

$$ea = ae^\alpha, \quad eb = be^\beta, \quad ec = ce^\gamma, \quad ed = de^\delta, \quad \alpha^2 \equiv \beta^2 \equiv \gamma^2 \equiv \delta^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

En transformant  $e$  par toutes les opérations du groupe d'ordre 16, on trouve, comme exposants de l'opération transformée :

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta, \beta\gamma\delta, \gamma\delta\alpha, \delta\alpha\beta, \alpha\beta\gamma, \alpha\beta\gamma\delta.$$

Si  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ , tous ces exposants sont égaux à 1.

Si  $\delta = -1$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , on trouve

$$1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, -1.$$

Si  $\gamma = \delta = -1$ ,  $\alpha = \beta = 1$ , on trouve

$$1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1.$$

Si  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \gamma = \delta = -1$ , on trouve

$$1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1.$$

Si  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = -1$ , on trouve

$$-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1.$$

On n'obtient donc que les deux groupes suivants :

$$(G_1)^4 G_p = G_{2p} (G_1)^3 \quad \text{et} \quad G_{2p}^1 (G_1)^3.$$

7. VI.  $\frac{G}{I} = G_8^1 G_2^{(1)}$ . On a

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad bc = cb,$$

$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \pmod{p};$$

mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \quad dba^3 = ba^3 d^{\alpha\beta}.$$

Donc, puisque  $ab = ba^3$ , on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1).  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  donne  $G_8^1 G_2 G_p = G_8^1 G_{2p}^{(1)}$ .

(2).  $\alpha = -1$ ,  $\beta = \gamma = 1$  donne  $G_{8p}^1 G_2^{(2)}$ .

(3).  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = 1$  donne  $G_{8p}^5 G_2^{(2)}$ .

(4).  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\gamma = -1$  donne  $G_8^1 G_{2p}^1$ .

(1) *Loc. cit.*, Chap. IV.

(2) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

(5).  $\alpha = 1, \beta = \gamma = -1, dbc = bcd$ . Posons  $bc = b'$ ; on trouve

$$\begin{aligned} a^2 = b'^2 = c^2 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb', \\ da = ad, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}. \end{aligned}$$

On retombe sur  $G_8^1 G_{2p}^1$ .

(6).  $\beta = 1, \gamma = \alpha = -1; dac = acd$ . Posons  $ac = a'$ ; il vient

$$\begin{aligned} a'^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \quad a'b = ba'^3, \quad a'c = ca', \quad bc = cb, \\ da' = a'd, \quad db = bd, \quad dc = cd^{-1}. \end{aligned}$$

On retrouve  $G_8^1 G_{2p}^1$ .

(7).  $\gamma = 1, \alpha = \beta = -1, dab = abd$ . Posons  $ab = b'$ ; on a

$$\begin{aligned} a^2 = b'^2 = c^2 = d^2 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb', \\ da = ad^{-1}, \quad db' = b'd, \quad dc = cd. \end{aligned}$$

On retrouve  $G_{8p}^4 G_2$  [voir (2), même numéro].

(8).  $\alpha = \beta = \gamma = -1$ . Posons  $ab = b'$ ; on a

$$\begin{aligned} a^2 = b'^2 = c^2 = d^2 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb', \\ da = ad^{-1}, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}. \end{aligned}$$

On retrouve  $G_8^1 G_{2p}^1$  [voir (6)].

8. VII.  $\frac{G}{\Gamma} = G_8^2 G_2$  :

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \quad a^2 = b^2, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad bc = cb,$$

$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \quad dba^3 = ba^3 = d^{\alpha^2\beta}.$$

Comme  $ab = ba^3$ , on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

$a^2$  est permutable avec  $d$ , donc aussi  $b^2 = a^2$ ; et par suite on a

$$\beta^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

On peut toujours supposer  $\alpha = 1$ , car si l'on a  $\alpha = -1, \beta = 1$ , on peut permuter  $a$  et  $b$  (on a  $ba = ab^3$ ).



Si  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -1$ ,  $dab = abd$ ; on peut poser  $ab = a'$ , car  $a'b = ba'^3$ .

(1).  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  donne  $G_8^2 G_2 G_p = G_8^2 G_{2p}$ .

(2).  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $\beta = -1$  donne  $G_{8p}^6 G_2$  <sup>(1)</sup>.

(3).  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\gamma = -1$  donne  $G_8^2 G_{2p}'$ .

(4).  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \gamma = -1$ ,  $dbc = bcd$ .

Posons  $bc = b'$ ; on a

$$\begin{aligned} a^4 = b'^4 = c^4 = d^4 = 1, \quad \alpha^2 = b'^2, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb', \\ ad = da, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}. \end{aligned}$$

On retrouve  $G_8^2 G_{2p}'$ .

9. VIII.  $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}'$  :

On a  $a^8 = b^8 = 1$ ,  $ab = ba^5$  <sup>(2)</sup>.

On a

$$a^8 = b^8 = c^p = 1, \quad ab = ba^5;$$

puis

$$\begin{aligned} ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod{p}, \\ cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Mais, d'une part

$$cab = abc^{\alpha\beta},$$

d'autre part

$$cba^5 = ba^5 c^{\alpha\beta},$$

d'où l'on déduit

$$\alpha^4 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1).  $\alpha = \beta = 1$  donne  $G_{16}' G_p$ .

(2).  $\beta = 1$ ,  $\alpha \neq 1$ , on a

$$a^8 = b^8 = c^p = 1, \quad ab = ba^5, \quad ca = ac^\alpha, \quad cb = bc.$$

Si  $\alpha$  appartient à l'exposant 2  $\pmod{p}$ , on aura le groupe  $G_{16p}^6$ .

» 4 »  $G_{16p}^7$ .

(3).  $\alpha = +1$ ,  $\beta = -1$ .

$$a^8 = b^8 = c^p = 1, \quad ab = ba^5, \quad ca = ac, \quad cb = bc^{-1}$$

définissent  $G_{16p}^8$ .

(4).  $\beta = -1$ ,  $\alpha \neq 1$ .

(1) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

(2) *Loc. cit.*, Chap. VI.

Si  $\alpha = -1$ , on a

$$ca = ac^{-1}, \quad cb = bc^{-1} \quad \text{donc} \quad cab = abc.$$

On pourra poser  $ab = a'$ ; alors, comme  $ab = ba^3$ ,  $a'^2 = a^6$ ,  $a'^4 = 1$ ,

$$a' b = ab^2 = ba^4 b, \quad a'^3 = a^4, \quad a'^5 = a^5 b \quad \text{donc} \quad a' b = ba'^3.$$

On retrouve  $G_{16p}^4$ .

Les formules

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^2, \quad cb = bc^{-1},$$

où  $\alpha$  appartient à l'exposant 4 (mod  $p$ ), définissent  $G_{16p}^4$ .

Je rappelle, pour la clarté de ce qui précède, le Tableau suivant des opérations de  $G_{16}^4$  (1).

8	$a$	$a\alpha$		$ab$		$ab\alpha$
4	$\alpha$	$\alpha^3$		$\alpha^3$	$b\alpha$	$\alpha$
2	$\alpha^2$	$\alpha^2$	$b$	$\alpha^2$	$\alpha^2$	$\alpha^2$

10. IX.  $\frac{G}{I} = G_{16}^4$  :

$$a^2 = b^2 = c^4 = 1, \quad ab = bac^2, \quad ac = ca, \quad bc = cb,$$

4			$\alpha$	$a\alpha$	$b\alpha$	$ab$	
2	$a$	$b$	$\alpha^2$	$\alpha^2$	$\alpha^2$	$\alpha^2$	$ab\alpha$

( $c = \alpha$ ) (2)

On a :

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2,$$

$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^4 \equiv 1 \pmod{p}$$

Mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \quad dbac^2 = bac^2 d^{\alpha\beta\gamma} \quad \text{donc} \quad \gamma = \pm 1.$$

(1).  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  donne  $G_{16}^4$   $G_p$ .

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(2) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(2).  $\alpha = \beta = 1, \gamma = -1$  donne  $G_{16p}^{10}$  :

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, & \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2, \\ da = ad, & \quad db = bd, \quad dc = cd^{-1}. \end{aligned}$$

(3).  $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$  donne  $G_{16p}^{11}$  :

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, & \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2, \\ da = ad, & \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd. \end{aligned}$$

(4).  $\alpha = -1, \beta = \gamma = 1$  redonne  $G_{16p}^{11}$ . Il suffit, pour le voir, de permuter  $a$  et  $b$ , dans les équations précédentes.

(5).  $\alpha = 1, \beta = \gamma = -1$ ;  $da = ad, db = bd^{-1}, dc = cd^{-1}, dabc = abcd$ . Soit  $abc = b'$ ; on a

$$\begin{aligned} a^2 = b'^2 = c^2 = 1, & \quad ac = ca, \quad b'c = cb', \\ ab' = a^2bc = bca. a = bac. a = abc. ac^2 = b'ac^2, \\ da = ad, & \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}. \end{aligned}$$

On retrouve  $G_{16p}^{10}$ .

(6).  $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -1$  redonne  $G_{16p}^{10}$ .

(7).  $\alpha = \beta = -1, \gamma = 1$  :  $abc = a'$  est d'ordre 2. On a

$$\begin{aligned} a'^2 = b^2 = c^2 = 1, & \quad a'b = abcb = ab^2c = bac^2bc = babc^2 = ba'c^2, \\ a'c = ca', & \quad bc = cb. \end{aligned}$$

D'ailleurs, si  $da = ad^{-1}, db = bd^{-1}, dc = cd$ , on en conclut

$$da' = a'd.$$

On retrouve  $G_{16p}^{11}$ .

(8).  $\alpha = \beta = \gamma = -1$ ; alors

$$dabc = abcd^{-1}.$$

Le groupe  $G_{16p}^{12}$  a, pour équations de définition,

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, & \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2, \\ da = ad^{-1}, & \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd^{-1}. \end{aligned}$$

11. X.  $\frac{G}{F} = G_{16}^2$  (1) :

$$a^4 = b^4 = 1, \quad ab = ba^3 \quad \text{ou bien} \quad a^2 = \alpha, \quad b^2 = \beta, \quad \alpha^2 = \beta^2 = 1, \quad ab = ba\alpha.$$

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

Rappelons le Tableau des opérations de  $G_{16}^2$  :

4	a	b	ab
2	$\alpha$	$\beta$	$\alpha\beta$

On a

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^2, \quad cb = bc^3,$$

avec

$$\alpha^4 \equiv \beta^4 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais  $ab = ba^3$ , or

$$cab = abc^2\beta, \quad cba^3 = ba^3c^2\beta;$$

Donc on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1).  $\alpha = \beta = 1$  donne  $G_{16}^2$   $G_p$ .

(2).  $\beta = 1, \alpha = -1$  :

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc$$

définissent le groupe  $G_{16,p}^{13}$ .

(3). Soit  $\alpha = 1, \beta \neq 1$  :

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad cb = bc^3.$$

Si  $\beta = -1$ , on a le groupe  $G_{16,p}^{14}$ .

Si  $\beta$  appartient à l'exposant 4 (mod  $p$ ), on a le groupe  $G_{16,p}^{15}$ .

(4). Soit enfin  $\alpha = -1, \beta \neq 1$ .

Si  $\beta = -1, ca = ac^{-1}, cb = bc^{-1}$ , donc

$$cab = abc.$$

Posons  $ab = b'$ , d'où  $b'^2 = b^2$ , donc

$$a^4 = b'^4 = c^p = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb' = b'c.$$

On retrouve  $G_{16,p}^{13}$ .

Si  $\beta$  appartient à l'exposant 4 (mod  $p$ ), on a

$$ca = ac^{-1}, \quad cb^2 = b^2c^{-1}, \quad \text{donc} \quad cab^2 = ab^2c.$$

Posons  $ab^2 = a', a'^2 = a^2$ .

Donc

$$a'^4 = b'^4 = 1 = c^p, \quad a'b = ab^3 = b^3a^3 = b(ab^2)^3 = ba'^3, \quad ca' = a'c, \quad cb = bc^3.$$

On retrouve  $G_{16,p}^{13}$ .

12. XI.  $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}^3$  (1):

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac.$$

Rappelons le Tableau des opérations :

$$(a^2 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = \beta^2 = 1, \quad ab = ba\beta),$$

$$\begin{array}{c} \text{Ordre 4} \\ \hline \begin{array}{c|c|c|c} a & & ab & \\ \hline \alpha & b & \alpha\beta & \beta \end{array} \end{array}$$

On a

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$

$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^4 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais, tout d'abord,

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \quad dbac = bacd^{\alpha\beta\gamma}.$$

Comme  $ab = bac$ , j'en conclus

$$\gamma \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1).  $\alpha = \beta = 1$  donne  $G_{16}^3$ ,  $G_p$ .

(2).  $\beta = 1$ ,  $\alpha \neq 1$ . On a, comme équations de définition,

$$\begin{aligned} a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac, \\ da = ad^\alpha, \quad db = bd, \quad dc = cd. \end{aligned}$$

Si  $\alpha = -1$ , ces équations définissent  $G_{16p}^{16}$ .

Si  $\alpha$  appartient à l'exposant 4  $\pmod{p}$ , ces équations définissent  $G_{16p}^{17}$ .

(3). Soit  $\beta = -1$ ,  $\alpha = 1$ , on a le groupe  $G_{16p}^{18}$ , défini par les équations

$$\begin{aligned} a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac, \\ da = ad, \quad db = bd^{-1}, \quad cd = dc. \end{aligned}$$

(4). Soit  $\alpha \neq 1$ ,  $\beta = -1$ .

Si  $\alpha = -1$ ,  $da = ad^{-1}$ ,  $db = bd^{-1}$ , donc

$$dab = abd.$$

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

*Fac. de T.*, 2<sup>e</sup> S., V.

Posons  $ab = a'$ , on a

$$a'^4 = b^4 = c^4 = 1, \quad a'c = ca', \quad bc = cb, \quad a'b = ab^4 = bacb = babc = ba'c.$$

On retrouve  $G_{16p}^{18}$ .

Si  $\alpha$  appartient à l'exposant 4 :

$$da^2 = a^2 d^{-1}, \quad db = bd^{-1}, \quad da^2 b = a^2 bd.$$

Posant  $a^2 b = b'$ , on retrouve  $G_{16p}^{18}$ .

13. XII.  $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}^5$  (1) :

$$a^4 = \alpha, \quad b^4 = \alpha, \quad \alpha^2 = 1, \quad ab = ba^3 \alpha.$$

Tableau des opérations.

8	$a$	$a^2$				
4	$a^2$	$a^3 \alpha$	$b$	$ab$	$a^2 b$	$a^3 b$
2	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$

On a

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b^2, \quad ab = ba^7,$$

$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^4 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \quad cba^7 = ba^7 c^{\alpha^7\beta}.$$

Donc on a

$$\alpha^8 \equiv 1 \pmod{p}, \quad \alpha = \pm 1.$$

J'en conclus

$$ca^4 = a^4 c,$$

donc

$$cb^2 = b^2 c,$$

donc

$$\beta = \pm 1.$$

(1). Si  $\alpha = \beta = 1$ , on a le groupe  $G_{16}^5 G_p$ .

(2). Si  $\alpha = 1, \beta = -1$ , on trouve  $G_{16p}^{19}$ , dont les équations de définition sont

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b^2, \quad ab = ba^7, \quad ac = ca, \quad cb = bc^{-1}.$$

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(3). Si  $\alpha = -1$ ,  $\beta = +1$ , on trouve  $G_{16p}^{20}$ .

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b^2, \quad ab = ba^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad bc = cb.$$

(4). Si  $\alpha = \beta = -1$ ,  $ca = ac^{-1}$ ,  $cb = bc^{-1}$ , donc

$$cab = abc.$$

Posons  $ab = b'$ ; on a

$$a^8 = b'^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b'^2, \quad ab' = b'a^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad b'c = cb'.$$

Donc on retrouve  $G_{16p}^{20}$ .

14. XIII.  $\frac{G}{I} = G_{16}^6$  (1):

$$a^4 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = 1, \quad ab = ba^3.$$

Tableau des opérations.

8	$a$	$a^2$				
4	$a^2$	$a^2\alpha$		$ab$		$a^3b$
2	$\alpha$	$\alpha$	$b$	$\alpha$	$a^3b$	$\alpha$

On a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3,$$

$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \quad cba^3 = ba^3c^{\alpha^2\beta};$$

donc

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1).  $\alpha = \beta = 1$  donne  $G_{16}^6 G_p$ .

(2).  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ . Les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad cb = bc^{-1}$$

définissent  $G_{16p}^{21}$ .

(3).  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$ . Le groupe  $G_{16p}^{22}$  est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc.$$

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(4).  $\alpha = \beta = -1$ ,  $G_{16p}^{23}$  est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc^{-1}.$$

15. XIV.  $\frac{G}{F} = G_{16}^7 (1)$ :

$$a^4 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = 1, \quad ab = ba^3 \alpha.$$

Voici le Tableau des opérations

8	$a$	$a^3$				
4	$a^2$	$a^2 \alpha$				
2	$\alpha$	$\alpha$	$b$	$ab$	$a^3 b$	$a^3 b$

On a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^7,$$

$$ca = ac^2 \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$cb = bc^3 \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais

$$cab = abc^{2\beta}, \quad cba^7 = ba^7 c^{2\beta},$$

d'où, puisque  $ab = ba^7$ ,

$$\alpha^6 \equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{donc} \quad \alpha = \pm 1.$$

(1).  $\alpha = \beta = 1$  donne  $G_{16p}^7 G_p$ .

(2).  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$  donne le groupe  $G_{16p}^{24}$ , défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^{-1}, \quad ca = ac, \quad cb = bc^{-1}.$$

(3).  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$  donne le groupe  $G_{16p}^{25}$ , défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^{-1}, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc.$$

(4).  $\alpha = \beta = -1$ ,  $ca = ac^{-1}$ ,  $cb = bc^{-1}$ ,  $cab = abc$ .

Or posons  $ab = b'$ .

On a

$$a^8 = b'^2 = 1, \quad ab' = b' a^7.$$

On retrouve  $G_{16p}^{25}$ .

16. Il reste maintenant à chercher si les 25 groupes  $G_{16p}^\lambda$  trouvés ( $\lambda = 1, 2, \dots, 25$ )

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.



sont bien distincts. Pour cela, énumérons dans chacun d'eux le nombre d'opérations d'ordre donné.

Soit d'abord  $G_{16p}^1$  :

$$a^{16} = b^p = 1, \quad ab^{-1} = ba,$$

$a^2$  est une opération d'ordre 8, conjuguée d'elle-même dans le groupe total.

On a

$$b^{-\mu}a = ab^{\mu}, \quad \text{donc} \quad (ab^{\mu})^2 = a^2,$$

pour toute valeur de  $\mu$ .

$a^{2\lambda+1}b^{\mu}$ , quel que soit  $\mu$ , est d'ordre 16.

On a donc  $8p$  opérations d'ordre 16.

$a^2b^{\mu}$ ,  $a^4b^{\mu}$ ,  $a^{10}b^{\mu}$ ,  $a^{14}b^{\mu}$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) sont d'ordre  $8p$ .

Cela fait  $4(p-1)$  opérations d'ordre  $8p$ .

$a^4b^{\mu}$ ,  $a^{12}b^{\mu}$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) sont d'ordre  $4p$ , d'où  $2(p-1)$  opérations d'ordre  $4p$ .

$a^8b^{\mu}$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) est d'ordre  $2p$ , d'où  $(p-1)$  opérations d'ordre  $2p$ .

$b^{\mu}$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) est d'ordre  $p$ , d'où  $(p-1)$  opérations d'ordre  $p$ .

$a^2$ ,  $a^6$ ,  $a^{10}$ ,  $a^{14}$  donnent 4 opérations d'ordre 8.

$a^4$ ,  $a^{12}$  donnent 2 opérations d'ordre 4.

$a^8$  est d'ordre 2.

Ainsi,  $G_{16p}^1$  a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4(p-1)$	»	$8p$ ,
$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$p-1$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
4	»	8,
2	»	4,
1	opération d'ordre	2.

17.  $G_{16p}^2$  est défini par les équations

$$a^{16} = b^p = 1, \quad ba = ab^{\alpha},$$

où  $\alpha$  appartient à l'exposant 4 (mod  $p$ );  $p-1$  doit être divisible par 4; *exemples* :  $p = 5, 13, 17, \dots$

On a

$$b^{\alpha'}a = ab \quad \text{avec} \quad \alpha'\alpha \equiv 1 \pmod{p}.$$

$\alpha'$  est différent de 1

$$\begin{aligned} ab^\mu &= b^{\alpha'\mu} a, \\ (ab^\mu)^2 &= b^{\alpha'\mu} a^2 b^\mu = a^2 b^{\mu(1-\alpha')}, \\ (ab^\mu)^4 &= a^2 b^{\mu(1-\alpha')} a^2 b^{\mu(1-\alpha')} = a^4. \end{aligned}$$

Donc  $ab^\mu$  est d'ordre 16, quel que soit  $\mu$ .

De même

$$(a^2 b^\mu)^2 = a^4.$$

$a^2 b^\mu$  est d'ordre 8, quel que soit  $\mu$ .

Ainsi,  $a^{2\lambda+1} b^\mu$ , quel que soit  $\mu$ , est d'ordre 16;

$a^{2(2\lambda+1)} b^\mu$ , quel que soit  $\mu$ , est d'ordre 8.

$a^{4(2\lambda+1)} b^\mu$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) est d'ordre  $4p$ .

$a^8 b^\mu$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) est d'ordre  $2p$ .

$b^\mu$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) est d'ordre  $p$ .

$a^{4(2\lambda+1)}$  est d'ordre 4,  $a^8$  d'ordre 2.

$G_{16p}^2$  a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$p-1$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
2	»	4,
1	opération d'ordre	2.

18.  $G_{16p}^3$  est défini par les équations

$$a^{16} = b^p = 1, \quad ba = ab^\alpha,$$

où  $\alpha$  appartient à l'exposant  $8 \pmod{p}$ ;  $p-1$  est divisible par 8; *exemples* :  
 $p = 17, 41, \dots$

Alors on a

$$b^{\alpha'} a = ab, \quad \alpha' \alpha \equiv 1 \pmod{p}, \quad b^{\alpha'\mu} a = ab^\mu, \quad (ab^\mu)^2 = b^{\alpha'\mu} a^2 b^\mu.$$

Mais

$$b^{\alpha'^2\mu} a^2 = a^2 b^\mu.$$

Donc

$$\begin{aligned} (ab^\mu)^2 &= b^{(\alpha'+\alpha')\mu} a^2 = a^2 b^{\alpha^2\mu(\alpha'+\alpha')} = a^2 b^{\mu(\alpha+1)} \\ (ab^\mu)^4 &= b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu} a^4 b^{\mu(\alpha+1)} = b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu-(\alpha+1)\mu} a^4 = a^4 b^{-(\alpha'+\alpha'^2)\mu+(\alpha+1)\mu}. \end{aligned}$$

Enfin

$$(ab^\mu)^8 = a^8.$$

Donc,  $a^{2\lambda+1}b^\mu$ , quel que soit  $\mu$ , est d'ordre 16;

$a^{2(2\lambda+1)}b^\mu$ , quel que soit  $\mu$ , est d'ordre 8;

$a^{4(2\lambda+1)}b^\mu$ , quel que soit  $\mu$ , est d'ordre 4.

$a^8b^\mu$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) est d'ordre  $2p$ .

$b^\mu$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) est d'ordre  $p$ , et  $a^8$  d'ordre 2.

$G_{16p}^3$  a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2p$	»	4,
$p-1$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
1	opération d'ordre	2.

19.  $G_{16p}^1$ ,  $a^{16} = b^p = 1$ ,  $ba = ab^a$ ,  $a$  appartient à l'exposant 16 (mod  $p$ ),  $p-1$  sera divisible par 16; *exemples* :  $p = 17, 97, \dots$

$$\begin{aligned} b^\lambda a^\mu &= a^\mu b^{\lambda a^\mu}, \\ (b^\lambda a^\mu)^2 &= b^\lambda a^{2\mu} b^{\lambda a^{2\mu}} = a^{2\mu} b^{\lambda(a^\mu + a^{2\mu})}, \\ (b^\lambda a^\mu)^p &= a^{p\mu} b^{\lambda(a^\mu + a^{2\mu} + \dots + a^{p\mu})} = a^{p\mu} b^{\lambda a^\mu \frac{a^{p\mu} - 1}{a^\mu - 1}}. \end{aligned}$$

Si  $a$  appartient à l'exposant 16 (mod  $p$ ), pourvu que  $\mu$  ne soit pas égal à 16,  $a^\mu - 1$  sera différent de zéro.

Donc, on aura

$$(b^\lambda a^\mu)^{16} = 1.$$

Donc,  $a^{2\lambda+1}b^\mu$ , quel que soit  $\mu$ , est d'ordre 16;

$a^{2(2\lambda+1)}b^\mu$ , quel que soit  $\mu$ , est d'ordre 8;

$a^{4(2\lambda+1)}b^\mu$ , quel que soit  $\mu$ , est d'ordre 4;

$a^8b^\mu$ , quel que soit  $\mu$ , est d'ordre 2.

$b^\mu$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) est d'ordre  $p$ .

$G_{16p}^1$  a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2p$	»	4,
$p$	»	2,
$p-1$	»	$p$ .

20.  $G_{16p}^5$  est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba, \quad ca = ac^a, \quad cb = bc^{-1},$$

où  $\alpha$  appartient à l'exposant 4 (mod  $p$ )

$$\begin{aligned} c^\lambda a^\mu b^\nu &= a^\mu c^\lambda \alpha^\mu b^\nu = a^\mu b^\nu c^{(-1)^\nu \lambda \alpha^\mu}, \\ (c^\lambda a^\mu b^\nu)^\alpha &= c^\lambda a^{2\mu} b^{2\nu} c^{(-1)^\nu \lambda \alpha^\mu} = a^{2\mu} b^{2\nu} c^{(-1)^\nu \lambda \alpha^\mu + (-1)^{2\nu} \lambda \alpha^{2\mu}}, \\ (c^\lambda a^\mu b^\nu)^\rho &= a^{2\mu} b^{2\nu} c^{(-1)^\nu \lambda \alpha^\mu + (-1)^{2\nu} \lambda \alpha^{2\mu} + \dots + (-1)^\nu \lambda \alpha^{\rho\mu}}. \end{aligned}$$

$\nu$  ne peut prendre que deux valeurs.

1° Soit  $\nu = 0$  :

$$(c^\lambda a^\mu)^\rho = a^{\rho\mu} c^{\frac{\lambda \alpha^\mu \alpha^{\rho\mu} - 1}{\alpha^\mu - 1}}.$$

Si  $\mu$  n'est pas multiple de 4,  $\alpha^\mu - 1$  est différent de zéro.

Donc, on a

$$(c^\lambda a^\mu)^\mu = a^{4\mu}, \quad \mu \not\equiv 0 \pmod{4}.$$

2° Soit  $\nu = 1$  :

$$(c^\lambda a^\mu b)^\rho = a^{\rho\mu} b^\rho c^{-\lambda[\alpha^\mu - \alpha^{2\mu} + \dots + (-1)^\rho \alpha^{\rho\mu}]} = a^{\rho\mu} b^\rho c^{\frac{\lambda \alpha^\mu (-1)^{\rho+1} \alpha^{\rho\mu} - 1}{\alpha^\mu + 1}}.$$

Soit  $\rho = 2\rho'$  :

$$(c^\lambda a^\mu b)^{2\rho'} = a^{2\rho'\mu} c^{-\frac{\lambda \alpha^\mu (1 + \alpha^{2\rho'})}{1 + \alpha^\mu}}.$$

$\alpha$  appartient à l'exposant 4 (mod  $p$ ). Donc, si  $\mu$  est impair,  $1 + \alpha^\mu$  est différent de zéro,  $1 + \alpha^{2\mu}$  est nul, puisque  $\alpha^2 = -1$ .

Donc,

$$(c^\lambda a^{2\mu+1} b)^{2\rho} = a^{2\rho(2\mu+1)},$$

$\alpha^4$  est une opération conjuguée d'elle-même.

Revenons à la formule

$$(c^\lambda a^{2\mu} b)^\rho = a^{2\mu\rho} b^\rho c^{-\lambda \alpha^{2\mu} + \lambda \alpha^{4\mu} - \dots + (-1)^\rho \lambda \alpha^{\rho\mu}}.$$

Soit  $\rho = 2\rho'$  :

$$(c^\lambda a^{2\mu} b)^{2\rho'} = a^{4\mu\rho'} c^{-\lambda[(-1)^\mu - (-1)^{2\mu} + \dots - (-1)^{2\mu\rho'}]}.$$

Si  $\mu = 2\mu' + 1$ , l'exposant de  $c$  sera

$$-\lambda(-1 - 1 - \dots - 1) = +2\lambda\rho',$$

donc

$$(c^\lambda a^{2(2\mu'+1)} b)^{2\rho} = a^{4\rho(2\mu'+1)} c^{2\lambda\rho}$$

et, par suite,

$$(c^\lambda a^{2(2\mu'+1)} b)^4 = c^{4\lambda}.$$

Si donc  $\lambda$  est premier avec  $p$ ,  $c^\lambda a^{2(2\mu'+1)} b$  est d'ordre  $4p$ .

Si  $\mu$  est pair,

$$\mu = 2\mu', \quad (c^\lambda a^{\mu'} b)^{2p} = 1,$$

$c^\lambda a^{\mu'} b$  est d'ordre 2.

En résumé :

Cela donne

$c^\lambda a^{2\mu+1} b$	( $\lambda$ premier avec $p$ )	est d'ordre 8	$4(p-1)$ opérations.
$c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b$	»	$4p$	$2(p-1)$ »
$c^\lambda a^{\mu} b$	»	2	$2(p-1)$ »
$c^\lambda a^{2\mu+1}$	»	8	$4(p-1)$ »
$c^\lambda a^{2(2\mu+1)}$	»	4	$2(p-1)$ »
$c^\lambda a^{\mu}$	»	$2p$	$(p-1)$ »
$c^\lambda$	»	$p$	$(p-1)$ »
$a^{2\mu+1} b^\nu, \nu = 1, 2$	»	8	8 »
$a^{2(2\mu+1)} b^\nu, \nu = 1, 2$	»	4	4 »
$a^{\mu} b^\nu, \mu, \nu = 1, 2$ (sauf $\mu = \nu = 2$ )	»	2	3 »

Donc  $G_{16p}^5$  contient

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$p-1$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$8p$	»	8,
$2p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

21.  $G_{16p}^6$  est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc.$$

Rappelons le Tableau des opérations de  $G_{16}^1$  :

8	$a$	$a\alpha$		$ab$		$ab\alpha$
4	$\alpha$	$\alpha^3$		$\alpha^3$	$b\alpha$	$\alpha$
2	$\alpha^2$	$\alpha^2$	$b$	$\alpha^2$	$\alpha^2$	$\alpha^2$

Le groupe  $\{a, b\}$  contient donc

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

Puisque  $cb = bc$ ,  $bc^\lambda = c^\lambda b$ .

$bc^\lambda$  ( $\lambda$  premier avec  $p$ ) sera d'ordre  $2p$ ; cela donne  $(p-1)$  opérations d'ordre  $2p$ .

$c^\lambda$  ( $\lambda$  premier avec  $p$ ) sera d'ordre  $p$ ; d'où  $p-1$  opérations d'ordre  $p$ .

$$ca = ac^{-1}, \quad \text{donc} \quad c^{-1}a = ac, \quad (ac)^2 = a^2.$$

Donc  $a^{2\lambda+1}c^\mu$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) sera d'ordre 8.

Cela donne  $4(p-1)$  opérations d'ordre 8.

$$cab = abc^{-1}, \quad (cab)^2 = ca^3c^{-1} = a^3.$$

Donc  $a^{2\lambda+1}bc^\mu$  ( $\mu$  premier avec  $p$ ) est d'ordre 8; d'où  $4(p-1)$  opérations d'ordre 8.

$\alpha$  est une opération conjuguée d'elle-même.

Donc  $\alpha^{2\lambda+1}b^\mu c^\lambda$  ( $\lambda$  premier avec  $p$ ) est d'ordre  $4p$ ; de là  $4(p-1)$  opérations d'ordre  $4p$ .

$\alpha^2 b^\mu c^\lambda$  ( $\lambda$  premier avec  $p$ ) est d'ordre  $2p$ ; de là  $2(p-1)$  opérations d'ordre  $2p$ .

$G_{1,6,p}^6$  a donc :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$3(p-1)$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$8p$	»	8,
4	»	4,
3	»	2,

22.  $G_{1,6,p}^7$  est défini par les équations

$$a^3 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^2, \quad ca = ac^2, \quad cb = bc,$$

où  $\alpha$  appartient à l'exposant 4 (mod  $p$ ).

On a toujours, pour le groupe  $\langle a, b \rangle$ ,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

$bc^\lambda$  ( $\lambda$  premier avec  $p$ ) sera d'ordre  $2p$ ; d'où  $p-1$  opérations d'ordre  $2p$ ,

$c^\lambda$  ( $\lambda$  premier avec  $p$ ) sera d'ordre  $p$ , d'où  $p - 1$  opérations d'ordre  $p$ .

$$c^\lambda a^\mu = a^\mu c^{\lambda a^\mu}, \quad (c^\lambda a^\mu)^2 = c^\lambda a^{2\mu} c^{\lambda a^{2\mu}} = a^{2\mu} c^{\lambda(a^\mu + a^{2\mu})},$$

$$(c^\lambda a^\mu)^p = a^{p\mu} c^{\lambda(a^\mu + a^{2\mu} + \dots + a^{p\mu})} = a^{p\mu} c^{\lambda a^\mu \frac{a^{p\mu} - 1}{a^\mu - 1}}.$$

Si  $\mu$  est incongru à zéro (mod 4),  $a^\mu - 1$  sera différent de zéro.

Donc

$$(c^\lambda a^{2\mu+1})^4 = a^4;$$

$a^{2\mu+1} c^\lambda$  est d'ordre 8; d'où  $4(p - 1)$  opérations d'ordre 8.

$$(c^\lambda a^{2(2\mu+1)})^2 = a^4;$$

$a^{2(2\mu+1)} c^\lambda$  est d'ordre 4; d'où  $2(p - 1)$  opérations d'ordre 4.

$a^4 c^\lambda$  est d'ordre  $2p$ ; d'où  $(p - 1)$  opérations d'ordre  $2p$ .

$$c^\lambda a^\mu b = a^\mu c^{\lambda a^\mu} b = a^\mu b c^{\lambda a^\mu},$$

$$(c^\lambda a^\mu b)^2 = c^\lambda a^{2\mu} c^{\lambda a^{2\mu}} = a^{2\mu} c^{\lambda(a^\mu + a^{2\mu})} = c^{-\lambda(a^\mu + a^{2\mu})} a^{2\mu},$$

$$(c^\lambda a^\mu b)^4 = a^{4\mu}.$$

$c^\lambda a^{2\mu+1} b$  est donc d'ordre 8, ce qui donne  $4(p - 1)$  opérations d'ordre 8,

$c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b$  est donc d'ordre 4, ce qui donne  $2(p - 1)$  opérations d'ordre 4,

$c^\lambda a^4 b$  est donc d'ordre  $2p$ , ce qui donne  $p - 1$  opérations d'ordre  $2p$ .

$G_{16p}^7$  a donc :

$3(p - 1)$  opérations d'ordre  $2p$ ,

$p - 1$  »  $p$ ,

$8p$  »  $8$ ,

$4p$  »  $4$ ,

$3$  »  $2$ .

23.  $G_{16p}^8$  a pour équations de définition

$$a^2 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^2, \quad ca = ac, \quad cb = bc^{-1}.$$

On a toujours, pour le groupe  $\{a, b\}$ ,

$8$  opérations d'ordre  $8$ ,

$4$  »  $4$ ,

$3$  »  $2$ .

$c^{-\lambda} b = bc^\lambda$ ,  $(bc^\lambda)^2 = 1$ ; d'où  $p - 1$  opérations d'ordre  $2$ .

$c^\lambda$  donne  $(p-1)$  opérations d'ordre  $p$ .

$a^\mu bc^\lambda = c^{-\lambda} a^\mu b$ ,  $(a^\mu bc^\lambda)^2 = (a^\mu b)^2$ , quel que soit  $\lambda$ .

Donc

$a^{2\mu+1} bc^\lambda$	est d'ordre	8;	d'où	$4(p-1)$	opérations d'ordre	8,
$a^{2(2\mu+1)} bc^\lambda$	»	4;	»	$2(p-1)$	»	4,
$a^4 bc^\lambda$	»	2;	»	$(p-1)$	»	2,
$a^{2\mu+1} c^\lambda$	»	$8p$ ;	»	$4(p-1)$	»	$8p$ ,
$a^{2(2\mu+1)} c^\lambda$	»	$4p$ ;	»	$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$a^4 c^\lambda$	»	$2p$ ;	»	$(p-1)$	»	$2p$ .

$G_{10p}^8$  possède :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$ ,
$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$p-1$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$4p+4$	»	8,
$2p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

24.  $G_{10p}^9$  est défini par les équations

$$a^3 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^2, \quad ca = ac^2, \quad cb = bc^{-1},$$

$x$  appartient à l'exposant 4 (mod  $p$ ).

On a toujours, pour le groupe  $\langle a, b \rangle$ ,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

$c^{-\lambda} b = bc^\lambda$ ,  $(bc^\lambda)^2 = 1$ ; d'où  $p-1$  opérations d'ordre 2.

$c^\lambda$  donne  $p-1$  opérations d'ordre  $p$ .

$a^{2\mu+1} c^\lambda$	est d'ordre 8 (voir n° 22),	d'où	$4(p-1)$ opérations d'ordre	8,
$a^{2(2\mu+1)} c^\lambda$	» 4	»	$2(p-1)$ »	4,
$a^4 c^\lambda$	» $2p$ ,	»	$(p-1)$ »	$2p$ ,

$$a^\mu bc^\lambda = a^\mu c^{-\lambda} b, \quad c^{-x} a = ac, \quad c^{2\lambda} a = ac^{-\lambda}, \quad c^{2^x \lambda} a^\mu = a^\mu c^{-\lambda},$$

$$a^\mu bc^\lambda = c^{2^x \lambda} a^\mu b, \quad (a^\mu bc^\lambda)^2 = c^{2^x \lambda} (a^\mu b)^2 c^\lambda = c^{2^x \lambda} a^{6\mu} c^\lambda = c^{\lambda(2^x - 1)} a^{6\mu} = a^{6\mu} c^{\lambda(1 - 2^x)}$$



et

$$(a^\mu bc^\lambda)^4 = a^{4\mu}.$$

$(a^{2\mu+1} bc^\lambda)^4 = a^4$ ; c'est une opération d'ordre 8; d'où  $4(p-1)$  opérations d'ordre 8.

$(a^{2(2\mu+1)} bc^\lambda)^4 = 1$ ; d'où  $2(p-1)$  opérations d'ordre 4.

$a^4 bc^\lambda$  est d'ordre 2; d'où  $p-1$  opérations d'ordre 2.

$G_{16p}^{10}$  a :

$p-1$	opérations d'ordre	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$8p$	»	$8$ ,
$4p$	»	$4$ ,
$2p+1$	»	$2$ .

23.  $G_{16p}^{10}$  est défini par les équations

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2, \\ da = ad, \quad db = bd, \quad dc = cd^{-1}. \end{aligned}$$

Le groupe des opérations  $\{a, b, c\}$  a pour Tableau :

$$\frac{4}{2} \parallel \frac{\quad}{a} \mid \frac{\quad}{b} \mid \frac{c}{c^3} \mid \frac{ac}{c^2} \mid \frac{ab}{c^2} \mid \frac{\quad}{abc} \parallel$$

$\{a, b, c\}$  donne donc

	8	opérations d'ordre	4,
	7	»	2,
$d^\lambda$ donne	$(p-1)$	»	$p$ ,
$ad^\lambda$ donne	$(p-1)$	»	$2p$ ,
$bd^\lambda$ donne	$(p-1)$	»	$2p$ .

$(dc)^2 = c^2$ ,  $dc$  est d'ordre 4.

$c^3 d^\lambda$ , $cd^\lambda$ donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	4,
$c^2 d^\lambda$ donne	$(p-1)$	»	$2p$ ,
$bcd^\lambda$ , $bc^3 d^\lambda$ donnent	$2(p-1)$	»	4,
$acd^\lambda$ , $ac^3 d^\lambda$ donnent	$2(p-1)$	»	4,
$bc^2 d^\lambda$ , $ac^2 d^\lambda$ donnent	$2(p-1)$	»	$2p$ ,
$abd^\lambda$ donne	$p-1$	»	$4p$ .

$$abcd^\lambda = d^{-\lambda} abc, \text{ donc } (abcd^\lambda)^2 = 1.$$

$$\begin{array}{llll} abcd^\lambda, & abc^2d^\lambda & \text{donnent} & 2(p-1) \text{ opérations d'ordre } 2, \\ & abc^2d^\lambda & \text{donne} & (p-1) \text{ » } 2p. \end{array}$$

$G_{16p}^{10}$  admet :

$$\begin{array}{llll} 2(p-1) & \text{opérations d'ordre} & 4p, \\ 5(p-1) & \text{»} & 2p, \\ p-1 & \text{»} & p, \\ 6p+2 & \text{»} & 4, \\ 2p+5 & \text{»} & 2. \end{array}$$

26.  $G_{16p}^{11}$  a pour équations de définition

$$\begin{array}{llll} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, & ac = ca, & bc = cb, & ab = bac^2, \\ & da = ad, & db = bd^{-1}, & dc = cd. \end{array}$$

$\{a, b, c\}$  donne

$$\begin{array}{llll} 8 & \text{opérations d'ordre} & 4, \\ 7 & \text{»} & 2, \\ d^\lambda & \text{donne} & (p-1) \text{ » } p, \\ ad^\lambda & \text{donne} & (p-1) \text{ » } 2p, \\ bd^\lambda & \text{donne} & (p-1) \text{ » } 2, \\ cd^\lambda, & c^2d^\lambda & \text{donnent} & 2(p-1) \text{ » } 4p, \\ c^2d^\lambda & \text{donne} & (p-1) \text{ » } 2p, \\ bcd^\lambda, & bc^2d^\lambda & \text{donnent} & 2(p-1) \text{ » } 4, \\ acd^\lambda, & ac^2d^\lambda & \text{donnent} & 2(p-1) \text{ » } 4p, \\ bc^2d^\lambda & \text{donne} & p-1 \text{ » } 2, \\ ac^2d^\lambda & \text{donne} & p-1 \text{ » } 2p, \end{array}$$

$$abd^\lambda = ad^{-\lambda} b = d^{-\lambda} ab, \quad (abd^\lambda)^2 = c^2.$$

$abc^2d^\lambda$  donne

$$4(p-1) \text{ opérations d'ordre } 4.$$

Bref  $G_{16p}^{11}$  a

$$\begin{array}{llll} 4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & 4p, \\ 3(p-1) & \text{»} & 2p, \\ p-1 & \text{»} & p, \\ 6p+2 & \text{»} & 4, \\ 2p+5 & \text{»} & 2. \end{array}$$

27.  $G_{16p}^{12}$  a pour équations de définition

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2, \\ da = ad^{-1}, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd^{-1}. \end{aligned}$$

$\{a, b, c\}$  donne

	8	opérations d'ordre	4,
	7	"	2,
$d^2$ donne	$p-1$	"	$p$ ,
$ad^2, bd^2, cd^2, c^2d^2$ donnent	$4(p-1)$	"	2,
$c^2d^2$ donne	$p-1$	"	$2p$ ,
$bcd^2, bc^2d^2$ donnent	$2(p-1)$	"	$4p$ ,
$acd^2, ac^2d^2$ donnent	$2(p-1)$	"	$4p$ ,
$bc^2d^2, ac^2d^2$ donnent	$2(p-1)$	"	2,
$abd^2, abc^2d^2$ donnent	$2(p-1)$	"	$4p$ ,
$abcd^2, abc^2d^2$ donnent	$2(p-1)$	"	2.

$G_{16p}^{12}$  possède :

$6(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$p-1$	"	$2p$ ,
$p-1$	"	$p$ ,
8	"	4,
$8p-1$	"	2.

28.  $G_{16p}^{13}$  est défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc.$$

Le Tableau des opérations de  $\{a, b\}$  est

$$\frac{4}{2} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} a & b & ab & \\ \hline \alpha & \beta & \beta & \alpha\beta \end{array} \right\|$$

$\{a, b\}$  contient :

	12	opérations d'ordre	4,
	3	"	2,
$c^2$ donne	$p-1$	"	$p$ ,
$ac^2, a^2c^2$ donnent	$2(p-1)$	"	4,
$bc^2, b^2c^2$ donnent	$2(p-1)$	"	$4p$ ,
$a^2c^2, b^2c^2$ donnent	$2(p-1)$	"	$2p$ ,
$abc^2, ab^2c^2, a^2bc^2, a^2b^2c^2$ donnent	$6(p-1)$	"	4,
$a^2bc^2, a^2b^2c^2$ donnent	$2(p-1)$	"	$4p$ ,
$a^2b^2c^2$ donne	$p-1$	"	$2p$ .

Bref  $G_{16p}^{13}$  a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$3(p-1)$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$8p+4$	»	$4$ ,
$3$	»	$2$ .

*Remarque :*  $4p$  opérations, savoir :  $a, a^3, ab^2, a^3b^2, ac^2, a^3c^2, ab^2c^2, a^3b^2c^2$  ont pour carré  $x$ .

$4p+4$  opérations, savoir :  $b, b^3, ab, ab^3, a^2b, a^3b, a^2b^3, a^3b^3, abc^2, ab^3c^2, a^3bc^2, a^3b^3c^2$  ont pour carré  $\beta$ .

29.  $G_{16p}^{14}$  est défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac, \quad cb = bc^{-1}.$$

$\{a, b\}$  contient

	12	opérations d'ordre	4,
	3	»	2,
$c^2$ donne	$(p-1)$	»	$p$ ,
$ac^2, a^3c^2, ab^2c^2, a^3b^2c^2$ donnent	$4(p-1)$	»	$4p$ ,
$bc^2, b^3c^2, a^2bc^2, a^2b^3c^2$ donnent	$8(p-1)$	»	$4$ (carré $\beta$ ),
$a^2c^2, b^2c^2, a^3b^2c^2$ donnent	$3(p-1)$	»	$2p$ .

On remarquera qu'il y a  $8p$  opérations d'ordre 4 ayant pour carré  $\beta$  et 4 seulement ayant pour carré  $x$ .

Donc  $G_{16p}^{14}$  diffère de  $G_{16p}^{13}$ , bien qu'ayant le même nombre d'opérations d'ordre donné que ce dernier groupe, savoir :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$3(p-1)$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$8p+4$	»	$4$ ,
$3$	»	$2$ .

30.  $G_{16p}^{15}$  est défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac, \quad cb = bc^3,$$

où  $\beta$  appartient à l'exposant  $4 \pmod{p}$ .

$\{a, b\}$  contient

	12	opérations d'ordre	4,
	3	»	2,
$c^\lambda$ donne	$p-1$	»	$p$ ,
$ac^\lambda, a^2c^\lambda$ donnent	$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$(cb)^2 = cb^2c^\beta = c^{1-\beta}b^2 = b^2c^{\beta-1}$ donc $(cb)^4 = 1$ ,			
$bc^\lambda, b^2c^\lambda$ donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	4,
$a^2c^\lambda$ donne	$p-1$	»	$2p$ ,
$b^2c^\lambda$ donne	$p-1$	»	2,
$a^2bc^\lambda, a^2b^2c^\lambda, abc^\lambda, a^2bc^\lambda,$ $ab^2c^\lambda, a^2b^2c^\lambda, ab^2c^\lambda, a^2b^2c^\lambda$	donnent	$8(p-1)$	» 4,
$a^2b^2c^\lambda$ donne	$p-1$	»	2.

Donc  $G_{16p}^{15}$  a

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$p-1$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$10p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

31.  $G_{16p}^{16}$  a pour équations de définition

$$\begin{aligned} a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac, \\ da = ad^{-1}, \quad db = bd, \quad dc = cd. \end{aligned}$$

Le Tableau des opérations de  $\{a, b, c\}$  est

4	$a$	$ab$
2	$a^2 = \alpha$	$\alpha c = \alpha\beta$
	$b$	$c = \beta$

D'où

	8	opérations d'ordre	4,
	7	»	2,
$d^\lambda$ donne	$(p-1)$	»	$p$ ,
$ad^\lambda, a^2d^\lambda$ donnent	$2(p-1)$	»	4,
$a^2d^\lambda, bd^\lambda, cd^\lambda$ donnent	$3(p-1)$	»	$2p$ ,
$a^{2\mu+1}bd^\lambda, a^{2\mu+1}cd^\lambda, a^{2\mu+1}bcd^\lambda$ donnent	$6(p-1)$	»	4,
$a^2bd^\lambda, a^2cd^\lambda, a^2bcd^\lambda, bcd^\lambda$ donnent	$4(p-1)$	»	$2p$ .

$G_{16p}^{16}$  possède

$7(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$ ,
$p-1$	"	$p$ ,
$8p$	"	$4$ ,
$7$	"	$2$ .

32.  $G_{16p}^{17}$  est défini par les équations

$$\begin{aligned} a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad cb = bc, \quad ab = abc, \\ da = ad^2, \quad db = bd, \quad dc = cd, \end{aligned}$$

où  $x$  appartient à l'exposant  $4 \pmod{p}$ .

Le groupe  $\langle a, b, c \rangle$  donne

	8	opérations d'ordre	4,
	7	"	2,
$d^k$ donne	$(p-1)$	"	$p$ ,
$ad^k, a^3d^k$ donnent	$2(p-1)$	"	4,
$a^2d^k$ donne	$(p-1)$	"	2,
$bd^k, cd^k, bcd^k$ donnent	$3(p-1)$	"	$2p$ ,
$abd^k, a^3bd^k, abcd^k$ } $acd^k, a^3cd^k, a^2bcd^k$ }	donnent $6(p-1)$	"	4,
$a^2bd^k, a^2cd^k, a^2bcd^k$ donnent	$3(p-1)$	"	2.

$G_{16p}^{17}$  a

$3(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$ ,
$8p$	"	4,
$p-1$	"	$p$ ,
$4p+3$	"	2.

33.  $G_{16p}^{18}$  a pour équation de définition

$$\begin{aligned} a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac, \\ da = ad, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd, \end{aligned}$$

$\langle a, b, c \rangle$  donne

	8	opérations d'ordre	4,
	7	"	2,
$d^k$ donne	$p-1$	"	$p$ ,
$ad^k, a^3d^k$ donnent	$2(p-1)$	"	4p,
$a^2d^k, cd^k, a^2cd^k$ donnent	$3(p-1)$	"	2p,
$bd^k, bcd^k, a^2bd^k, a^2bcd^k$ donnent	$4(p-1)$	"	2,
$abd^k, a^3bd^k, abcd^k, a^3bcd^k$ donnent	$4(p-1)$	"	4,
$acd^k, a^2cd^k$ donnent	$2(p-1)$	"	4p.

$G_{16p}^{18}$  possède

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$3(p-1)$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$4p+4$	»	$4$ ,
$4p+3$	»	$2$ .

34.  $G_{16p}^{19}$  est défini par les équations

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b^2, \quad ab = ba^7, \quad ca = ac, \quad cb = bc^{-1},$$

$\{a, b\}$  a pour Tableau d'opérations

8	$a$	$a^2$				
4	$a^2$	$a^2 a$	$b$	$ab$	$a^2 b$	$a^2 b$
2	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$

donc  $\{a, b\}$  donne

	4	opérations d'ordre	8,
	10	»	4,
	1	opération d'ordre	2,
$c^\lambda$ donne	$p-1$	opérations d'ordre	$p$ ,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$ donne	$4(p-1)$	»	$8p$ ,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$ donne	$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$a^4c^\lambda$ donne	$p-1$	»	$2p$ ,
$a^4bc^\lambda$ donne	$8(p-1)$	»	4.

Donc  $G_{16p}^{19}$  a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$ .
$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$p-1$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
4	»	8,
$8p+2$	»	4,
1	opération d'ordre	2.

35.  $G_{16p}^{20}$  est défini par les équations

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \quad a^2 = b^2, \quad ab = ba^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc,$$

$\{a, b\}$  donne

	4	opérations d'ordre	8,
	10	"	2,
	1	opération d'ordre	2,
$c^\lambda$ donne	$(p-1)$	opérations d'ordre	$p$ ,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$ donne	$4(p-1)$	"	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda, a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda, a^4bc^\lambda$ donnent	$5(p-1)$	"	$4p$ ,
$a^4c^\lambda, bc^\lambda$ donnent	$2(p-1)$	"	$2p$ ,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$ donne	$4(p-1)$	"	4.

Donc  $G_{16p}^{20}$  a

$5(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$2(p-1)$	"	$2p$ ,
$p-1$	"	$p$ ,
$4p$	"	8,
$4p+6$	"	4,
1	opération d'ordre	2.

36. Le groupe  $G_{16p}^{21}$  est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad cb = bc^{-1}.$$

Le Tableau des opérations de  $\{a, b\}$  est

8	$a$	$a^3$				
4	$a^2$	$a^4a$		$ab$		$a^3b$
2	$a$	$a$	$b$	$a$	$a^2b$	$a$

Par suite,  $\{a, b\}$  donne

	4	opérations d'ordre	8,
	6	"	4,
	5	"	2,
$c^\lambda$ donne	$p-1$	"	$p$ ,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$ donne	$4(p-1)$	"	$8p$ ,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$ donne	$2(p-1)$	"	$4p$ ,
$a^4c^\lambda$ donne	$p-1$	"	$2p$ ,
$bc^\lambda, a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda, a^4bc^\lambda$ donnent	$4(p-1)$	"	2,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$ donne	$4(p-1)$	"	4.



Bref  $G_{16p}^{21}$  a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$ ,
$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$p-1$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$4$	»	$8$ ,
$4p+2$	»	$4$ ,
$4p+1$	»	$2$ .

37. Le groupe  $G_{16p}^{22}$  a pour équations de définitions

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^2, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc.$$

$\{a, b\}$  donne

	$4$	opérations d'ordre	$8$ ,
	$6$	»	$4$ ,
	$5$	»	$2$ ,
$c^\lambda$ donne	$p-1$	»	$p$ ,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$ donne	$4(p-1)$	»	$8$ ,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$ donne	$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$a^4c^\lambda, bc^\lambda, a^{2(\mu+1)}bc^\lambda, a^4bc^\lambda$ donnent	$5(p-1)$	»	$2p$ ,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$ donne	$4(p-1)$	»	$4$ .

Bref, on a, pour le groupe  $G_{16p}^{22}$ ,

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$5(p-1)$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$4p$	»	$8$ ,
$4p+2$	»	$4$ ,
$5$	»	$2$ .

38.  $G_{16p}^{23}$  est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc^{-1}.$$

$\{a, b\}$  donne

	4	opérations d'ordre	8,
	6	»	4,
	5	»	2,
$c^\lambda$ donne	$p-1$	»	$p$ ,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$ donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda, a^{2\mu+1}bc^\lambda$ donnent	$6(p-1)$	»	$4p$ ,
$a^4c^\lambda$ donne	$p-1$	»	$2p$ ,
$bc^\lambda, a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda, a^4bc^\lambda$ donnent	$4(p-1)$	»	2.

Donc  $G_{16p}^{23}$  a

$6(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$p-1$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$4p$	»	8,
6	»	4,
$4p+1$	»	2.

39.  $G_{16p}^{24}$  a pour équations de définition

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^7, \quad ca = ac, \quad cb = bc^{-1}.$$

Le Tableau des opérations de  $\{a, b\}$  est

8	$a$	$a^2$				
4	$a^2$	$a^4$				
2	$a$	$a$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$

Donc  $\{a, b\}$  donne

	4	opérations d'ordre	8,
	2	»	4,
	9	»	2,
$c^\lambda$ donne	$p-1$	»	$p$ ,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$ donne	$4(p-1)$	»	$8p$ ,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$ donne	$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$a^4c^\lambda$ donne	$p-1$	»	$2p$ ,
$a^4bc^\lambda$ donne	$8(p-1)$	»	2.

$G_{16p}^{24}$  possède

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$ ,
$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$p-1$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$4$	»	$8$ ,
$2$	»	$4$ ,
$8p+1$	»	$2$ .

40. Enfin  $G_{16p}^{25}$  est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad bc = cb.$$

Le groupe  $\{a, b\}$  donne

	$4$	opérations d'ordre	$8$ ,
	$2$	»	$4$ ,
	$9$	»	$2$ ,
$c^\lambda$ donne	$(p-1)$	»	$p$ ,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$ donne	$4(p-1)$	»	$8$ ,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$ donne	$2(p-1)$	»	$4p$ ,
$a^4c^\lambda, a^{2\mu}bc^\lambda$ donnent	$5(p-1)$	»	$2p$ ,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$ donne	$4(p-1)$	»	$2$ .

$G_{16p}^{25}$  a

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$ ,
$5(p-1)$	»	$2p$ ,
$p-1$	»	$p$ ,
$4p$	»	$8$ ,
$2$	»	$4$ ,
$4p+5$	»	$2$ .

41. B. J'arrive au cas où il n'y a pas dans le groupe cherché de sous-groupe d'ordre  $p$  conjugué de lui-même; alors supposons qu'il y ait un sous-groupe d'ordre  $16$ , conjugué de lui-même.

Supposons que le sous-groupe d'ordre  $16$  conjugué de lui-même est  $G_{16}$ .

Soit  $a$  une opération d'ordre  $16$ . Elle engendre  $G_{16}$ .

Pour engendrer  $G_{16}$ , on peut remplacer  $a$  par

$$a, \text{ ou } a^3, \text{ ou } a^5, a^7, a^9, a^{11}, a^{13}, a^{15}.$$

Le groupe des isomorphismes de  $G_{16}$  est d'ordre 8.

Ces isomorphismes sont, l'isomorphisme identique, 1, puis

$$\begin{aligned}s &= (a, a^2, a^3, a^{11}) (a^2, a^6) (a^4, a^{12}) (a^5, a^{13}, a^{14}, a^7) (a^{10}, a^{15}), \\s^2 &= (a, a^9) (a^2, a^{11}) (a^5, a^{13}) (a^7, a^{15}), \\s^3 &= (a, a^{11}, a^9, a^3) (a^2, a^6) (a^4, a^{12}) (a^5, a^7, a^{13}, a^{15}) (a^{10}, a^{15}), \\t &= (a, a^5, a^3, a^{13}) (a^2, a^{10}) (a^3, a^{15}, a^{11}, a^7) (a^6, a^{14}), \\st &= (a, a^{15}) (a^2, a^{14}) (a^3, a^{13}) (a^4, a^{12}) (a^5, a^{11}) (a^6, a^{10}) (a^7, a^9), \\s^2t &= (a, a^{13}, a^9, a^5) (a^2, a^{10}) (a^3, a^7, a^{11}, a^{15}) (a^6, a^{14}), \\s^3t &= (a, a^7) (a^2, a^{14}) (a^3, a^5) (a^4, a^{12}) (a^6, a^{10}) (a^9, a^{15}) (a^{11}, a^{13}).\end{aligned}$$

On a

$$s^4 = t^4 = 1, \quad s^2 = t^2, \quad st = ts.$$

De là résulte que si  $b$  est une opération d'ordre  $p$ , permutable avec le groupe  $G_{16}$ , elle est nécessairement permutable avec toutes les opérations de  $G_{16}$ .

On retombe sur le groupe  $G_{16}G_p$ .

42. Soit  $G_8G_2$  le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même

$$\alpha^8 = \beta^8 = 1.$$

On pourra remplacer (pour engendrer le sous-groupe)

$$\begin{array}{ll}\alpha & \text{par } \alpha, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^7, \alpha\beta, \alpha^3\beta, \alpha^5\beta, \alpha^7\beta, \\ \beta & \text{par } \beta, \alpha^4\beta.\end{array}$$

Le groupe des isomorphismes de  $G_8G_2$  est donc d'ordre 16.

Il n'y a donc aucun isomorphisme d'ordre impair.

Donc, si une opération d'ordre  $p$  est permutable avec  $G_8G_2$ , elle sera permutable avec toutes les opérations de ce groupe.

On retrouve  $G_8G_2G_p$ .

43. Soit  $(G_4)^2$  le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Soient  $a^4 = b^4 = 1$ ,  $ab = ba$ .

Voici le Tableau des opérations :

$\begin{smallmatrix} 4 \\ a \end{smallmatrix}$	$a$	$a^3$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$ab^2$	$a^3b^2$	$b^3$	$ab^3$	$a^2b^3$	$a^3b^3$
$a$	$a^2$	$a^2$	$b^2$	$a^2b^2$	$b^2$	$a^2b^2$	$a^2$	$a^2$	$b^2$	$a^2b^2$	$b^2$	$a^2b^2$

Il y a 12 opérations d'ordre 4 :

$$\begin{array}{lll} 4 & \text{ont pour carré} & a^2, \\ 4 & \text{»} & b^2, \\ 4 & \text{»} & a^2 b^2, \end{array}$$

On pourra prendre pour opération génératrice  $a'$  l'une des 12 opérations d'ordre 4, puis ensuite, pour  $b'$ , l'une des 8 opérations d'ordre 4 n'ayant pas même carré que  $a'$ .

En tout, cela donne

$$12 \cdot 8 = 96 \text{ isomorphes.}$$

Or,

$$96 = 3 \cdot 32.$$

Puisque  $3^1$  est la plus grande puissance de 3 qui divise 96, les isomorphismes d'ordre 3 se partagent en groupes cycliques d'ordre 3 formant une suite complète de sous-groupes conjugués dans le groupe total des isomorphismes.

Soient  $c^3 = 1$ .

Posons

$$ac = cb, \quad bc = ca^\alpha b^\beta;$$

d'où

$$a^\alpha b^\beta c = a^\alpha c a^{2\beta} b^{\beta^2} = c a^{2\beta} b^{\alpha+\beta^2}.$$

On devra donc avoir

$$\beta^2 + \alpha \equiv 0, \quad \alpha\beta \equiv 1 \pmod{4}.$$

Donc

$$\beta^2 \equiv -1 \pmod{4},$$

d'où

$$\beta = 3, \quad \alpha \equiv 3.$$

Le groupe  $G_{16}^{26}$  sera défini par les équations

$$\begin{aligned} a^4 = b^4 = c^3 = 1, \quad ab = ba, \\ \bar{c} = (a, b, a^3 b^3). \end{aligned}$$

44. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est  $G_4(G_2)^2$ . On a

$$a^4 = b^4 = c^3 = 1, \quad ab = ba, \quad ac = ca, \quad bc = cb.$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} a & a^3 & & ab & & a^3 b & & ac & & a^3 c & & abc & & a^3 bc \\ \hline a^2 & a^2 & b & a^2 & a^2 b & a^2 & c & a^2 & a^2 c & a^2 & bc & a^2 & a^2 bc & a^2 \end{array} \right\|$$

Pour avoir le groupe des isomorphismes, on peut remplacer  $a$  par l'une des

8 opérations d'ordre 4, soit  $a'$ ; puis  $b$  par l'une des 6 opérations  $b, a^2b, c, a^2c, bc, a^2bc$ , soit  $b'$ ; ensuite  $c$  par l'une des 4 opérations d'ordre 2 qui restent après que l'on a exclu  $b'$  et  $a^2b'$ .

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre

$$8.6.4 = 3.64 = 192.$$

Les isomorphismes d'ordre 3 se partagent en groupes d'ordre 3 formant une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

Si l'on se reporte aux considérations faites dans un Mémoire antérieur <sup>(1)</sup>, on a ici,  $m_1 = 1$ ,  $ad = da$ , par exemple (en supposant  $d^3 = 1$ ),

$$\bar{d} = (a^2b, a^2c, a^2bc).$$

On trouve ainsi le groupe décomposable  $G_{12}^3 G_4$  <sup>(2)</sup>.

43. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est  $(G_2)^4$ . L'ordre du groupe des isomorphismes est

$$(16-1)(16-2)(16-4)(16-8) = 15.14.12.8 = 2^6.3^2.5.7 = 20160.$$

On a

$$m_2 \equiv 15 \pmod{p} \quad (3).$$

Si  $p = 7$ , peut-on avoir  $m_2 = 8$ ?

Soit

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = 1,$$

$a, b, c, d$  étant deux à deux permutables.

Les opérations avec lesquelles  $e$  est permutable forment un groupe, car si l'on a

$$ae = ea, \quad be = eb,$$

on aura

$$abc = aeb = eab.$$

Or il faudrait, en prenant les 8 opérations d'ordre 2 et en y ajoutant l'opération identique, ce qui fait 9 opérations, que ces 9 opérations constituent un sous-groupe de  $(G_2)^4$ .

Mais 9 ne divise pas  $2^4$ . Donc c'est impossible.

On peut avoir  $m_2 = 1$ ,

$$ae = ea;$$

<sup>(1)</sup> *Loc. cit.* au commencement du Chapitre VIII.

<sup>(2)</sup> *Loc. cit.*, Chap. V.

<sup>(3)</sup> *Loc. cit.* au commencement du Chapitre VIII.

puis

$$\bar{e} = (b, c, d, bc, cd, bcd, bd) (ab, ac, ad, abc, acd, abcd, abd).$$

On trouve ainsi  $G_{56}^8 G_2^{(1)}$ .

D'ailleurs, dans le groupe des isomorphismes de  $(G_2)^4$ , il y a une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 7.

46. Faisons  $p = 5$ .

On peut supposer  $m_2 = 10$ , ou  $m_2 = 5$ , ou  $m_2 = 0$ .

Mais les opérations de  $(G_2)^4$  permutables avec  $e$  forment un groupe. On en déduit qu'on a nécessairement  $m_2 = 0$ ; autrement l'ordre du groupe des opérations de  $(G_2)^4$  permutables avec  $e$  serait 6, ou 11, ce qui est impossible puisque ces nombres ne divisent pas 2<sup>4</sup>.

On peut supposer, par exemple, qu'on a

$$\bar{e} = (a, b, c, d, abcd) (ab, bc, cd, abc, bcd) (ac, bd, abd, ad, acd).$$

Introduisons les exposants imaginaires de Galois.

Prenons comme congruence fondamentale

$$x^4 \equiv x^3 + x^2 + x + 1 \pmod{2}.$$

Voyons à quel exposant appartient  $x$  :

$$\begin{aligned} x^1 &= x, & x^2 &= x^2, & x^3 &= x^3, & x^4 &\equiv x^3 + x^2 + x + 1, \\ x^5 &\equiv x^4 + x^3 + x^2 + x \equiv 1. \end{aligned}$$

Donc  $x$  appartient à l'exposant 5 et  $G_{40}^{27}$  est défini par les équations

$$a^{(2, x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^5 = 1, \quad ab = ba^x.$$

On remarquera d'ailleurs que les sous-groupes d'ordre 5 du groupe des isomorphismes de  $(G_2)^4$  font partie d'une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

47. Soit  $p = 3$ . On aura

$$m_2 = 15, 12, 9, 6, 3, 0.$$

Pour  $m_2 = 15$ , on aurait un sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Les opérations de  $(G_2)^4$  permutables avec  $e$  devant former un groupe, les hypothèses  $m_2 = 12, 9, 6$  sont exclues.

---

(<sup>1</sup>) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

Soit  $m_2 = 3$ .

On aurait, par exemple,

$$e^3 = 1, \quad ce = ec, \quad de = ed, \\ \bar{c} = (a, b, ab).$$

On trouve ainsi  $G_{12}^3(G_2)^2$ .

Soit enfin  $m_2 = 0$ .

Appelons  $b$  la transformée de  $a$  par l'opération  $e$  :

$$ae = eb.$$

Soit ensuite  $be = ec'$ , et par suite  $c'e = ea$ .

On a

$$abc'e = eabc'; \quad \text{donc} \quad abc' = 1, \quad c' = ab.$$

Bref, on pourra prendre pour  $\bar{e}$  l'isomorphisme suivant :

$$\bar{e} = (a, b, ab)(c, d, cd)(ac, bd, abcd)(ad, bcd, abc)(bc, abd, acd).$$

Introduisons les exposants imaginaires de Galois.

Prenons la congruence fondamentale

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

On a vu que  $x, x^2, x^3, x^3 + x^2 + x + 1$  appartiennent à l'exposant 5,  $1 + x$  appartient à l'exposant 15.

Il en est de même de  $1 + x^2 \equiv (1 + x)^2$ , de  $x + x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^4$ , de  $(1 + x + x^2) \equiv (1 + x)^7$ , de  $1 + x^3 \equiv (1 + x)^8$ , de  $1 + x + x^3 \equiv (1 + x)^{11}$ , de  $x + x^2 \equiv (1 + x)^{13}$  et de  $x + x^3 \equiv (1 + x)^{14}$ .

Les deux seuls nombres appartenant à l'exposant 3 sont

$$1 + x^2 + x^3 \quad \text{et} \quad x^2 + x^3 \quad [1 + x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^5; \quad x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^{10}].$$

Si l'on envisage le groupe des isomorphismes de  $(G_2)^4$ , ou plutôt le groupe des substitutions linéaires simplement isomorphe, j'observe que, puisqu'on a  $m_2 = 0$ , les substitutions d'ordre 3 correspondront à des congruences caractéristiques ayant toutes leurs racines imaginaires.

Cette congruence caractéristique sera donc

$$\sigma^4 + \sigma^3 + \sigma^2 + \sigma + 1 \equiv 0 \pmod{2}$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma^3 + 1 \equiv 0$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma^2 + 1 \equiv 0$$



ou

$$\sigma^4 + \sigma + 1 \equiv 0.$$

Cette congruence caractéristique est d'ailleurs donnée par la formule

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \sigma & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} + \sigma & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \sigma & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} + \sigma \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (1).$$

$G_{16}^{28}$  sera défini par les équations

$$a^{(2, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)} = b^3 = 1, \quad ab = ba^{x^2 + x^4}.$$

48. Le groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est  $G_8^4 G_2$

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad bc = cb.$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} a & a^3 & & & & & & ac & a^3c & & & & & \\ \hline a^2 & a^2 & b & ab & a^2b & a^3b & c & a^3 & a^2 & a^2c & bc & abc & a^2bc & a^3bc \end{array} \parallel$$

L'ordre du groupe des isomorphismes est 64.

En effet, on peut remplacer  $a$  par l'une des 4 opérations  $a, a^3, ac, a^3c$ ; puis  $b$  par l'une des 8 opérations  $b, ab, a^2b, a^3b, bc, abc, a^2bc, a^3bc$ ; enfin  $c$  par l'une des 2 opérations  $c, a^2c$ .

Cela fait en tout 64 isomorphismes.

Donc, il n'y a pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

Autrement : on a

$$m_4 \equiv 2 \pmod{p}, \quad \text{donc} \quad m_4 = 2;$$

donc l'opération  $d$ , d'ordre  $p$ , est permutable avec  $a$  et  $c$ .

Ensuite il y a 11 opérations d'ordre 2.

Si  $p = 7$ ,  $m_2$  est au moins égal à 4 (puisque  $d$  est permutable avec  $a^2, c, a^2c$ ).

D'ailleurs  $m_2$  ne peut pas être égal à 4 : il n'y a pas dans le groupe  $G_8^4 G_2$  de sous-groupe d'ordre 5.

Si  $p = 5$ , l'hypothèse  $m_2 = 6$  est inacceptable : il n'y a pas dans le groupe  $G_8^4 G_2$  de sous-groupe d'ordre 7.

(1) *Loc. cit.*, Chap. VII. — Voir aussi Chap. VIII.

Si  $p = 3$ ,  $m_2 = 8, 5$ . C'est impossible : il n'y a pas dans  $G_8^1 G_2$  de sous-groupe d'ordre 6, ou 9.

49. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est  $G_8^2 G_2$  :

$$a^2 = b^2 = x, \quad x^2 = c^2 = 1, \quad ab = bax, \quad ac = ca, \quad bc = cb,$$

	$a$	$b$	$ab$	$ax$	$bx$	$abx$		$ac$	$bc$	$abc$		$acx$	$bcx$	$a$
	$x$	$x$	$x$	$x$	$x$	$x$	$c$	$x$	$x$	$x$	$cx$	$x$	$x$	

On peut remplacer  $a$  par l'une des douze opérations  $a, b, ab, ax, bx, abx, ac, bc, abc, acx, bcx, abcx$ ; soit  $a'$ ; puis  $b$  par l'une des 8 opérations d'ordre 4 qui restent, après qu'on a effacé  $a', a'c, a'x, a'cx$ ; enfin  $c$  peut être remplacé par l'une des deux opérations  $c, cx$ .

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre

$$12 \cdot 16 = 192.$$

D'après cela, il y a, dans le groupe des isomorphismes, une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 3.

Soit  $d$  une opération d'ordre 3. Je dis que  $d$  est nécessairement permutable avec  $x$ .

En effet, si  $d$  n'est pas permutable avec  $x$ , il n'est permutable avec aucune des opérations d'ordre 4, qui toutes ont pour carré  $x$ . On aurait, par exemple,  $ad = da'$ ,  $a'$  étant d'ordre 4.

Mais on en déduit  $a^2 d = da'^2$ , donc  $xd = dx$ . Il y a contradiction. Donc  $d$  est permutable avec  $x$ , et, par suite, avec  $c$  et  $cx$ .

Il y a six groupes d'ordre 4, donc on a

$$m_4 \equiv 6 \pmod{3} \quad (1).$$

L'hypothèse  $m_4 = 6$  doit être écartée (7 ne divise pas 16).

Donc  $m_4 = 3$  ou  $m_4 = 0$ .

Soit  $m_4 = 3$ ; si  $d$  est permutable avec  $a, b, ab$ , il est aussi permutable avec  $ac, bc, abc$ , donc on aurait  $m_4 = 6$ .

Mais, s'il est permutable avec  $ac$ , il est permutable avec  $a$ , puisqu'il est déjà permutable avec  $c$ .

Donc l'hypothèse  $m_4 = 3$  doit être écartée.

Reste  $m_1 = 0$ , qui donne  $G_{21}^7, G_2^{(1)}$ ,

$$a^2 = b^2 = x, \quad x^2 = c^2 = d^2 = 1, \\ ab = ba x, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad dc = cd, \quad \bar{d} = (a, ab, b).$$

30. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est  $G_{16}^1$  :

$$(a^8 = b^2 = 1, ab = ba^5).$$

Le Tableau des opérations est le suivant :

8	$a$	$a^3$	$a^5$	$a^7$		$ab$		$a^3b$		$a^5b$		$a^7b$
4	$a^2$	$a^6$	$a^4$	$a^8$		$a^4$	$a^3b$	$a^2$		$a^6$	$a^5b$	$a^7$
2	$a^4$	$a^8$	$a^6$	$a^4$	$b$	$a^4$	$a^4$	$a^4$	$a^4b$	$a^4$	$a^4$	$a^4$

On peut remplacer  $a$  par l'une des 8 opérations  $a, a^3, a^5, a^7, ab, a^3b, a^5b, a^7b$ , et  $b$  par l'une des 2 opérations  $b, a^4b$ , ce qui donne 16 pour l'ordre du groupe des isomorphismes; donc, il n'y a pas d'isomorphisme de degré impair.

31. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est  $G_{16}^1$  (2) :

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1, \quad ab = bac^2, \quad ac = ca, \quad bc = cb;$$

il a, pour Tableau de ses opérations,

4			$ab$			$abc^2$	$c$	$c^3$	$ac$	$bc$		$ac^3$	$bc^3$	
2	$a$	$b$	$c^2$	$ac^2$	$bc^2$	$c^2$	$c^2$	$c^2$	$c^2$	$c^2$	$abc$	$c^2$	$c^2$	$abc^3$

On peut remplacer  $a$  par l'une des 6 opérations  $a, b, ac^2, bc^2, abc, abc^2$ .

$a$  étant ainsi remplacé par  $a'$ , on peut choisir pour  $b$  l'une des 4 opérations qui restent quand on a supprimé  $a'$  et  $a'c^2$ . On peut enfin remplacer l'opération  $c$  par  $c$  ou  $c^3$ .

Cela fait en tout  $48 = 3 \cdot 2^4$  isomorphismes.

Il y aura donc, en particulier, une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 3.

On pourra, par exemple, prendre

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & abc & c \end{pmatrix}$$

(1) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

(2) *Loc. cit.*, Chap. VI.



$a$  peut être remplacé par l'une des 4 opérations  $a, a^3, a\alpha, a^3\alpha$ , et  $b$  par l'une des 8 opérations  $a^\lambda b, \lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

On a donc un groupe d'isomorphismes d'ordre 32.

Donc, pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

55. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est  $G_{16}^6$  :

$$a^4 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = 1, \quad ab = ba^3.$$

8	$a$	$a^3$	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	$a^2$	$a^2\alpha$	$a^2$	$a^2\alpha$		$ab$		$a^3b$		$ab\alpha$		$a^3b\alpha$
2	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$b$	$\alpha$	$a^2b$	$\alpha$	$b\alpha$	$\alpha$	$a^2b\alpha$	$\alpha$

On pourra remplacer  $a$  par l'une des 4 opérations  $a^{2\lambda+1}, \lambda = 0, 1, 2, 3$ , et  $b$ , par l'une des 4 opérations  $a^{2\lambda}b, \lambda = 0, 1, 2, 3$ .

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre 16.

Il n'y a pas d'isomorphismes d'ordre premier impair.

56. Enfin, le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est  $G_{16}^7$  :

$$a^4 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = 1, \quad ab = ba^2\alpha.$$

8	$a$	$a^3$	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	$a^2$	$a^2\alpha$	$a^2$	$a^2\alpha$								
2	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$b\alpha$	$ab\alpha$	$a^2b\alpha$	$a^3b\alpha$

On pourra remplacer  $a$  par l'une des 4 opérations  $a^{2\lambda+1}, \lambda = 0, 1, 2, 3$ , et  $b$  par l'une des 8 opérations  $a^\lambda b, \lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

Le groupe des isomorphismes est d'ordre 32.

Il n'y a donc pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

57. (C). Soit maintenant à considérer le cas où le groupe cherché d'ordre  $16p$  n'admet ni sous-groupe d'ordre  $p$  conjugué de lui-même, ni sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Alors  $p = 7, 5$ , ou 3 (voir n° 1).

Si  $p = 5$ , on a

$$16 = m(5h + 1); \quad \text{d'où} \quad h = 3, \quad m = 1,$$

il y a alors 16 sous-groupes conjugués d'ordre 5, d'où 64 opérations d'ordre 5.

Reste  $80 - 64 = 16$  opérations; il y a donc nécessairement un sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Le cas  $p = 5$  peut donc être écarté.

§8. Envisageons le cas  $p = 7$ .

L'ordre du groupe est

$$7 \cdot 16 = 112.$$

Il y a 8 groupes conjugués d'ordre 7 (n° 1), donc 48 opérations d'ordre 7.

Ensuite on a

$$16 \cdot 7 = 16m(2h + 1) \quad (1).$$

Donc

$$7 = m(2h + 1) \quad \text{avec} \quad h \neq 0.$$

Donc

$$h = 3.$$

Cela donne 7 groupes conjugués d'ordre 16.

Appelons  $n$  le nombre des opérations communes à tous ces groupes transformés d'ordre 16. On a

$$48 + 7(16 - n) + n \leq 112$$

ou

$$48 - 6n \leq 0,$$

$$n \geq 8.$$

Or, d'autre part,  $n$  ne peut être supérieur à 8.

Donc

$$n = 8.$$

Ainsi, il y a un sous-groupe d'ordre 8, conjugué de lui-même.

Le sous-groupe conjugué de lui-même, d'ordre maximum, aura donc pour son ordre un multiple de 8.

Ce sera un groupe d'ordre 56.

Ce sous-groupe d'ordre 56 doit contenir un sous-groupe d'ordre 8 conjugué de lui-même, mais ne doit contenir aucun sous-groupe d'ordre 7 conjugué de lui-même.

Seul le groupe  $G_{56}^8$  (2) répond aux conditions imposées.

Remarquons, à cause de l'égalité

$$48 + 7 \cdot 8 + 8 = 112,$$

que le groupe pourra contenir des opérations d'ordre 7, ou 16, ou 8, ou 4, ou 2, mais aucune opération d'un autre ordre (sauf l'opération identique).

(1) *Loc. cit.*, n° 21, p. 18.

(2) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

On a

$$a^{(1, x^1 + x + 1)} = b^7 = 1, \quad ab = ba^x,$$

$$a^x = b, \quad a^{x^2} = c, \quad a^{x^3} = a^{x+1} = ab, \quad a^{x^4} = a^{x^2+x} = bc,$$

$$a^{x^5} = a^{x^2+x^2} = a^{x^2+x+1} = abc,$$

$$a^{x^6} = a^{x^2+x^2+x} = a^{x^2+1} = ac, \quad a^{x^7} = a^{x^2+x} = a,$$

donc

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^7 = 1, \quad ab = ba, \quad ac = ca, \quad bc = cb,$$

$$\bar{d} = (a, b, c, ab, bc, abc, ac).$$

A ce groupe d'ordre 56, il faut adjoindre une opération  $e$ , d'ordre 2 ou 4 (puisque  $e^2$  doit faire partie du groupe d'ordre 56).

De plus,  $e$  ne sera permutable avec aucune des opérations d'ordre 7, puisque autrement on aurait une opération d'ordre 14. D'après la remarque faite plus haut, cela est impossible.

Soit

$$de = ea^\lambda b^\mu c^\nu d^\rho,$$

$$(de)^2 = de^2 a^\lambda b^\mu c^\nu d^\rho.$$

Mais

$$e^2 = a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

donc

$$(de)^2 = da^{\lambda+\alpha} b^{\mu+\beta} c^{\nu+\gamma} d^\rho = d^{1+\rho} a^{\lambda'} b^{\mu'} c^{\nu'}.$$

Comme  $de$  doit être d'ordre 2 ou 4 (car on a vu que le groupe d'ordre 112 envisagé contient, comme opérations d'ordre 7, les 48 opérations d'ordre 7 du groupe  $G_{56}^8$ )

$$1 + \rho = 0, \quad \rho = -1.$$

Donc

$$de = ea^\lambda b^\mu c^\nu d^{-1}.$$

Je dis que  $e$  ne peut être permutable à deux opérations d'ordre 2 que  $d$  transforme l'une dans l'autre.

En effet, soient  $m$  et  $m_1$  deux opérations d'ordre 2, telles que l'on ait

$$me = em, \quad m_1 e = em_1, \quad md = dm_1.$$

On a, d'une part,

$$mde = ema^\lambda b^\mu c^\nu d^{-1},$$

et d'autre part

$$dm_1 e = ea^\lambda b^\mu c^\nu d^{-1} m_1.$$

Donc

$$m d^{-1} = d^{-1} m_1$$

ou

$$dm = m_1 d,$$

d'où

$$m d^2 = d m_1 d = d^2 m_1,$$

ce qui est inexact.

Considérons les 21 isomorphismes d'ordre 2 du groupe  $\{a, b, c\}$  <sup>(1)</sup>.

Ces 21 isomorphismes forment une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 2.

Ils sont de la forme  $(a, b)(c, abc)$ .

Les 3 opérations d'ordre 2 qu'ils transforment chacune en elle-même forment un groupe avec l'opération identique.

Soit  $[1, a_1, a_2, a_3]$  ce groupe.

On a

$$[1, a_1, a_2, a_3] d = d[1, a'_1, a'_2, a'_3],$$

$d$  n'étant permutable à aucune opération d'ordre 2.

Donc  $a'_1$  n'est pas égale à  $a_1$ , ni  $a'_2$  à  $a_2$ , ni  $a'_3$  à  $a_3$ .

D'ailleurs, il est impossible que  $a'_1, a'_2, a'_3$  soient les opérations  $a_1, a_2, a_3$  rangées dans un autre ordre, car, si l'on avait, par exemple,  $a_1 d = d a_2$ ,  $e$ , d'après la remarque faite plus haut, ne serait permutable ni à  $a_1$ , ni à  $a_2$ .

Donc, il faut que les trois opérations  $a'_1, a'_2, a'_3$  soient distinctes de  $a_1, a_2, a_3$ . Or ceci est impossible, car si l'on prend deux sous-groupes d'ordre 4 quelconques du groupe  $\{a, b, c\}$ , ils auront toujours deux opérations communes.

Bref, le groupe cherché n'existe pas.

59. Soit maintenant  $p = 3$ .

Il peut y avoir 16 ou 4 groupes transformés d'ordre 3 (n° 1). D'autre part

$$3 = m(2h + 1).$$

Comme on a  $h \neq 0$ , il y aura 3 groupes transformés d'ordre 16.

16 groupes transformés d'ordre 3 donnent 32 opérations d'ordre 3; il y aurait donc un sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même. L'hypothèse est à rejeter.

Ainsi, prenons le cas de 4 groupes transformés d'ordre 3.

Appelons  $d$  le nombre des opérations communes aux groupes transformés d'ordre 16.

On a

$$8 + 3(16 - d) + d \leq 48$$

ou

$$8 - 2d \leq 0, \quad d \geq 4.$$

Il y aura donc un sous-groupe d'ordre 4, ou d'ordre 8, conjugué de lui-même,

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VIII.



ce qui entraîne pour le groupe cherché un sous-groupe conjugué de lui-même maximum d'ordre 24.

Ce sous-groupe d'ordre 24 ne doit pas avoir de sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Tels sont les groupes  $G_{24}^7$ ,  $G_{24}^9$ ,  $G_{12}^3$ ,  $G_2$  <sup>(1)</sup>.

Prenons d'abord  $G_{24}^7$  :

$$a^2 = b^2 = \alpha, \quad c^2 = \alpha^2 = 1, \quad ab = ba\alpha, \quad \bar{c} = (a, ab, b).$$

Voici le Tableau des opérations :

4	$a$	$a\alpha$	$b$	$b\alpha$	$ab$	$ab\alpha$
2	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$

6	$ac$	$c\alpha$	$bc$	$abc$
3	$abc^2$	$c^2$	$ac^2$	$bc^2$
2	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$
3	$ac\alpha$	$c$	$bc\alpha$	$abc\alpha$
6	$abc^2\alpha$	$c^2\alpha$	$ac^2\alpha$	$bc^2\alpha$

Le groupe des isomorphismes cogrédients sera ici d'ordre 12; cela tient à la présence de l'opération  $\alpha$ , qui est conjuguée d'elle-même dans le groupe considéré.

D'une façon générale, si  $G$  est un groupe,  $\Gamma$  le sous-groupe formé des opérations de  $G$  conjuguées d'elles-mêmes, le groupe des isomorphismes cogrédients sera simplement isomorphe à  $\frac{G}{\Gamma}$ .

Pour trouver le groupe total des isomorphismes, nous pourrions procéder comme il suit :

1° On choisit pour  $a$  l'une des six opérations  $a, a\alpha, b, b\alpha, ab, ab\alpha$ .

2° Soit  $a'$  l'opération choisie, on prendra pour  $b$  l'une des 6 opérations précédentes, à l'exception de  $a'$  et de  $a'\alpha$ ; soit  $b'$ .

3° Parmi les 6 opérations d'ordre 3,  $c, c^2, ac^2, bc^2, abc^2, ac\alpha, bc\alpha, abc\alpha$ , il faudra choisir une opération  $c'$  telle que

$$c' = (a', a'b', b').$$

(1) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

Or, écrivons d'abord le groupe des isomorphismes cogrédients :

$$\begin{aligned}
 \bar{a} &= (c, abc\alpha)(b, b\alpha)(c\alpha, abc)(c^2, bc^2)(c^2\alpha, bc^2\alpha)(ac, bc) \\
 &\quad (ac\alpha, bc\alpha)(ac^2, abc^2)(ac^2\alpha, abc^2\alpha)(ab, ab\alpha), \\
 \bar{b} &= (c, ac\alpha)(a, a\alpha)(c\alpha, ac)(c^2, abc^2)(c^2\alpha, abc^2\alpha)(bc, abc) \\
 &\quad (bc\alpha, abc\alpha)(bc^2, ac^2)(bc^2\alpha, ac^2\alpha)(ab, ab\alpha), \\
 \overline{ab} &= (c, bc\alpha)(b, b\alpha)(a, a\alpha)(c\alpha, bc)(abc, ac)(c^2, ac^2)(bc^2, abc^2) \\
 &\quad (c^2\alpha, ac^2\alpha)(bc^2\alpha, abc^2\alpha)(abc\alpha, ac\alpha), \\
 \bar{c} &= (a, ab, b)(a\alpha, ab\alpha, b\alpha)(ac, abc, bc)(ac\alpha, abc\alpha, bc\alpha) \\
 &\quad (ac^2, abc^2, bc^2)(ac^2\alpha, abc^2\alpha, bc^2\alpha), \\
 \overline{ac} &= (a, ab, b\alpha)(a\alpha, ab\alpha, b)(c, bc\alpha, abc\alpha)(c\alpha, bc, abc) \\
 &\quad (c^2, ac^2, bc^2)(c^2\alpha, ac^2\alpha, bc^2\alpha), \\
 \overline{bc} &= (a, ab\alpha, b)(a\alpha, ab, b\alpha)(c, abc\alpha, ac\alpha)(c\alpha, abc, ac) \\
 &\quad (c^2, bc^2, abc^2)(c^2\alpha, bc^2\alpha, abc^2\alpha), \\
 \overline{abc} &= (a, ab\alpha, b\alpha)(a\alpha, ab, b)(c, ac\alpha, bc\alpha)(c\alpha, ac, bc), \\
 &\quad (c^2, abc^2, ac^2)(c^2\alpha, abc^2\alpha, ac^2\alpha), \\
 \bar{c}^2 &= (a, b, ab)(a\alpha, b\alpha, ab\alpha)(ac, bc, abc)(ac\alpha, bc\alpha, abc\alpha) \\
 &\quad (ac^2, bc^2, abc^2)(ac^2\alpha, bc^2\alpha, abc^2\alpha), \\
 \overline{ac}^2 &= (a, b, ab\alpha)(a\alpha, b\alpha, ab)(c, ac\alpha, abc\alpha)(c\alpha, ac, abc) \\
 &\quad (c^2, abc^2, bc^2)(c^2\alpha, abc^2\alpha, bc^2\alpha), \\
 \overline{bc}^2 &= (a, b\alpha, ab\alpha)(a\alpha, b, ab)(c, bc\alpha, ac\alpha)(c\alpha, bc, ac) \\
 &\quad (c^2, ac^2, abc^2)(c^2\alpha, ac^2\alpha, abc^2\alpha), \\
 \overline{abc}^2 &= (a, b\alpha, ab)(a\alpha, b, ab\alpha)(c, abc\alpha, bc\alpha)(c\alpha, abc, bc) \\
 &\quad (c^2, bc^2, ac^2)(c^2\alpha, bc^2\alpha, ac^2\alpha).
 \end{aligned}$$

D'après la manière indiquée plus haut pour former les isomorphismes, si l'on fait  $a' = a$ ,  $b' = b$ , on a

$$c' = c.$$

Si  $a' = a$ ,  $b' = b\alpha$ , alors

$$c' = (a, ab\alpha, b\alpha), \quad \text{donc} \quad c' = abc\alpha.$$

On retrouve ainsi l'isomorphisme cogrédient  $\bar{a}$ .

Soit  $a' = a$ ,  $b' = ab$ , alors

$$c' = (a, b\alpha, ab),$$

donc

$$c' = abc^2.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\bar{d} = & (b, ab, b\alpha, ab\alpha)(c, abc^2, abc\alpha, ac^2) \\ & (ac, bc^2\alpha, bc, c^2\alpha)(c\alpha, abc^2\alpha, abc, ac^2\alpha)(ac\alpha, bc^2, bc\alpha, c^2).\end{aligned}$$

$$\left[ \text{En effet, } \bar{d} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & ab & abc^2 \end{pmatrix} \right]$$

On voit maintenant que l'on a

$$\bar{d}^2 = \bar{a}.$$

Vient ensuite

$$\begin{aligned}\overline{ad} = \overline{d^2} = & (b, ab\alpha, b\alpha, ab)(c, ac^2, abc\alpha, abc^2)(ac, c^2\alpha, bc, bc^2\alpha) \\ & (c\alpha, ac^2\alpha, abc, abc^2\alpha)(ac\alpha, c^2, bc\alpha, bc^2) \dots,\end{aligned}$$

Le groupe des isomorphismes est d'ordre  $24 = 3.2^3$ .

Il en résulte que les sous-groupes d'ordre 3 formeront une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

Cela posé, il s'agit d'obtenir un groupe d'ordre 48, dans lequel le sous-groupe  $G_{24}^7$ , envisagé soit un sous-groupe conjugué de lui-même.

On a d'abord le groupe  $G_{24}^7, G_2$  déjà trouvé.

Si l'on veut prendre une opération  $d$ , d'ordre 4, permutable avec toutes les opérations de  $G_{24}^7$ , il faudra que l'on ait

$$d^2 = \alpha.$$

Mais alors, on aura

$$ad = da, \quad a^2 = d^2 = \alpha.$$

Donc  $ad = d'$  sera d'ordre 2.

On retrouve  $G_{24}^7, G_2$ .

Si l'opération  $d$  donne le même isomorphisme que  $a$ , par exemple, alors on aurait  $ad = da$ .

Ensuite  $ad$  serait permutable avec toutes les opérations de  $G_{24}^7$ , et serait d'ordre 2 ou 4.

C'est un cas déjà examiné.

L'isomorphisme fourni par  $d$  sera donc un isomorphisme contragrédient.

60. Étudions de plus près le groupe des isomorphismes de  $G_{24}^7$ .

C'est un groupe d'ordre 24 qui ne contient pas de sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Il y a donc une suite complète de 4 sous-groupes conjugués d'ordre 3.

Or continuons l'énumération des isomorphismes; on a encore

$$\overline{bd} = (a, ax)(b, ab)(ac, abc^2\alpha)(cx, bc^2\alpha)(c^2\alpha, abc)(bc, ac^2\alpha) \\ (ac\alpha, abc^2)(c, bc^2)(c^2, abc\alpha)(ac^2, bc\alpha)(ab\alpha, b\alpha),$$

$$\overline{abd} = (a, ax)(b, abx)(bx, ab)(cx, c^2\alpha)(bc, abc^2\alpha)(abc, bc^2\alpha) \\ (ac, ac^2\alpha)(c, c^2)(bcx, abc^2)(abcx, bc^2)(ac\alpha, ac^2),$$

$$\overline{cd} = (a, b\alpha, ax, b)(c, abc^2, bcx, bc^2)(cx, abc^2\alpha, bc, bc^2\alpha) \\ (c^2, ac\alpha, ac^2, abc\alpha)(c^2\alpha, ac, ac^2\alpha, abc),$$

$$\overline{acd} = (a, bx)(ab, abx)(ax, b)(c, c^2)(c\alpha, c^2\alpha)(bc\alpha, ac^2)(bc, ac^2\alpha) \\ (abc\alpha, abc^2)(abc, abc^2\alpha)(bc^2ac\alpha)(bc^2\alpha, ac),$$

$$\overline{bcd} = (a, b)(ax, b\alpha)(ab, abx)(c, ac^2)(cx, ac^2\alpha)(abc, bc^2\alpha)(abc\alpha, bc^2) \\ (ac, abc^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(c^2, bc\alpha)(c^2\alpha, bc),$$

$$\overline{abcd} = (a, b, a\alpha, b\alpha)(c, bc^2, bcx, abc^2)(cx, bc^2\alpha, bc, abc^2\alpha) \\ (c^2, abc\alpha, ac^2, ac^2\alpha)(c^2\alpha, abc, ac^2\alpha, ac),$$

$$\overline{c^2d} = (a, ab)(ax, abx)(b, bx)(c, abc^2)(cx, abc^2\alpha)(ac, c^2\alpha)(ac\alpha, c^2) \\ (bc, ac^2\alpha)(bcx, ac^2)(abc, bc^2\alpha)(abc\alpha, bc^2),$$

$$\overline{ac^2d} = (a, ab, ax, abx)(c, bc^2, ac\alpha, ac^2)(cx, bc^2\alpha, ac, ac^2\alpha) \\ (abc, abc^2\alpha, bc, c^2\alpha)(abc\alpha, abc^2, bc\alpha, c^2),$$

$$\overline{bc^2d} = (a, ab\alpha)(ax, ab)(b, b\alpha)(c, c^2)(cx^2, c^2\alpha)(bc, bc^2\alpha) \\ (ac, abc^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(ac^2, abc\alpha)(ac^2\alpha, abc),$$

$$\overline{abc^2d} = (a, abx, ax, ab)(c, ac^2, acx, bc^2)(cx, ac^2\alpha, ac, bc^2\alpha) \\ (abc, c^2\alpha, bc, abc^2\alpha)(abc\alpha, c^2, bcx, abc^2).$$

Soit

$$\overline{bd} = a', \quad \overline{c} = b'.$$

On a

$$a'^2 = 1, \quad b'^2 = 1,$$

$$a'b' = (a, ab\alpha, ax, ab)(c, ac^2, ac\alpha, bc^2)(ac, bc^2\alpha, c\alpha, ac^2\alpha) \\ (abc^2\alpha, abc, c^2\alpha, bc)(abc^2, abc\alpha, c^2, bc\alpha).$$

Donc

$$a'^2 = b'^2 = 1, \quad (a'b')^4 = 1.$$

Donc, le groupe des isomorphismes de  $G_{2,1}^7$ , est isomorphe avec le groupe  $G_{2,1}^9$ , ou le groupe symétrique de 4 lettres.

61. Le groupe  $G_{2,1}^9$ , est bien connu : on voit donc, par cette remarque qui termine le n° 60, que les isomorphismes contragrédients d'ordre 4 du groupe  $G_{2,1}^7$ , forment une suite complète de 3 groupes conjugués d'ordre 4.

Les isomorphismes contragrédients d'ordre 2 forment une suite complète de 6 groupes conjugués d'ordre 2.

Prenons d'abord un isomorphisme contragrédient d'ordre 4.

(Puisque  $\overline{d^2} = \bar{a}$ , on aura  $d^2 = a$ ,  $d^4 = a^2 = 1$ .)

Posons

$$a^4 = b^4 = \alpha, \quad c^4 = \alpha^2 = 1.$$

$$\bar{a} = (b, a^2b, b\alpha, a^2b\alpha)(c, a^2bc^2, a^2bc\alpha, a^2c^2)(a^2c, bc^2\alpha, bc, c^2\alpha), \\ (c\alpha, a^2bc^2\alpha, a^2bc, a^2c^2\alpha)(a^2c\alpha, bc^2, bc\alpha, c^2);$$

$$\bar{c} = (a^2, a^2b, b)(a^2\alpha, a^2b\alpha, b\alpha)(a^2c, a^2bc, bc)(a^2c\alpha, a^2bc\alpha, bc\alpha), \\ (a^2c^2, a^2bc^2, bc^2)(a^2c^2\alpha, a^2bc^2\alpha, bc^2\alpha).$$

D'ailleurs on a

$$ac = a^2c^2a = a^2c.ca = ca^2bca = ca^2c^2\alpha,$$

$$a^2c^2\alpha.c = a^2\alpha = c.c^2a^2\alpha = c.a^2bc,$$

$$a^2bc.c = a^2bc^2 = a^2ca^2c = aca^2ba^2c = acbc = ca^2c^2\alpha bc = ca^2c^2\alpha ca^2 = ca.$$

On a donc

$$\bar{c} = (a, a^2c^2\alpha, a^2bc).$$

Posons  $ab = b'$ , d'où

$$a^4 = 1, \quad b'^4 = 1,$$

car

$$ab = a^2ba\alpha, \quad b = aba^2, \quad ab = ba^2, \\ (ab)^2 = ab^2a^2 = a^4b^2 = \alpha^2 = 1.$$

On a donc

$$a^4 = b'^4 = 1, \quad ab' = b'a^2,$$

puis

$$\bar{c} = (a, a^2c^2, a^2b'c)(b', b'c^2, b'c),$$

car

$$abc = aca^2 = ca^2c^2a^2 = ca^2.a^2bc^2 = c.abc^2 = cb'c^2,$$

$$b'c^2.c = b' = c.c^2b' = c.c^2ab = c.a^2c^2.c^2b = c.a^2cb = c.a^2a^2bc = c.abc = cb'c,$$

enfin

$$b'c.c = b'c^2 = abc^2 = abc.c = aca^2c = ca^2c^2a^2c = ca^2.a^2bc^2 = cb'.$$

Le groupe  $G_{16}^{30}$  sera donc défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^4 = 1, \quad ab = ba^2,$$

$$\bar{c} = (a, a^2c^2, a^2bc)(b, bc^2, bc).$$

62. Prenons maintenant un isomorphisme contragrédient, d'ordre 2.

Soient  $a^2 = b^2 = x$ ,  $c^3 = x^2 = 1$ ,  $ab = ba x$ ,  $\bar{c} = (a, ab, b)$ ,  $d^2 = x^m$ ,

$$\begin{aligned} \bar{d} = & (a, a x) (b, ab) (ac, abc^2 x) (c x, abc^2 x) (c x, bc^2 x) (c^2 x, abc) \\ & (bc, ac^2 x) (ac x, abc^2) (c, bc^2) (c^2, abc x) (ac^2, bc x) (ab x, b x). \end{aligned}$$

Considérons l'opération  $bd = d'$ .

On a

$$bd = dab,$$

$$(bd)^2 = bd^2 ab = bab x^m = ab^2 x^{m+1} = a x^m.$$

Donc

$$d'^2 = a x^m, \quad a = d'^2 x^m,$$

$$d'^2 = a^2 = x.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \bar{d}' = & (b, ab, b x, ab x) (c, abc^2, abc x, ac^2) \\ & (c x, abc^2 x, abc, ac^2 x) (c^2, ac x, bc^2, bc x) \\ & (c^2 x, ac, bc^2 x, bc). \end{aligned}$$

On retrouve, par conséquent, le groupe  $G_{48}^{30}$ .

63. Je me propose, avant de terminer la discussion, d'énumérer les opérations de ce groupe  $G_{48}^{30} (1)$ .

$G_{48}^{30}$  est défini par les équations

$$\begin{aligned} a^4 = b^2 = c^3 = 1, \quad ab = ba^3, \\ \bar{c} = (a, a^2 c^2, a^2 bc) (b, bc^2, bc). \end{aligned}$$

On a d'abord le Tableau I :

8	$a$	$a^3$				
4	$a^2$	$a^2 x$		$ab$		$a^3 b$
2	$x$	$x$	$b$	$x$	$a^2 b$	$x$

ce qui donne

4	opérations d'ordre	8,
6	»	4,
5	»	2.

Maintenant  $(ac)^2 = acac$ , mais

$$a^2 bc \cdot c = ca, \quad ca = a^2 bc^2;$$

---

(1) Le lecteur désireux de suivre simplement la discussion pourra passer ce numéro.

donc

$$\begin{aligned}(ac)^2 &= a \cdot a^2 bc^2 \cdot c = a^3 b, \\ (ac)^3 &= a^3 bac = a^5 bc = a^2 bcx, \\ (ac)^4 &= \alpha, \quad (ac)^5 = acx, \quad (ac)^6 = a^3 bx.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\bar{c} &= (a^2, ab, a^3 bx) (a^2 c, abc, a^3 bcx) (a^2 c^2, abc^2, a^3 bc^2 x) (a, a^3 c^2 x, a^2 bc) \\ &\quad (a^2 x, abx, a^3 b) (a^2 cx, abcx, a^3 bc) (a^2 c^2 x, abc^2 x, a^3 bc^2) (ax, a^3 c^2, a^2 bcx) \\ &\quad (b, bc^2, bc) (a^2, a^3 bc^2 x, acx) (ac^2, a^3 cx, a^2 b) \\ &\quad (bx, bc^2 x, bcx) (a^2 x, a^2 bc^2, ac) (ac^2 x, a^2 c, a^2 bx).\end{aligned}$$

En effet, puisque

$$ac = ca^3 c^2 x, \quad a^2 c = cab,$$

on a

$$(a^3 c^2 x)^2 = ab;$$

donc

$$(a^3 c^2 x)^3 = ab a^3 c^2 x = a^2 bc^2 x.$$

De même

$$(a^2 bc)^2 = a^3 bx, \quad (a^2 bc)^3 = a^3 ba^2 bcx = a^2 b^2 cx = acx.$$

On peut écrire le Tableau II :

8	$ac$	$a^2 bcx$	$a^3 c^2$	$a^2 bc^2$
4	$a^3 b$	$a^3 bx$	$ab$	$abx$
2	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$

ce qui donne

8 opérations d'ordre 8.

Maintenant

$$\begin{aligned}(a^2 c)^2 &= a^2 ca^2 c = a^3 \cdot a^3 bx \cdot c^2 = abc^2, \\ (a^2 c)^3 &= a^2 cabc^2 = a^2 \cdot a^2 c \cdot c^2 = \alpha.\end{aligned}$$

De là le Tableau III :

6	$a^2 c$	$abc$	$cx$	$a^3 bcx$
3	$abc^2$	$a^3 bc^2 x$	$c^2$	$a^2 c^2$
2	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$
3	$a^2 cx$	$abcx$	$c$	$a^3 bc$
6	$abc^2 x$	$a^3 bc^2$	$c^2 x$	$a^2 c^2 x$

qui donne

8 opérations d'ordre 6

et

8 opérations d'ordre 3.

Puis enfin le Tableau IV :

$$2 \parallel a^3 c \mid bc \mid bc^2 \mid ac^2 \parallel$$

qui donne

8 opérations d'ordre 2.

Ces deux Tableaux sont justifiés par les égalités suivantes :

$$(a^3 c)^2 = a^3 c a^3 c = a^3 . a c a . c^2 = 1 .$$

$$(bc)^2 = b c b c = b . b c^2 . c = 1 ,$$

$$\{ (abc)^2 = a b c a b c = a b . a^2 c^2 = a^2 b c^2 = a^3 b c^2 a ,$$

$$\{ (abc)^3 = a b c a^3 b c^2 a = a b . a b c a . c^2 a = a ;$$

$$\{ (a^3 b c)^2 = a^3 b c a^3 b c = a^3 b . a b c a . c = a^3 c^2 ,$$

$$\{ (a^3 b c)^3 = a^3 b c a^2 c^2 = a^3 b . a^2 b a = 1 ;$$

$$\{ (a^3 c^2)^2 = a^3 c^2 a^3 c^2 = a^3 . a^2 b c a . c^2 = a b ,$$

$$\{ (a^3 c^2)^3 = a b a^3 c^2 = a^2 b c^2 ;$$

$$(bc^2)^2 = b c^2 b c^2 = b . b c . c^2 = 1 ,$$

$$(ac^2)^2 = a c^2 a c^2 = a . a^3 c a . c^2 = 1 .$$

Le groupe  $G_{18}^{30}$  a donc

12 opérations d'ordre 8,

6 " 4,

13 " 2,

8 " 6,

8 " 3.

64. Passons au groupe  $G_{12}^3 G_2$ , défini par les équations

$$a^3 = b^3 = c^3 = d^3 = 1, \quad ab = ba, \quad ad = da, \quad bd = db, \quad cd = cd,$$

$$\bar{c} = (a, b, ab), \quad \bar{c}^2 = (a, ab, b).$$



Voici d'abord le Tableau des opérations :

$$\begin{array}{c}
 2 \parallel a, b, d, ab, ad, bd, abd \\
 \begin{array}{c|c|c|c|c}
 6 & cd & acd & bcd & abcd \\
 \hline
 3 & c^2 & bc^2 & abc^2 & ac^2 \\
 \hline
 2 & d & d & d & d \\
 \hline
 3 & c & ac & bc & abc \\
 \hline
 6 & c^2d & bc^2d & abc^2d & ac^2d
 \end{array}
 \end{array}$$

car

$$\begin{cases}
 (ac)^2 = acac = a \cdot abc^2 = bc^2, \\
 acbc^2 = a \cdot ac \cdot c^2 = 1; \\
 bc \cdot bc = b \cdot ac \cdot c = abc^2, \\
 bc \cdot abc^2 = b \cdot bc \cdot c^2 = 1; \\
 abc \cdot abc = ab \cdot bc \cdot c = ac^2, \\
 abc \cdot ac^2 = ab \cdot abc^2 = 1.
 \end{cases}$$

63. Cherchons tous les isomorphismes de  $G_{12}^3 G_2$ .

Écrivons d'abord les isomorphismes cogrédients.

Soit l'opération  $a$ ; elle est permutable avec  $b$  et  $d$  :

$$\begin{aligned}
 ca &= abc, & bca &= babc = ac, \\
 c^2a &= bc^2 = a \cdot abc^2, & abc^2a &= ab \cdot bc^2 = ac^2.
 \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
 \bar{a} &= (c, bc) (c^2, abc^2) (ac, abc) (ac^2, bc^2) (cd, bcd) (c^2d, abc^2d) (acd, abcd) (ac^2d, bc^2d), \\
 cb &= ac = b \cdot abc, & c^2b &= abc^2 = b \cdot ac^2.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \bar{b} &= (c, abc) (c^2, ac^2) (bc, ac) (bc^2, abc^2), (cd, abcd) (c^2d, ac^2d) (bcd, acd) (bc^2d, abc^2d), \\
 \bar{ab} &= (c, ac) (c^2, bc^2) (abc, bc) (abc^2, ac^2) (cd, acd) (c^2d, bc^2d) (abcd, bcd) (abc^2d, ac^2d), \\
 \bar{c} &= (a, b, ab) (ac, bc, abc) (ac^2, bc^2, abc^2) (ad, bd, abd) (acd, bcd, abcd) (ac^2d, bc^2d, abc^2d), \\
 \bar{c^2} &= (a, ab, b) (ac, abc, bc) (ac^2, abc^2, bc^2) (ad, abd, bd) (acd, abcd, bcd) (ac^2d, abc^2d, bc^2d), \\
 \bar{ac} &= (a, b, ab) (c, abc, bc) (c^2, ac^2, abc^2) (ad, bd, abd) (cd, abcd, bcd) (c^2d, ac^2d, abc^2d), \\
 \bar{bc} &= (a, b, ab) (c, ac, abc) (c^2, bc^2, ac^2) (ad, bd, abd) (cd, acd, abcd) (c^2d, bc^2d, ac^2d), \\
 \bar{abc} &= (a, b, ab) (c, bc, ac) (c^2, abc^2, bc^2) (ad, bd, abd) (cd, bcd, acd) (c^2d, abc^2d, bc^2d), \\
 \bar{ac^2} &= (a, ab, b) (c, ac, bc) (c^2, bc^2, abc^2) (ad, abd, bd) (cd, acd, bcd) (c^2d, bc^2d, abc^2d), \\
 \bar{bc^2} &= (a, ab, b) (c, bc, abc) (c^2, abc^2, ac^2) (ad, abd, bd) (cd, bcd, abcd) (c^2d, abc^2d, ac^2d), \\
 \bar{abc^2} &= (a, ab, b) (c, abc, ac) (c^2, ac^2, bc^2) (ad, abd, bd) (cd, abcd, acd) (c^2d, ac^2d, bc^2d).
 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énumérer les suites complètes d'opérations conjuguées du groupe.

- |                             |                                     |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| (1). L'opération identique. | (2). L'opération $d$ .              |
| (3). $a, b, ab$ .           | (4). $ad, bd, abd$ .                |
| (5). $c, bc, abc, ac$ .     | (6). $c^2, abc^2, ac^2, bc^2$ .     |
| (7). $cd, bcd, abcd, acd$ . | (8). $c^2d, abc^2d, ac^2d, bc^2d$ . |

Dans chaque isomorphisme l'opération  $d$  joue un rôle à part et ne pourra être remplacée que par elle-même.

$a$  pourra être remplacé par  $a, b, ab$  (3 combinaisons possibles).

Soit  $a'$  l'opération choisie pour  $a$ .

$b$  pourra être prise parmi les 3 opérations  $a, b, ab$ , à l'exclusion de l'opération  $a'$  (2 combinaisons possibles).

Appelons  $b'$  l'opération choisie pour  $b$ .

Reste à choisir  $c'$  par la condition

$$\overline{c'} = (a', b', a'b') \quad (4 \text{ combinaisons possibles}).$$

En tout, il y a 24 isomorphismes.

Nous venons de dire que  $a$  ne peut être remplacé que par  $a, b$ , ou  $ab$ .

On peut se demander pourquoi il est impossible de remplacer  $a$  par  $ad$ , par exemple.

Soit, je suppose,  $a' = ad, b' = bd$ , alors

$$a'b' = ab.$$

Mais il n'existe pas d'opération  $c'$  telle que

$$\overline{c'} = (ad, bd, ab),$$

et il est clair que, sur trois opérations d'ordre 2 telles que l'une soit le produit des deux autres, il y en aura deux (ou il n'y en aura aucune) contenant  $d$ , jamais trois.

Cela posé, on a

$$\begin{aligned} \overline{f} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & ab & c^2 \end{pmatrix} &= (b, ab)(c, c^2)(bd, abd)(cd, c^2d)(ac, ac^2) \\ &\quad (acd, ac^2d)(bc^2, abc)(bc^2d, abcd)(bc, abc^2)(bcd, abc^2d). \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \overline{acf} &= (a, ab)(c, bc^2, abc, abc^2)(c^2, ac, ac^2, bc) \\ &\quad (ad, abd)(cd, bc^2d, abcd, abc^2d)(c^2d, acd, ac^2d, bcd). \end{aligned}$$

Voici, d'après cela, les suites complètes d'opérations conjuguées :

- (1). L'opération identique,
- (2).  $a, b, ab$ ,
- (3).  $c, bc, ac, abc, c^2, bc^2, ac^2, abc^2$ ,
- (4).  $d, ad, cd, c^2d, bcd, abc^2d$ ,
- (5).  $bd, abd; acd, abcd; ac^2d, bc^2d$ .

Y a-t-il des isomorphismes contragrédients?

Cherchons l'ordre total du groupe des isomorphismes.

On pourra prendre pour  $a$  l'une des trois opérations  $a, b, ab$  (3 combinaisons possibles).

Soit  $a'$  l'opération choisie pour  $a$ .

On pourra prendre ensuite pour  $b$  l'une des deux opérations qui restent, après qu'on a supprimé  $a'$  (2 combinaisons possibles).

Soit  $b'$  l'opération choisie pour  $b$ .

Il faudra ensuite choisir  $c$  parmi les 8 opérations

$$c, bc, ac, abc, c^2, bc^2, ac^2, abc^2,$$

de façon que, en appelant  $c'$  l'opération choisie pour  $c$ , on ait

$$c' = (a', b', a'b') \quad (4 \text{ combinaisons possibles}).$$

Enfin  $d$  devra être choisi parmi les 6 opérations

$$d, ad, cd, c^2d, bcd, abc^2d,$$

de façon que, en appelant  $d'$  l'opération choisie, on ait

$$d' = (a', a'b')(c', c'^2),$$

$d'$  sera ainsi complètement déterminé.

L'ordre du groupe des isomorphismes est donc 24.

*Autrement* : partons des équations de définition

$$a'^2 = b'^2 = 1, \quad (a'b')^2 = 1.$$

Prenons pour  $b'$  l'une des huit opérations d'ordre 3.

Parmi les opérations de la suite (4) il y en a trois qui, avec l'une des opérations de la suite (3), donnent comme produit une opération d'ordre 4.

Par exemple, avec  $c$ , il faut prendre  $ad$ , ou  $bcd$ , ou  $abc^2d$ , car

$$cad = abcd, \quad cbcd = ac^2d, \quad cabcd = bd.$$

Donc l'ordre du groupe des isomorphismes est bien 24.

Il n'y a pas d'isomorphismes contragrédients.

On appelle *groupe complet* un groupe qui n'admet pas d'opération conjuguée d'elle-même, à l'exception de l'opération identique, et qui n'a pas d'isomorphismes contragrédients.

Le groupe  $G_{2,1}^9$  est donc un groupe complet <sup>(1)</sup>.

Le théorème suivant a d'ailleurs été démontré <sup>(2)</sup> :

*Un groupe qui contient un groupe complet comme sous-groupe conjugué de lui-même est le produit direct du groupe complet et d'un autre groupe.*

Il en résulte que le seul groupe possible d'ordre 48 admettant  $G_{2,1}^9$  comme sous-groupe conjugué de lui-même est  $G_{2,1}^9 G_2$ .

*Résumé des groupes d'ordre  $16p$  ( $p$  premier impair).*

$$\begin{aligned} G_{16p} &= G_{16} G_p, & G_8 G_2 G_p &= G_{8p} G_2 = G_{2p} G_8, \\ G_{8p}^1 G_2, & G_{8p}^2 G_2, & G_{8p}^3 G_2, & G_{2p}^1 G_8, \\ (G_4)^2 G_p &= G_{4p} G_4, & G_{4p}^1 G_4, & G_{2p}^2 G_4, \\ G_4 (G_2)^2 G_p &= G_{4p} (G_2)^2 = G_{2p} G_4 G_2, \\ G_{4p}^1 (G_2)^2, & G_{2p}^2 (G_2)^2, & G_{2p}^1 G_4 G_2, \\ G_p (G_2)^4 &= G_{2p} (G_2)^3, & G_{2p}^1 (G_2)^3, \\ G_8^1 G_2 G_p &= G_8^1 G_{2p}, & G_{8p}^1 G_2, & G_{8p}^2 G_2, & G_8^1 G_{2p}^1, \\ G_8^2 G_2 G_p &= G_8^2 G_{2p}, & G_{8p}^3 G_2, & G_8^2 G_{2p}^1, \\ G_{16}^1 G_p, & G_{16}^2 G_p, & G_{16}^3 G_p, & G_{16}^4 G_p, & G_{16}^5 G_p, & G_{16}^6 G_p, & G_{16}^7 G_p, \\ G_{12}^1 G_4, & G_{12}^2 (G_2)^2, & G_{12}^3 G_2, & G_{12}^4 G_2, & G_{12}^5 G_2. \end{aligned}$$

$$G_{16p}^1 \quad [\alpha^{16} = b^p = 1, \quad ba = ab^2, \quad \alpha \text{ appartient à l'exposant } 2 \pmod{p}],$$

$$G_{16p}^2 \quad [\alpha^{16} = b^p = 1, \quad ba = ab^2, \quad \alpha \text{ appartient à l'exposant } 4 \pmod{p}],$$

$$G_{16p}^3 \quad [\alpha^{16} = b^p = 1, \quad ba = ab^2, \quad \alpha \text{ appartient à l'exposant } 8 \pmod{p}],$$

$$G_{16p}^4 \quad [\alpha^{16} = b^p = 1, \quad ba = ab^2, \quad \alpha \text{ appartient à l'exposant } 16 \pmod{p}],$$

$$G_{16p}^5 \quad [\alpha^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba, \quad ca = ac^2, \quad cb = bc^{-1}, \\ \alpha \text{ appartient à l'exposant } 4 \pmod{p}],$$

<sup>(1)</sup> Voir O. HÖLDER, *Bildungszusammengesetzter Gruppen* (Math. Ann., Vol. XLVI, 1895, p. 325).

<sup>(2)</sup> Voir BURNSIDE, *Theory of Groups of finite order*, théorème V, § 163.



- $G_{16p}^6$  ( $a^8 = b^2 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $ca = ac^{-1}$ ,  $cb = bc$ ),  
 $G_{16p}^7$  [ $a^8 = b^2 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $ca = ac^2$ ,  $cb = bc$ ,  
 $\alpha$  appartient à l'exposant  $4 \pmod{p}$ ],  
 $G_{16p}^8$  ( $a^8 = b^2 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $ca = ac$ ,  $cb = bc^{-1}$ ),  
 $G_{16p}^9$  [ $a^8 = b^2 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $ca = ac^2$ ,  $cb = bc^{-1}$ ,  
 $\alpha$  appartient à l'exposant  $4 \pmod{p}$ ],  
 $G_{16p}^{10}$  ( $a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1$ ,  $ac = ca$ ,  $bc = cb$ ,  $ab = bac^2$ ,  $da = ad$ ,  $db = bd$ ,  $dc = cd^{-1}$ ),  
 $G_{16p}^{11}$  ( $a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1$ ,  $ac = ca$ ,  $bc = cb$ ,  $ab = bac^2$ ,  $da = ad$ ,  $db = bd^{-1}$ ,  $dc = cd$ ),  
 $G_{16p}^{12}$  ( $a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1$ ,  $ac = ca$ ,  $bc = cb$ ,  $ab = bac^2$ ,  $da = ad^{-1}$ ,  $db = bd^{-1}$ ,  $dc = cd$ ),  
 $G_{16p}^{13}$  ( $a^4 = b^4 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $ca = ac^{-1}$ ,  $cb = bc$ ),  
 $G_{16p}^{14}$  ( $a^4 = b^4 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $ca = ac$ ,  $cb = bc^{-1}$ ),  
 $G_{16p}^{15}$  [ $a^4 = b^4 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $ca = ac$ ,  $cb = bc^2$ ,  
 $\alpha$  appartient à l'exposant  $4 \pmod{p}$ ],  
 $G_{16p}^{16}$  ( $a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1$ ,  $ac = ca$ ,  $bc = cb$ ,  $ab = bac$ ,  $da = ad^{-1}$ ,  $db = bd$ ,  $dc = cd$ ),  
 $G_{16p}^{17}$  [ $a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1$ ,  $ac = ca$ ,  $bc = cb$ ,  $ab = bac$ ,  $da = ad^2$ ,  $db = bd$ ,  $dc = cd$ ,  
 $\alpha$  appartient à l'exposant  $4 \pmod{p}$ ],  
 $G_{16p}^{18}$  ( $a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1$ ,  $ac = ca$ ,  $bc = cb$ ,  $ad = bac$ ,  $da = ad$ ,  $db = bd^{-1}$ ,  $dc = cd$ ),  
 $G_{16p}^{19}$  ( $a^8 = b^4 = c^p = 1$ ,  $a^4 = b^2$ ,  $ab = ba^7$ ,  $ca = ac$ ,  $cb = bc^{-1}$ ),  
 $G_{16p}^{20}$  ( $a^8 = b^4 = c^p = 1$ ,  $a^4 = b^2$ ,  $ab = ba^7$ ,  $ca = ac^{-1}$ ,  $cb = bc$ ),  
 $G_{16p}^{21}$  ( $a^8 = b^2 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $ac = ca$ ,  $cb = bc^{-1}$ ),  
 $G_{16p}^{22}$  ( $a^8 = b^2 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $ca = ac^{-1}$ ,  $cb = bc$ ),  
 $G_{16p}^{23}$  ( $a^8 = b^2 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $ca = ac^{-1}$ ,  $cb = bc^{-1}$ ),  
 $G_{16p}^{24}$  ( $a^8 = b^2 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^7$ ,  $ca = ac$ ,  $cb = bc^{-1}$ ),  
 $G_{16p}^{25}$  ( $a^8 = b^2 = c^p = 1$ ,  $ab = ba^7$ ,  $ca = ac^{-1}$ ,  $cb = bc$ ),  
 $G_{16p}^{26}$  [ $a^4 = b^4 = c^2 = 1$ ,  $ab = ba$ ,  $\bar{c} = (a, b, a^2 b^2)$ ],  
 $G_{16p}^{27}$  ( $a^{(2, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)} = b^2 = 1$ ,  $ab = ba^x$ ),  
 $G_{16p}^{28}$  ( $a^{(2, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)} = b^2 = 1$ ,  $ab = ba^{x^2 + x^3}$ ),  
 $G_{16p}^{29}$  [ $a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1$ ,  $ab = bac^2$ ,  $ac = ca$ ,  $bc = cb$ ,  $cd = dc$ ,  $\bar{d} = (a, b, abc)$ ],  
 $G_{16p}^{30}$  [ $a^8 = b^2 = c^2 = 1$ ,  $ab = ba^3$ ,  $\bar{c} = (a, a^7 c^2, a^2 bc)(b, bc^2, bc)$ ].





---

## RÉPONSE A M. BOUASSE

(*Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 4<sup>e</sup> fasc., p. 443; 1907).

NOTE DE MM. A. LEDUC ET P. SACERDOTE.

---

Le dernier Mémoire de M. Bouasse comprend un violent réquisitoire contre un certain nombre de Savants qui ont osé aborder des questions ayant quelque rapport avec *son sujet*, sans compter les « Traités classiques », en bloc, qui « font de toutes ces notions la plus incroyable bouillie ».

Comme M. Bouasse nous comprend parmi ceux auxquels il distribue ses *aménités*, nous serions en droit de lui répondre sur le même ton de pamphlet. Nous ne le ferons pas; car nous nous félicitons de la courtoisie générale des discussions scientifiques.

Il nous serait facile, assurément, de montrer que si, comme le prétend M. Bouasse, nous « ignorons jusqu'au premier mot d'une question archiclasique », lui-même ferait bien d'étudier un peu certaines questions de Physique élémentaire, et notamment l'ébullition. Mais nous ne nous arrêterons pas à ce genre de plaisanteries trop faciles.

Ce qui est beaucoup plus grave, c'est qu'en dehors des termes blessants dont il est coutumier, et qu'il ne nous plaît pas de relever, M. Bouasse commet un acte que nous laisserons à chacun le soin de qualifier, en FALSIFIANT une citation de manière à en altérer complètement le sens, ainsi qu'on va le voir.

Voici d'abord le texte du passage emprunté par lui à l'Ouvrage de M. Violle (t. I, p. 657) :

..., la goutte se gonfle ensuite aisément, comme dans un petit sac élastique dont la tension diminue à mesure que le sac grossit. Puis, lorsque la goutte est devenue assez volumineuse, elle s'étrangle TRÈS LÉGÈREMENT à sa partie supérieure, et SE ROMPT suivant une circonférence d'un diamètre peu différent de celui de l'orifice. LA GOUTTE SE DÉTACHE donc LORSQUE SON POIDS EST INFINIMENT PEU SUPÉRIEUR A LA TENSION SUPERFICIELLE LE LONG DU CERCLE DE GORGE, et comme le diamètre de ce cercle de gorge peut être supposé proportionnel au diamètre de l'orifice, on voit que, toutes choses égales d'ailleurs, le poids des gouttes sera proportionnel au diamètre de l'orifice, et non pas au carré de ce diamètre, ainsi que cela devrait être si chaque goutte était supportée par une force agissant sur toute la surface du cercle de gorge.



C'est bien là l'explication classique <sup>(1)</sup> que nous avons combattue. On y admet, bien à tort, que le sac élastique formé par la membrane superficielle, après s'être *étranglé légèrement*, se déchire suivant le cercle de gorge lorsque sa résistance à la rupture ( $2\pi rF$ ) est surpassée par le poids du liquide contenu dans le sac.

*Nous avons montré* que les choses se passent tout autrement, et *que la goutte se sépare, non par rupture, mais par étranglement complet*, comme si l'on tirait sur les deux bouts d'un fil enroulé sur la gorge.

Eh bien ! pour établir que nous redressons des *erreurs imaginaires*, M. Bouasse n'hésite pas à *tronquer le texte* de M. Violle, et à en supprimer (sans même l'indiquer par des points suspensifs) tous les mots dont la présence le générerait vraiment trop. Entre ses mains habiles, le texte devient ceci (reproduction intégrale) :

La goutte se gonfle... comme dans un sac élastique...; elle *s'étrangle* à sa partie supérieure; le poids n'est pas proportionnel au carré du diamètre, comme cela devrait être si chaque goutte était supportée par une force agissant sur toute la surface du cercle de gorge.

Ainsi les mots TRÈS LÉGÈREMENT et SE ROMPT sont omis, comme par hasard, et le (;) remplace tout ce qui est contraire à ce que l'on veut prouver.

Le tour est simple; mais il n'abusera personne.

En présence d'un pareil procédé, nous tenons à déclarer ici que, quelles que soient les nouvelles invectives dont il plaira à M. Bouasse de nous assaillir, nous n'y répondrons pas.

(1) On retrouve cette explication dans tous les classiques, ainsi que dans le Mémoire de M. Duclaux (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 4<sup>e</sup> série, t. XXI, 1870, au bas de la page 388) :

« Puis, lorsque la goutte est assez volumineuse, ce sac *se creuse très faiblement* en gorge à sa partie supérieure, au voisinage du tube, et il semble qu'à ce moment la chute de la goutte ne s'effectue que parce que *l'enveloppe élastique se brise* suivant une circonférence... ».



---

## REMARQUE SUR LA RÉPONSE DE MM. LEDUC ET SACERDOTE,

PAR M. H. BOUASSE,

Professeur à l'Université de Toulouse.




MM. Leduc et Sacerdote m'accusent d'avoir faussé le texte de M. Violle pour prouver que M. Violle connaissait les phénomènes. Je soutiens que la citation complète a exactement le même sens que ma citation tronquée. Il faut distinguer en effet deux stades dans le phénomène, un stade où l'équilibre existe encore; la goutte s'étrangle très légèrement. Puis l'équilibre ne peut plus subsister, elle se rompt *par étranglement* à partir d'une circonférence d'un diamètre peu différent de celui de l'orifice, c'est-à-dire que l'étranglement se propage brusquement. La preuve que telle est bien la pensée de l'auteur est au renvoi qui suit immédiatement le mot « orifice ». Voici cette Note :

C'est par suite de la formation et de l'étranglement *complet* d'un pareil sac qu'un grain de plomb peut traverser une membrane de liquide glycérique sans la crever.

Si je n'ai pas jugé à propos de citer tout le passage, c'est qu'il me semblait que quand un auteur dit explicitement que les forces de cohésion n'interviennent pas, on ne peut pas supposer qu'il veut dire que la rupture se fait contre ces forces de cohésion. C'est lui prêter une absurdité gratuite. D'ailleurs MM. Leduc et Sacerdote ne songent pas à répondre à ce que dit Plateau sur le sectionnement des cylindres pleins et creux.

Quant à la distinction de l'équilibre et du non-équilibre que je fais ci-dessus, rien n'est plus facile que de répéter l'expérience pour se convaincre de sa nécessité.

Enfin MM. Leduc et Sacerdote ne trouvent rien à objecter à tout ce que je dis sur l'historique de la cohésion et sur le degré de nouveauté de leurs expériences. Je maintiens donc mes conclusions.





# ORIGINAL ARTICLES

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

# TABLE DES MATIÈRES (FASCICULE N° 1, 1905).

Recherches sur l'Hydrodynamique; par M. P. DUBREUIL. . . . .  
groupes d'ordre 16 p; par M. R. LE VASSEUR. . . . .  
Ombre à M. BOUASSE; Note de MM. A. LEDUC et P. SACERDOTE. . . . .  
sur la réponse de MM. Leduc et Sacerdote; par M. H. BOUASSE. . . . .

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6<sup>e</sup>).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

ELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences.  
Traité de Mécanique rationnelle. (Cours de Mécanique de la Faculté  
des Sciences.) 3 volumes grand in-8 se vendant séparément.

I. — Statique. Dynamique du point. 2<sup>e</sup> édition entièrement ré-  
visée, avec 178 figures; 1903. . . . . 18 fr.

II. — Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. 2<sup>e</sup> édition.  
avec 99 figures. . . . . (Sans presse.)

III. — Équilibre et mouvement des milieux continus, avec 70 figures;  
1904. . . . . 17 fr.

LLAUD (B.), Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse, Directeur  
l'Observatoire. — Cours d'Astronomie à l'usage des étudiants des  
sciences. 2 volumes grand in-8, se vendant séparément:

I<sup>re</sup> PARTIE: Quelques théories applicables à l'étude des sciences expé-  
rimentales. — Probabilités, erreurs des observations. — Instruments  
Optique. — Instruments d'Astronomie. — Calculs numériques, inter-  
polations, avec 38 figures; 1891. . . . . 8 fr.

II<sup>e</sup> PARTIE: Astronomie sphérique. — Mouvements dans le système  
solaire. Éléments géographiques. Reliqua. Astronomie moderne, avec  
figures; 1896. . . . . 15 fr.

RANGE. — Œuvres complètes de Lagrange, publiées par les soins  
J.-A. Serret et G. Darboux, Membres de l'Institut, sous les auspices  
le Ministère de l'Instruction publique. In-4, avec un beau portrait de  
l'auteur, gravé sur cuivre par Ach. Martinet.

La I<sup>re</sup> Série comprend tous les Mémoires imprimés dans les Recueils  
Académiques de Turin, de Berlin et de Paris, ainsi que les Œuvres  
publiées séparément. Cette série forme 7 volumes (Tomes I à VII);  
162-1877, qui se vendent séparément. . . . . 30 fr.

La II<sup>e</sup> Série se compose de 7 volumes, qui renferment les Œuvres  
citées, la Correspondance et les Mémoires inédits, savoir:

Tom. VIII: Résolution des équations numériques; 1820. . . . . 18 fr.

Tom. IX: Théorie des fonctions analytiques; 1801. . . . . 18 fr.

Tom. X: Leçons sur le calcul des fonctions; 1803. . . . . 18 fr.

Tom. XI: Mécanique analytique, avec Notes de J. BERTRAND et G. DAR-  
BOUX (I<sup>re</sup> PARTIE: Statique); 1888. . . . . 20 fr.

Tom. XII: Mécanique analytique, avec Notes de J. BERTRAND et G.  
DARBOUX (2<sup>e</sup> PARTIE: Dynamique); 1888. . . . . 20 fr.

Tom. XIII: Correspondance inédite de Lagrange et d'Amberth, publiée  
d'après les manuscrits autographes et annotée par LEBLANC LALANDE.  
(III<sup>e</sup>); 1890. . . . . 15 fr.

Tom. XIV et dernier: Correspondance de Lagrange avec Condorcet,  
Lambert, Euler et d'autres savants, publiée et annotée par LEBLANC  
LALANDE, avec deux (40-omités) 1894. . . . . 15 fr.

LAURENT (H.), Examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique  
d'Analyse, 7 volumes in-8, avec figures. . . . .

TOME I. — Calcul différentiel. Applications analytiques; 1887.

TOME II. — Applications géométriques; 1887. . . . .

TOME III. — Calcul intégral. Intégrales définies et  
1888. . . . .

TOME IV. — Théorie des fonctions algébriques et de leurs  
1889. . . . .

TOME V. — Équations différentielles ordinaires; 1890.

TOME VI. — Équations aux dérivées partielles; 1890. . . . .

TOME VII ET DERNIER. — Applications géométriques de  
équations différentielles; 1891. . . . .

MÉRAY, Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — Leçons  
sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques.  
ouvrage honoré d'une souscription du Ministère de l'Instruction  
3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

I<sup>re</sup> PARTIE: Principes généraux; 1891. . . . .

II<sup>e</sup> PARTIE: Étude monographique des principales fonctions  
variables; 1893. . . . .

III<sup>e</sup> PARTIE: Questions analytiques classiques; 1893.

IV<sup>e</sup> PARTIE: Applications géométriques classiques; 1893.

PICARD (Émile), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté  
Sciences. — Traité d'Analyse (Cours de la Faculté des  
Quatre volumes grand in-8 avec figures, se vendant séparément.

TOME I: Intégrales simples et multiples. — L'équation de la  
ses applications. Développement en séries. — Applications géométriques  
du Calcul infinitésimal. 2<sup>e</sup> édition, revue et corrigée; 1891. . . . .

TOME II: Fonctions harmoniques et fonctions analytiques.  
duction à la théorie des équations différentielles. Intégrales  
et surfaces de Riemann; 1892. . . . .

TOME III: Des singularités des intégrales et des équations diffé-  
Étude du cas où la variable reste réelle et des courbes définies  
équations différentielles. Équations linéaires; analogies entre les  
algébriques et les équations linéaires; 1896. . . . .

TOME IV: Équations aux dérivées partielles. . . . .

RUSSELL (Bertrand A.-W.), M. A., Fellow of Trinity College, U.  
— Essai sur les fondements de la Géométrie. Traduction de  
CABENAT, Licencié des Sciences mathématiques, Professeur de  
lignes au Collège de Saint-Claude, revue et annotée par l'Abbé  
LOUIS COURBAT, Chargé de Cours à l'Université de Fribourg.  
in-8 de x-274 pages avec figures; 1901. . . . .



ANNALES  
DE LA  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES  
SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,  
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1903.

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS,  
IMPRIMERIE-BOULANGER.

TOULOUSE.  
ED. PRIVAT,  
IMPRIMERIE-BOULANGER.

1903

(Ce Recueil paraît chaque trimestre.)

Deuxième fascicule.



---

# THÉORIE DES FORMES A COEFFICIENTS ENTIERS

DÉCOMPOSABLES EN FACTEURS LINÉAIRES,

PAR M. X. STOUFF,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

---

**Théorie des formes à coefficients entiers où le degré est égal au nombre des variables et qui peuvent être décomposées en facteurs linéaires <sup>(1)</sup>.**

---

## I.

Soit d'abord une forme de degré  $n$ , à  $m$  variables, dont les coefficients ne sont pas tous nuls. On peut trouver un système de valeurs entières des variables, premières entre elles, pour lequel cette forme a une valeur différente de zéro. En effet, attribuons à chaque variable, indépendamment des autres,  $n + 1$  valeurs entières distinctes, ce qui donne en tout  $(n + 1)^m$  systèmes de valeurs des variables. Parmi les  $(n + 1)^m$  valeurs correspondantes de la forme, l'une au moins n'est pas nulle. Supposons, en effet, pour un instant que le contraire ait lieu, et envisageons les valeurs de la forme relatives aux différents systèmes qui ne se distinguent entre eux que par la valeur de l'une des indéterminées; la forme ordonnée par rapport à cette variable est un polynome d'ordre  $n$ , qui a  $n + 1$  racines, et dont, par conséquent, tous les coefficients sont nuls. Les coefficients de la forme ainsi ordonnée, qui sont des formes d'ordre  $n$  au plus par rapport aux  $m - 1$  variables restantes, sont nuls pour les  $(n + 1)^{m-1}$  systèmes de valeurs que l'on peut attribuer à ces variables. On ordonnera chacun d'eux par rapport à l'une des variables qu'il contient, et l'on répétera le même raisonnement. Finalement, on prouve ainsi de proche en proche que tous les coefficients de la forme

---

(<sup>1</sup>) L'objet de cet article est de faciliter la lecture des Mémoires de M. Hermite (t. 47 du *Journal de Crelle*). M. Minkowski a souvent complété les travaux de M. Hermite avec des méthodes qui lui sont propres. Je me suis proposé ici d'interpréter autant que possible la pensée de M. Hermite.



proposée sont nuls, ce qui est contre l'hypothèse. Ayant obtenu un système de valeurs entières des variables qui n'annulent pas la forme, en les divisant par leur plus grand commun diviseur, nous obtiendrons un système de valeurs entières des variables premières entre elles qui n'annulent pas cette forme.

Nous nommons *équivalentes* deux formes lorsque la seconde s'obtient en soumettant la première à une substitution linéaire de déterminant  $un$

$$(1) \quad x_i = \sum_{j=1}^{j=m} \alpha_{ij} x'_j \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

où les coefficients  $\alpha_{ij}$  sont entiers.

On sait, d'après M. Hermite, que l'on peut toujours former un déterminant à éléments entiers et de valeur  $un$ , dont une colonne soit constituée par des nombres entiers donnés, premiers entre eux; on sait également que, si une forme est soumise à la substitution (1), le coefficient de  $x_j^n$  est le résultat obtenu en substituant respectivement à  $x_1, x_2, \dots, x_m$  dans la forme primitive  $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj}$ . De ces deux propositions et de celle que nous avons démontrée en commençant il résulte que toute forme dont les coefficients ne sont pas tous nuls a une équivalente dans laquelle le coefficient de  $x_j^n$  n'est pas nul,  $j$  étant l'un des  $m$  indices à volonté.

Le problème que nous nous proposons maintenant d'étudier est le suivant :

*On donne une forme à coefficients entiers de degré  $n$ , à  $m$  variables, et l'on sait a priori que cette forme peut être décomposée en  $n$  facteurs linéaires; on demande d'obtenir ces facteurs.*

Le problème sera résolu pour la forme donnée s'il l'est pour l'une quelconque des formes équivalentes. Parmi celles-ci, soit  $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$  une forme où le coefficient de  $x_1^n$ , qui est un nombre entier  $A$ , est différent de zéro, et

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{j=1}^{j=n} U_j,$$

$$U_j = \sum_{h=1}^{h=m} \alpha_{jh} x_h,$$

on aura

$$A = \prod_{j=1}^{j=n} \alpha_{j1},$$

et, par hypothèse,  $A$  n'étant pas nul, aucun des coefficients  $\alpha_{j1}$  n'est nul.

Le problème devra être considéré comme résolu si l'on connaît dans chaque

facteur linéaire les rapports des coefficients de  $x_2, x_3, \dots, x_m$  au coefficient de  $x_1$ . En effet, les données ne permettent pas de déterminer davantage ces facteurs.

Prenons

$$x_2 = 1;$$

posons

$$x_1 = z,$$

$$\frac{a_{j1}}{a_{j1}} = -z_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n),$$

$$v_j = \sum_{h=3}^{h=m} \frac{a_{jh} x_h}{a_{j1}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

et

$$\frac{F(z, 1, x_3, \dots, x_m)}{A} = f(z, x_3, \dots, x_m),$$

nous aurons

$$(2) \quad f(z, x_3, \dots, x_m) = \prod_{j=1}^{j=n} (z - z_j + v_j),$$

le polynome  $f$  a ses coefficients rationnels. Il doit être considéré comme connu. Le problème sera résolu si l'on connaît les quantités  $z_j$  et les expressions linéaires  $v_j$  qui ne contiennent que les  $m - 2$  dernières variables  $x_3, \dots, x_m$ .

Soit  $\varphi(z)$  la somme des termes de  $f(z, x_3, \dots, x_m)$  où ne figurent pas les  $m - 2$  dernières variables, et  $\varphi_k(z, x_3, \dots, x_m)$  la somme des termes de  $f$  dont le degré total par rapport aux  $m - 2$  variables  $x_3, \dots, x_m$  est égal à  $k$ . On aura donc

$$f(z, x_3, \dots, x_m) = \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

En faisant

$$x_3 = \dots = x_m = 0,$$

l'identité (2) donne

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^{j=n} (z - z_j);$$

les quantités  $z_j$  sont donc les  $n$  racines de l'équation à coefficients rationnels

$$(3) \quad \varphi(z) = 0,$$

à chacune des racines de cette équation correspond un facteur linéaire de  $f$ . Soit  $z_1$  une racine simple de l'équation (3), je dis que les coefficients de la fonction linéaire  $v_1$  s'expriment rationnellement en fonction de  $z_1$ . En effet, si l'on développe le produit qui figure dans le second membre de (2), on voit que l'on a

$$(4) \quad \varphi_1 = \sum_{j=1}^{j=n} \left[ v_j \prod' (z - z_h) \right],$$

où le signe  $\prod$  indique le produit des facteurs binomes  $z - z_h$  en exceptant la valeur  $h = j$ . Si, dans les deux membres de l'identité (4), on fait  $z = z_1$ , il vient

$$\varphi_1(z_1, x_2, \dots, x_m) = v_1 \prod_{h=2}^{h=n} (z_1 - z_h) = v_1 \varphi'(z_1).$$

Ainsi le facteur linéaire qui correspond à une racine simple  $z_1$  est

$$\frac{\varphi_1(z_1, x_2, \dots, x_m) + (z - z_1) \varphi'(z_1)}{\varphi'(z_1)},$$

on voit qu'il est connu rationnellement dès que  $z_1$  est connu.

Je dis encore que, si  $z_1$  est une racine multiple d'ordre  $k$  de l'équation (3), le produit des facteurs linéaires de  $f$  qui correspondent à  $z_1$  est connu rationnellement quand  $z_1$  est connu. Soit, en effet,

$$P_1 = (z - z_1 + v_1)(z - z_1 + v_2) \dots (z - z_1 + v_k)$$

ce produit. On a

$$\varphi_k(z, x_2, \dots, x_m) = \sum \left( \prod_{h=1}^{h=k} v_{j_h} \right) [\Pi'(z - z_l)];$$

dans chaque terme de la somme  $\sum$ , l'ensemble des indices  $j_h$  forme une combinaison des indices  $1, 2, \dots, n, k$  à  $k$ . Le signe  $\prod'$  indique que  $l$  prend les valeurs qui ne sont pas comprises parmi celles des indices  $j_h$ . Si nous faisons  $z = z_1$ , tous les termes de la somme  $\sum$  s'annulent, sauf un seul, et l'on a

$$\begin{aligned} \varphi_k(z_1, x_2, \dots, x_m) \\ = v_1 v_2 \dots v_k (z_1 - z_{k+1})(z_1 - z_{k+2}) \dots (z_1 - z_n) = v_1 v_2 \dots v_k \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(z_1). \end{aligned}$$

Plus généralement, on a

$$(5) \quad \varphi_{k-l}(z, x_2, \dots, x_m) = \sum \left( \prod_{h=1}^{h=k-l} v_{j_h} \right) [\Pi'(z - z_r)].$$

Dans le second membre,  $z - z_1$  figure avec l'exposant  $l$  dans les termes qui contiennent les produits  $k-l$  à  $k-l$  des expressions  $v_1, v_2, \dots, v_k$ ;  $z - z_1$  figure avec un exposant supérieur à  $l$  dans tous les autres termes du second membre. Prenons les dérivées d'ordre  $l$  des deux membres de l'identité (5), puis

faisons  $z = z_1$ , il viendra

$$\varphi_{k-l}^{(l)}(z_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{l!}{k!} \varphi^{(k)}(z_1) \sum \left( \prod_{h=1}^{h=k-l} v_{j_h} \right),$$

où, cette fois, les indices  $j_h$  sont pris parmi les nombres  $1, 2, \dots, k$ .

On aura, par suite,

$$(6) \quad P_1 = \frac{\varphi_k(z_1, x_2, \dots, x_m) + \frac{z-z_1}{1} \varphi'_{k-1}(z_1, x_2, \dots, x_m) + \frac{(z-z_1)^2}{2!} \varphi''_{k-2}(z_1, x_2, \dots, x_m) + \dots + \frac{(z-z_1)^k}{k!} \varphi^{(k)}(z_1)}{\frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(z_1)},$$

$P_1$  est donc connu rationnellement par  $z_1$ .

Supposons que l'équation ait  $s$  racines de l'ordre de multiplicité  $k$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_s$ , et soit

$$\psi(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_s),$$

on sait que le polynome  $\psi(z)$  est connu rationnellement; aux racines  $z_1, z_2, \dots, z_s$  correspondent des facteurs  $P_1, P_2, \dots, P_s$  de  $f$  tous de degré  $k$  donnés par la formule (6), et le produit effectué  $P_1 P_2 \dots P_s$  est un polynome de degré  $sk$  dont les coefficients sont des fonctions symétriques de  $z_1, z_2, \dots, z_s$ . Ce polynome est donc connu rationnellement.

Supposons maintenant que la forme à coefficients entiers  $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$  soit irréductible. Nous entendons par là qu'elle n'est le produit d'aucune autre forme à coefficients entiers par une forme aussi à coefficients entiers. D'après la théorie de la division des polynomes,  $F$  ne pourra être non plus le produit de deux formes de degré moindre que  $n$  à coefficients rationnels, et  $f$  n'admettra pas non plus de diviseur de degré moindre à coefficients rationnels. Or, si l'équation (3) admet  $s$  racines du degré  $k$  de multiplicité, et, en outre, d'autres racines d'un degré de multiplicité différent de  $k$ ,  $f$  admet le facteur  $P_1 P_2 \dots P_s$ , qui est connu rationnellement, et, par conséquent,  $F$  ne peut être irréductible. Donc, si  $F$  est irréductible, toutes les racines de (3) sont nécessairement du même ordre de multiplicité.

*Quand  $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$  est irréductible, on peut, d'ailleurs, en tout cas, faire dépendre la décomposition complète de cette forme en facteurs linéaires d'une équation d'ordre  $n$  qui n'a que des racines simples.*

$U_j$  désignant, comme il a été dit plus haut, l'un des facteurs linéaires de  $F$ , on peut écrire

$$U_j = a_{j1}x_1 + \sum_{h=2}^{h=m} a_{jh}x_h;$$

comme aucun des coefficients  $a_{j1}$  n'est nul, nous pouvons poser

$$L_j = \frac{1}{a_{j1}} \sum_{h=2}^{h=m} a_{jh} x_h.$$

Les  $n$  fonctions linéaires homogènes  $L_j$  contiennent seulement les  $m-1$  dernières variables  $x_2, x_3, \dots, x_m$ . Attribuons à chacune de ces variables indépendamment des autres  $\frac{n(n-1)}{2} + 1$  valeurs entières distinctes, ce qui donnera en tout  $\left[ \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right]^{m-1}$  systèmes de valeurs de ces variables. Je dis que l'un au moins de ces systèmes fait acquérir aux  $n$  fonctions linéaires  $L_j$  des valeurs toutes différentes entre elles. Supposons, en effet, que le contraire ait lieu, c'est-à-dire que, pour chaque système, deux au moins des fonctions  $L_j$  prennent la même valeur. Il y a  $\left[ \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right]^{m-2}$  groupes chacun de  $\frac{n(n-1)}{2} + 1$  systèmes, tels que les systèmes de chaque groupe ne diffèrent que par la valeur attribuée à  $x_2$ . Envisageons les systèmes d'un même groupe, pour chacun d'eux il existe une combinaison  $L_j, L_{j'}$ , pour laquelle les valeurs de  $L_j$  et de  $L_{j'}$  sont égales, et, comme le nombre des systèmes de ce groupe surpasse d'une unité le nombre des combinaisons de  $n$  objets deux à deux, l'une au moins des combinaisons  $L_j, L_{j'}$  doit se présenter deux fois. On a donc, pour les mêmes valeurs de  $x_3, x_4, \dots, x_m$  et pour deux valeurs différentes de  $x_2$ ,

$$L_j = L_{j'};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a_{j2}}{a_{j1}} = \frac{a_{j'2}}{a_{j'1}}, \quad \frac{a_{j3}x_3 + \dots + a_{jm}x_m}{a_{j1}} = \frac{a_{j'3}x_3 + \dots + a_{j'm}x_m}{a_{j'1}}.$$

Posons

$$L'_j = \frac{1}{a_{j1}} \sum_{h=3}^{h=m} a_{jh} x_h,$$

nous avons donc  $\left[ \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right]^{m-2}$  systèmes de valeurs de  $x_3, \dots, x_m$  tels que dans chaque système une des combinaisons  $L'_j, L'_{j'}$ , présente des valeurs égales et que de plus  $\frac{a_{j2}}{a_{j1}} = \frac{a_{j'2}}{a_{j'1}}$ . Ces systèmes peuvent être répartis en  $\left[ \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right]^{m-3}$  groupes où les systèmes d'un même groupe ne diffèrent que par la valeur de  $x_3$ ; le nombre des systèmes d'un même groupe étant  $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ , l'une des combinaisons  $L'_j, L'_{j'}$  présentant des valeurs égales doit se présenter au moins deux fois,

et l'on en déduit

$$\frac{a_{j2}}{a_{j1}} = \frac{a_{j'2}}{a_{j'1}}, \quad \frac{a_{j3}}{a_{j1}} = \frac{a_{j'3}}{a_{j'1}}, \quad \frac{a_{j4}x_4 + \dots + a_{jm}x_m}{a_{j1}} = \frac{a_{j'4}x_4 + \dots + a_{j'm}x_m}{a_{j'1}}$$

et ainsi de suite. De proche en proche on prouverait ainsi qu'il existerait dans  $F$  deux facteurs linéaires  $U_j, U_{j'}$  dont les coefficients seraient proportionnels.  $F$  aurait donc des facteurs multiples, et le produit des facteurs d'un même degré de multiplicité donnerait un diviseur de  $F$  qui pourrait être trouvé rationnellement.  $F$  ne serait donc pas irréductible.

Envisageons maintenant un système de valeurs de  $x_2, x_3, \dots, x_m$  pour lesquelles les fonctions  $L_j$  sont toutes différentes. Divisons ces valeurs par leur plus grand commun diviseur, nous aurons des valeurs entières premières entre elles de  $x_2, x_3, \dots, x_m$  pour lesquelles les valeurs des  $L_j$  sont toutes différentes; ces valeurs peuvent être prises pour éléments de la première colonne d'un déterminant à éléments entiers et de valeur  $un$ . Dans  $F$ , sans changer la variable  $x_1$ , soumettons les  $m-1$  dernières variables à la substitution dont les coefficients sont les éléments de ce déterminant; les différents quotients  $\frac{a_{j2}}{a_{j1}}$  relatifs aux facteurs linéaires de la nouvelle forme seront précisément les valeurs des fonctions  $L_j$  toutes différentes entre elles. Par suite l'équation  $\varphi(z)=0$ , relative à la nouvelle forme, n'aura que des racines simples; et chacune de ces racines étant connue, on connaît par cela même le facteur linéaire correspondant.

Soit  $n = sk$ , et supposons que l'équation  $\varphi(z)=0$  relative à la forme primitive ait  $s$  racines de degré  $k$  de multiplicité. Par la résolution d'une équation de degré  $s$ , la forme se trouvera décomposée en  $s$  autres formes de degré  $k$ ; si l'on fait ensuite dans chacune de ces formes la substitution linéaire à coefficients entiers qui vient d'être indiquée, on voit que chaque forme d'ordre  $k$  pourra être décomposée en facteurs linéaires à l'aide d'une équation de degré  $k$ .

On peut encore remarquer que *si la fonction  $F$  est irréductible et si l'équation  $\varphi(z)=0$  n'a que des racines simples, cette dernière équation est nécessairement irréductible*. Car si  $\varphi(z)$  avait un facteur rationnel, le produit des facteurs correspondants de  $F$  serait aussi connu rationnellement.

## II.

Considérons plus particulièrement les formes irréductibles décomposables en facteurs linéaires et où le nombre des variables égale l'ordre  $n$  de la forme

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ \times (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \dots (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n).$$

M. Hermite nomme *invariant de F* le carré du déterminant des coefficients  $a_{jh}$  ( $j, h = 1, 2, \dots, n$ ). L'invariant est une quantité rationnelle.

En effet, d'après ce qui précède, dans chaque facteur linéaire de F, les rapports des  $n - 1$  derniers coefficients au premier peuvent toujours s'exprimer comme nous l'avons vu par des fonctions rationnelles des diverses racines d'une équation d'ordre  $n$  à coefficients rationnels. L'invariant est, par suite, égal à une fonction symétrique des racines de cette équation, multipliée par le carré du produit

$$a_{11} a_{21} \dots a_{n1}$$

qui est lui-même égal au coefficient de  $x_1^n$  dans la forme; donc, c'est une quantité rationnelle.

Si l'invariant n'est pas nul, aucun des coefficients  $a_{jh}$  n'est nul, ni dans la forme F, ni dans aucune forme équivalente.

En effet, d'après ce qui précède, il existe une équation à coefficients rationnels qui n'a que des racines simples  $z_1, z_2, \dots, z_n$  et telle que l'on ait

$$a_{1h} = \pi(z_1), \quad a_{2h} = \pi(z_2), \quad \dots, \quad a_{jh} = \pi(z_j), \quad \dots, \quad a_{nh} = \pi(z_n),$$

$\pi(z)$  étant une fonction rationnelle. De plus, cette équation est irréductible, sans quoi F ne pourrait être irréductible. Si donc on avait

$$\pi(z_j) = 0,$$

l'équation  $\pi(z) = 0$ , à coefficients rationnels, admettant la racine  $z_j$ , devrait admettre toutes les racines  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ; on aurait alors

$$a_{1h} = a_{2h} = \dots = a_{jh} = \dots = a_{nh} = 0,$$

et le déterminant dont le carré donne l'invariant ayant une colonne de zéros serait nul.

Le coefficient de  $x_h^n$  dans la forme F est égal à  $\prod_{j=1}^{j=n} a_{jh}$ . Ainsi dans F et dans toutes ses équivalentes les coefficients des puissances  $n^{\text{ièmes}}$  des variables sont des entiers qui ne sont jamais nuls.

D'après ce qui précède, deux des rapports  $\frac{a_{1h}}{a_{11}}, \frac{a_{rh}}{a_{r1}}$ , ne peuvent devenir égaux que si les  $n$  rapports  $\frac{a_{jh}}{a_{j1}}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) se partagent en un certain nombre  $s$  de groupes différents contenant chacun le même nombre  $k$  de rapports tous égaux entre eux. La décomposition de F en facteurs linéaires peut encore être consi-

dérivée comme dépendant d'une équation E d'ordre  $n$ , à coefficients rationnels, et qui n'a que des racines simples. Mais comme cette décomposition peut aussi être effectuée par la résolution d'une équation d'ordre  $s$  suivie de celle d'une équation d'ordre  $k$ , le groupe de Galois de l'équation E est alors nécessairement imprimitif.

Si les facteurs de F ne sont pas tous réels, on peut supposer les facteurs imaginaires deux à deux conjugués. Soit  $\mu$  le nombre des facteurs réels,  $\nu$  le nombre de couples de facteurs imaginaires conjugués, de sorte que  $\mu + 2\nu = n$ . Représentons par  $U_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \mu$ ) les facteurs réels, et par  $U_j$  pour  $j = \mu + 1, \mu + 2, \dots, n$  les facteurs imaginaires conjugués. Supposons de plus que  $U_{\mu+2}$  soit conjugué de  $U_{\mu+1}$ ,  $U_{\mu+4}$  conjugué de  $U_{\mu+3}$ , et ainsi de suite. Considérons le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu+1,1} & a_{\mu+1,2} & \dots & a_{\mu+1,n} \\ a_{\mu+2,1} & a_{\mu+2,2} & \dots & a_{\mu+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

en combinant les lignes on reconnaît aisément que ce déterminant est égal à

$$D = \frac{1}{2^\nu} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu+1,1} + a_{\mu+2,1} & a_{\mu+1,2} + a_{\mu+2,2} & \dots & a_{\mu+1,n} + a_{\mu+2,n} \\ a_{\mu+2,1} - a_{\mu+1,1} & a_{\mu+2,2} - a_{\mu+1,2} & \dots & a_{\mu+2,n} - a_{\mu+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} + a_{n,1} & a_{n-1,2} + a_{n,2} & \dots & a_{n-1,n} + a_{n,n} \\ a_{n,1} - a_{n-1,1} & a_{n,2} - a_{n-1,2} & \dots & a_{n,n} - a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Tous les éléments de ce déterminant autres que ceux des lignes de rangs  $\mu + 2$ ,  $\mu + 4$ ,  $\dots$ ,  $n$  sont réels; les éléments de ces lignes sont des imaginaires pures. Donc D est égal à  $(\sqrt{-1})^\nu$  multiplié par une quantité réelle. L'invariant étant égal à  $D^2$ , on en conclut que l'invariant a le signe de  $(-1)^\nu$ .



## III.

Soit

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{j=n} U_j,$$

$$U_j = \sum_{h=1}^{h=n} a_{jh} x_h,$$

une forme à coefficients entiers, irréductible, décomposable en  $n$  facteurs linéaires et dont l'invariant n'est pas nul. On se propose de déterminer les substitutions linéaires à coefficients entiers

$$(S) \quad x_i = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} x'_j,$$

qui changent cette forme en elle-même.

Par la substitution  $S$ , chaque forme linéaire  $U_j$  se change en une autre forme linéaire que l'on peut représenter par  $U_j S$ , et comme on doit avoir identiquement

$$\prod_{j=1}^{j=n} U_j = \prod_{j=1}^{j=n} U_j S,$$

et que d'après la théorie de la division des polynômes chaque facteur linéaire du premier membre doit se retrouver dans le second, à chaque indice  $j$  doit correspondre un indice  $h_j$  tel que l'on ait identiquement

$$(7) \quad U_j S = \varepsilon_j U_{h_j},$$

lorsque  $j$  parcourt les valeurs  $1, 2, \dots, n$ , l'indice correspondant  $h_j$  prend successivement une fois et une seule chacune de ces mêmes valeurs, de plus il faut évidemment que

$$(8) \quad \prod_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j = 1.$$

Nous distinguons maintenant deux cas.

*Premier cas.* — L'un des facteurs  $U_j$  se reproduit par la substitution  $S$  à une constante multiplicative près, ce qui s'exprime par les équations

$$(9) \quad \frac{a_{j1}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_{ji} \alpha_{i1}} = \frac{a_{j2}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_{ji} \alpha_{i2}} = \dots = \frac{a_{jn}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_{ji} \alpha_{in}}.$$

Or, à chacun des facteurs de  $F$  correspond, d'après ce qui précède, une racine  $z_j$  d'une équation irréductible par laquelle les rapports  $\frac{a_{jh}}{a_{j1}}$  ( $h = 2, 3, \dots, n$ ) s'expriment rationnellement. En vertu de l'irréductibilité de cette équation, les relations (9) subsistent quand on y remplace  $z_j$  par une autre quelconque des racines de cette équation, ou, ce qui revient au même, les coefficients de  $U_j$  par ceux de l'un quelconque des autres facteurs linéaires. Donc, si l'un des facteurs se reproduit à une constante multiplicative près, il en est de même de tous les autres. On a donc, pour  $j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$U_j S = \varepsilon_j U_j,$$

Le déterminant de la substitution  $S$  est toujours égal à  $+1$ .

En effet, on peut regarder cette substitution comme résultant de trois autres :

1° Substitution des variables  $U_1, U_2, \dots, U_n$  aux variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;

2° Substitution aux variables  $U_1, U_2, \dots, U_n$  des variables  $U'_1, U'_2, \dots, U'_n$  définies par les relations

$$U_j = \varepsilon_j U'_j.$$

3° Substitution aux variables  $U'_1, U'_2, \dots, U'_n$  des variables  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ .

Le déterminant de la première substitution est l'inverse du déterminant  $\Delta$  des coefficients des fonctions linéaires  $U_j$ . Le déterminant de la seconde est  $\prod \varepsilon_j = 1$ . Le déterminant de la troisième est  $\Delta$ . Le déterminant de  $S$  est nécessairement égal au produit de ces trois substitutions et, par conséquent, à l'unité.

La valeur commune des rapports (9) est  $\frac{1}{\varepsilon_j}$ . Donc  $\varepsilon_j$  s'exprime rationnellement par  $z_j$ ; elle appartient au corps algébrique déterminé par cette racine.

$\varepsilon_j$  est une unité complexe. Soit, en effet,

$$L = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i,$$

une fonction linéaire qui se reproduit multipliée par une constante  $\omega$  quand on la soumet à la substitution  $S$ , de telle sorte que l'on ait identiquement

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} x'_j = \omega \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j x'_j,$$

ce qui donne les relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \alpha_{ij} = \omega \lambda_j,$$



résolvant les équations ainsi obtenues, il vient

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\varepsilon_j k_h}{k_j} (c_{00} + c_{01} z_h + \dots + c_{0,n-1} z_h^{n-1}), \\ z_j &= \frac{\varepsilon_j k_h}{k_j} (c_{10} + c_{11} z_h + \dots + c_{1,n-1} z_h^{n-1}), \\ z_j^2 &= \frac{\varepsilon_j k_h}{k_j} (c_{20} + c_{21} z_h + \dots + c_{2,n-1} z_h^{n-1}), \\ &\dots\dots\dots, \\ z_j^{n-1} &= \frac{\varepsilon_j k_h}{k_j} (c_{n-1,0} + c_{n-1,1} z_h + \dots + c_{n-1,n-1} z_h^{n-1}), \end{aligned}$$

où les quantités  $c$  sont des coefficients rationnels; en divisant membre à membre la seconde équation par la première, on aura  $z_j$  exprimé rationnellement en fonction de  $z_h$ . On pourra toujours mettre cette relation sous la forme

$$z_j = \mu_0 + \mu_1 z_h + \mu_2 z_h^2 + \dots + \mu_{n-1} z_h^{n-1} = \psi(z_h),$$

les coefficients  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$  étant rationnels.  $z_h$  étant la racine de l'équation irréductible

$$(12) \quad \varphi(z) = 0,$$

les deux équations à coefficients rationnels

$$\varphi(z) = 0, \quad \varphi[\psi(z)] = 0,$$

admettent  $z_h$  comme racine, et, par suite, toutes les racines de la première vérifient la seconde. Ainsi, en prenant pour  $z$  l'une quelconque des racines de (12),  $\psi(z)$  est encore une racine de cette équation.

Si l'on considère l'équation

$$z_j = \psi(z),$$

il n'existe d'ailleurs qu'une seule racine de (12),  $z = z_h$ , qui vérifie cette équation. En effet, si l'on substitue à  $z$ , dans  $\psi(z)$ , les  $n$  racines de (12), on obtient  $n$  quantités qui, d'après la théorie des fonctions symétriques, sont les racines d'une équation  $E$  rationnelle d'ordre  $n$ . Si deux racines de (12) substituées dans  $\psi(z)$  donnaient toutes deux  $z_j$ ,  $z_j$  serait au moins racine double de l'équation  $E$ , et  $E$  serait réductible,  $z_j$  étant racine d'une équation rationnelle de degré moindre que  $n$ , l'équation (12) serait réductible, ce qui est contre l'hypothèse.

## IV.

Le développement de la méthode indiquée par M. Hermite dans son Mémoire *Sur la théorie des formes quadratiques* (*Journal de Crelle*, t. 47, II<sup>e</sup> Partie, V) permet : 1° de démontrer que pour un invariant donné il n'existe qu'un nombre fini de classes distinctes de formes F; 2° de déterminer la nature des substitutions qui transforment en elle-même une forme F décomposable en facteurs linéaires.

Soient

$$U_1, U_2, \dots, U_p$$

les facteurs réels de F,

$$V_1, W_1; V_2, W_2; \dots; V_q, W_q$$

les couples de facteurs imaginaires conjugués, de sorte que  $p + 2q = n$ . Nous poserons

$$(13) \quad \begin{cases} U_j = \sum_{h=1}^{h=n} a_{jh} x_h & (j=1, 2, \dots, p), \\ V_j = \sum_{h=1}^{h=n} (b_{jh} + ic_{jh}) x_h & (j=1, 2, \dots, q) \quad (i = \sqrt{-1}), \\ W_j = \sum_{h=1}^{h=n} (b_{jh} - ic_{jh}) x_h & (j=1, 2, \dots, q), \end{cases}$$

les lettres  $a, b, c$  désignant des quantités réelles. On a identiquement

$$(14) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{j=p} U_j \prod_{j=1}^{j=q} V_j W_j.$$

Envisageons, d'après M. Hermite, la forme quadratique

$$(15) \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1^2 U_1^2 + \lambda_2^2 U_2^2 + \dots + \lambda_p^2 U_p^2 + 2\mu_1^2 V_1 W_1 + \dots + 2\mu_q^2 V_q W_q,$$

pour toutes les valeurs des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ . Comme entre plusieurs formes  $\varphi$  qui ne diffèrent que par un facteur constant, il n'y a intérêt qu'à en considérer une seule, nous pouvons, sans porter atteinte à la généralité, supposer

$$(16) \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p \mu_1^2 \mu_2^2 \dots \mu_q^2 = 1,$$

D'après cela, en désignant par I l'invariant de F, le déterminant de  $\varphi$  est  $(-1)^q I$ .

Soit

$$(17) \quad (S) \quad x_j = \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_{jh} x'_h,$$

la substitution à coefficients entiers et de déterminant  $un$  propre à réduire  $\varphi$  pour des valeurs particulières des quantités  $\lambda$  et  $\mu$ . Par cette substitution  $F$  devient

$$(18) \quad F'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n);$$

$$F'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \prod_{j=1}^{j=p} U'_j \prod_{j=1}^{j=q} V'_j W'_j,$$

$U'_j$  est ce que devient  $U_j$  par la substitution  $S$ . D'une manière générale, nous représentons par des lettres accentuées les quantités relatives à la forme  $F'$ . Dans la forme  $\varphi'$ , réduite de  $\varphi$ , le coefficient de  $x_h'^2$  est

$$(19) \quad \lambda_1^2 a_{1h}'^2 + \lambda_2^2 a_{2h}'^2 + \dots + \lambda_p^2 a_{ph}'^2 + \mu_1^2 (b_{1h}'^2 + c_{1h}'^2) + \mu_2^2 (b_{2h}'^2 + c_{2h}'^2) + \mu_3^2 (b_{3h}'^2 + c_{3h}'^2) + \dots + \mu_q^2 (b_{qh}'^2 + c_{qh}'^2) + \mu_q^2 (b_{qh}'^2 + c_{qh}'^2),$$

il résulte de la relation (16) que le produit des termes de l'expression (19) donne précisément le coefficient de  $x_h''$  dans  $F'$ . Or, nous avons démontré que,  $F$  étant irréductible, les coefficients de  $x_1'', x_2'', \dots, x_n''$  ne peuvent être nuls, et comme ils sont entiers, leur valeur absolue est au moins égale à  $un$ . D'après le théorème relatif à une somme de termes positifs dont le produit est constant, la somme (19) est au moins égale à  $n$ . Or, d'après le théorème de M. Hermite sur les formes définies réduites, le produit des coefficients des carrés des indéterminées dans  $\varphi'$  est moindre que  $\rho(-1)^v I$ ,  $\rho$  étant un coefficient numérique qui ne dépend que de  $n$ . Le coefficient de  $x_h'^2$  dans  $\varphi'$  est donc moindre que  $\frac{\rho(-1)^v I}{n^{n-1}}$ , puisque chacun des autres facteurs est au moins égal à  $n$ .

Donc, dans la forme  $\varphi'$  chaque coefficient du carré d'une indéterminée est compris entre une limite inférieure et une limite supérieure, toutes deux positives et qui ne dépendent que de  $I$ .

On sait d'ailleurs, d'après M. Hermite, que les formes binaires quadratiques obtenues en annulant dans  $\varphi'$ ,  $n-2$  quelconques des indéterminées sont toutes réduites; il résulte de cette remarque et de ce qui précède que, dans  $\varphi'$ , les coefficients des rectangles des indéterminées ont tous des limites supérieures qui ne dépendent que de  $I$ .

De là résulte aussi que tous les coefficients de  $F'$  ont des limites supérieures qui ne dépendent que de  $I$ . En effet, la somme (19) ne comprenant que des termes positifs et ayant une limite supérieure qui ne dépend que de  $I$ , il en est de même

de chacun de ses termes, par conséquent, les quantités

$$\begin{aligned} \text{val. abs. } \lambda_j a'_{jh} & \quad (j = 1, 2, \dots, p; h = 1, 2, \dots, n) \\ \mu_j & \quad \text{mod}(b'_{jh} + ic'_{jh}), \quad (j = 1, 2, \dots, q; h = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

ont toutes des limites supérieures qui ne dépendent que de I.

Or, en effectuant le produit des quantités  $U'$ ,  $V'$ ,  $W'$ , on voit que chaque coefficient de  $F'$  est une somme de produits de la forme

$$a'_{ji_1} a'_{ji_2} \dots a'_{ji_p} (b'_{ji_1} + ic'_{ji_1}) \dots (b'_{ji_q} + ic'_{ji_q}) (b'_{ih_1} - ic'_{ih_1}) \dots (b'_{ih_q} - ic'_{ih_q}),$$

on ne changera pas la valeur de cette expression en la multipliant par le produit (16) qui est égal à l'unité, ce qui donne

$$\lambda_1 a'_{ji_1} \lambda_2 a'_{ji_2} \dots \lambda_p a'_{ji_p} \mu_1 (b'_{ji_1} + ic'_{ji_1}) \dots \mu_q (b'_{ji_q} + ic'_{ji_q}) \mu_1 (b'_{ih_1} - ic'_{ih_1}) \dots \mu_q (b'_{ih_q} - ic'_{ih_q}).$$

Dans ce dernier produit, chaque facteur ayant une limite supérieure, il en est de même du produit.

Les formes  $F'$  ayant des coefficients entiers dont les valeurs absolues sont limitées, sont donc en nombre fini. Nous obtenons donc le théorème de M. Hermite,

*Pour un invariant donné, il n'existe qu'un nombre fini de classes distinctes.*

La même méthode donne les transformations semblables de  $F$  <sup>(1)</sup>.

Soit

$$(20) \quad \frac{\log \lambda_1^2}{r_1} = \frac{\log \lambda_2^2}{r_2} = \dots = \frac{\log \lambda_p^2}{r_p} = \frac{\log \mu_1^2}{s_1} = \dots = \frac{\log \mu_q^2}{s_q} = k,$$

$$(21) \quad r_1 + r_2 + \dots + r_p + 2s_1 + \dots + 2s_q = 0,$$

$k$  est un paramètre que l'on fait croître d'une valeur  $k_0$  à  $+\infty$ , et ensuite décroître de  $k_0$  à  $-\infty$ . Les quantités positives ou négatives  $r$  et  $s$  sont considérées comme fixes;  $p + q = 1$  d'entre elles peuvent être prises arbitrairement; la dernière est alors déterminée par la relation (21) qui est une conséquence de (16) et de (20). Nous dirons qu'une forme  $F$  est *réduite* quand elle correspond à une forme quadratique réduite pour des valeurs convenables des quantités  $\lambda$  et  $\mu$ . Pour un invariant donné I, le nombre des formes réduites est limité, comme nous l'avons vu, et *a fortiori* il est limité pour une même classe.

En général, les corps algébriques qui correspondent aux divers facteurs de  $F$

(1) Comparer MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, p. 137.

sont distincts; nous supposons que l'on adopte arbitrairement pour ces corps un ordre déterminé. On décomposera les formes réduites  $F$  en leurs facteurs linéaires, et l'on rangera ces facteurs dans l'ordre des corps auxquels ils correspondent. On ne considère pas comme distincts deux systèmes de facteurs qui ne différeraient respectivement que par des constantes multiplicatives.

Dans le cas où les corps algébriques correspondant aux divers facteurs de  $F$  ne sont pas distincts, on rangera d'abord les corps distincts dans un ordre déterminé, d'où il résultera un certain ordre entre les groupes de facteurs linéaires qui appartiennent aux différents corps. Pour disposer les facteurs linéaires à l'intérieur d'un même groupe, on adoptera d'abord un ordre arbitraire que l'on soumettra ensuite aux permutations du groupe de Galois de l'équation

$$(3) \quad \varphi(z) = 0.$$

Ainsi, dans ce cas, nous considérons comme distincts certains systèmes de facteurs qui ne diffèrent que par l'ordre des facteurs. Mais nous faisons toujours abstraction des constantes multiplicatives.

Soit dans tous les cas  $N$  le nombre des systèmes de formes linéaires ainsi obtenues.

Soit  $F_0$  une certaine forme de la classe considérée. On décomposera  $F_0$  en facteurs, et l'on rangera ces facteurs

$$u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r$$

dans l'ordre convenu pour les corps algébriques correspondants, si ces corps sont tous distincts; dans le cas contraire, on choisira un arrangement qui, vis-à-vis des précédents, ne soit pas en opposition avec le groupe de Galois de l'équation (3).

Envisageons la forme quadratique (15),  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  qui correspond à  $F_0$ , les valeurs des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  étant obtenues d'après les équations (20). Soit  $P$  un nombre dont nous nous réservons de disposer. Donnons à  $k$  les valeurs

$$P, 2P, 3P, \dots, (N+1)P,$$

réduisons chaque fois la forme quadratique  $\varphi$ , et faisons subir en même temps aux facteurs de  $F_0$  la substitution propre à réduire  $\varphi$ ; nous obtiendrons ainsi  $N+1$  systèmes de formes linéaires dont le produit donne une forme réduite. Or, il n'y a que  $N$  pareils systèmes qui soient distincts. Donc un système au moins

$$U_1, U_2, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q, W_1, \dots, W_r$$

se présentera deux fois, abstraction faite de multiplicateurs constants, pour



$k = lP$  et pour  $k = mP$ ,  $l$  et  $m$  étant deux valeurs différentes prises dans la suite 1, 2, 3, ...,  $N + 1$ . Soient

$$(32) \quad \begin{cases} \lambda_1^2 \varepsilon_1^2 U_1^2 + \lambda_2^2 \varepsilon_2^2 U_2^2 + \dots + \lambda_p^2 \varepsilon_p^2 U_p^2 + 2\mu_1^2 \eta_1^2 V_1 W_1 + \dots + 2\mu_q^2 \eta_q^2 V_q W_q, \\ \lambda_1^2 \varepsilon_1'^2 U_1^2 + \lambda_2^2 \varepsilon_2'^2 U_2^2 + \dots + \lambda_p^2 \varepsilon_p'^2 U_p^2 + 2\mu_1'^2 \eta_1'^2 V_1 W_1 + \dots + 2\mu_q'^2 \eta_q'^2 V_q W_q, \end{cases}$$

les deux formes quadratiques réduites correspondantes,  $S$  et  $S'$  les substitutions qui ont servi respectivement à les réduire.

La substitution  $S$  transforme  $u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_q$  respectivement en

$$\varepsilon_1 U_1, \quad \varepsilon_2 U_2, \quad \dots, \quad \varepsilon_p U_p, \\ \tau_1 e^{i\theta_1} V_1, \quad \dots, \quad \tau_q e^{i\theta_q} V_q, \quad \tau_1 e^{-i\theta_1} W_1, \quad \dots, \quad \tau_q e^{-i\theta_q} W_q,$$

où  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  désignent des arguments réels et  $S'$  transforme les mêmes formes linéaires respectivement en

$$\varepsilon_1' U_1, \quad \varepsilon_2' U_2, \quad \dots, \quad \varepsilon_p' U_p, \\ \tau_1' e^{i\theta_1'} V_1, \quad \dots, \quad \tau_q' e^{i\theta_q'} V_q, \quad \tau_1' e^{-i\theta_1'} W_1, \quad \dots, \quad \tau_q' e^{-i\theta_q'} W_q.$$

Donc  $S^{-1}$  transforme  $U_1, U_2, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q, W_1, \dots, W_q$  respectivement en

$$\varepsilon_1^{-1} u_1, \quad \varepsilon_2^{-1} u_2, \quad \dots, \quad \varepsilon_p^{-1} u_p, \\ \tau_1^{-1} \varepsilon^{-i\theta_1} v_1, \quad \dots, \quad \tau_q^{-1} \varepsilon^{-i\theta_q} v_q, \quad \tau_1^{-1} e^{i\theta_1} w_1, \quad \dots, \quad \tau_q^{-1} e^{i\theta_q} w_q,$$

et par conséquent la substitution  $S'S^{-1}$  change respectivement  $u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_q$  en

$$\varepsilon_1' \varepsilon_1^{-1} u_1, \quad \varepsilon_2' \varepsilon_2^{-1} u_2, \quad \dots, \quad \varepsilon_p' \varepsilon_p^{-1} u_p, \\ \tau_1' \tau_1^{-1} e^{i(\theta_1' - \theta_1)} v_1, \quad \dots, \quad \tau_q' \tau_q^{-1} e^{i(\theta_q' - \theta_q)} v_q, \quad \tau_1' \tau_1^{-1} e^{i(\theta_1 - \theta_1')} w_1, \quad \dots, \quad \tau_q' \tau_q^{-1} e^{i(\theta_q - \theta_q')} w_q.$$

Posons pour abréger

$$\varepsilon_j' \varepsilon_j^{-1} = E_j, \quad \tau_j' \tau_j^{-1} = H_j, \quad \theta_j' - \theta_j = \Theta_j.$$

Le déterminant de la substitution  $S'S^{-1}$  est égal à  $un$ . Si l'on adopte comme variables les  $n$  fonctions linéaires indépendantes  $u_j, v_j, w_j$ , à  $S'S^{-1}$  correspond sur ces variables une substitution qui en est la transformée et qui a, par suite, même déterminant. Ce déterminant est égal au produit des multiplicateurs  $E_j, H_j e^{\pm i\Theta_j}$ . Donc

$$E_1 E_2 \dots E_p H_1^2 H_2^2 \dots H_q^2 = 1,$$

et, par suite,  $S'S^{-1}$  est une transformation semblable de  $F_\bullet$ . Elle change chacun des facteurs de  $F_\bullet$  en lui-même, à un multiplicateur constant près. C'est une sub-

stitution appartenant à la première catégorie considérée au § III. Tous les multiplicateurs sont des unités.

Une pareille substitution peut évidemment être caractérisée par les multiplicateurs correspondants.

Si S et T sont deux substitutions de cette catégorie, les substitutions ST et TS sont évidemment identiques et les multiplicateurs relatifs à ST sont les produits respectifs des multiplicateurs de S et de T. Nous utiliserons maintenant la remarque suivante :

Considérant toujours la même forme  $F_0$ , si l'on attribue aux quantités  $\lambda$  et  $\mu$  des valeurs satisfaisant à la relation (16) et en dehors de cela absolument quelconques, les produits

$$\lambda_1^2 \varepsilon_1^2, \lambda_2^2 \varepsilon_2^2, \dots, \lambda_p^2 \varepsilon_p^2, \mu_1^2 \eta_1^2, \dots, \mu_q^2 \eta_q^2$$

sont chacun compris entre une limite supérieure et une limite inférieure positives (la limite inférieure n'est jamais nulle).

En effet, en représentant les facteurs  $U_j, V_j, W_j$  d'après les formules (13), le coefficient de  $x_1^2$  par exemple, dans la forme (22) sera

$$\lambda_1^2 \varepsilon_1^2 a_{11}^2 + \lambda_2^2 \varepsilon_2^2 a_{21}^2 + \dots + \lambda_p^2 \varepsilon_p^2 a_{p1}^2 + 2\mu_1^2 \eta_1^2 (b_{11}^2 + c_{11}^2) + \dots + 2\mu_q^2 \eta_q^2 (b_{q1}^2 + c_{q1}^2),$$

nous savons que cette somme a une limite supérieure. Donc il en est de même *a fortiori* de  $\lambda_1^2 \varepsilon_1^2 a_{11}^2$ . D'ailleurs,  $a_{11}$  n'est pas nul et ne peut prendre qu'un nombre limité de valeurs; car les facteurs  $U_j, V_j, W_j$  résultent de la décomposition des formes réduites en nombre limité. Donc  $\lambda_1^2 \varepsilon_1^2$  a une limite supérieure. Le même raisonnement s'applique à  $\lambda_2^2 \varepsilon_2^2, \dots, \mu_1^2 (b_{11}^2 + c_{11}^2), \dots$

On voit, en tenant compte de (16), que le produit

$$\lambda_1^2 \varepsilon_1^2 a_{11}^2 \cdot \lambda_2^2 \varepsilon_2^2 a_{21}^2 \dots \mu_1^2 \eta_1^2 (b_{11}^2 + c_{11}^2)^2 \dots \mu_q^2 \eta_q^2 (b_{q1}^2 + c_{q1}^2)^2$$

est égal au carré du coefficient de  $x_1^n$  dans une forme réduite  $F_1$ . Ce coefficient n'est pas nul, et il est entier; donc il est au moins égal à un. Donc  $\lambda_1^2 \varepsilon_1^2 a_{11}^2$  est supérieur à l'unité divisée par les limites inférieures des autres facteurs, et comme  $a_{11}$  n'a qu'un nombre limité de valeurs  $\lambda_1^2 \varepsilon_1^2$  a une limite inférieure, et il en est de même des quantités analogues. On a donc

$$\log(\lambda_j^2 \varepsilon_j^2) = Z_j, \quad \log(\mu_j^2 \eta_j^2) = \Lambda_j,$$

$Z_j$  et  $\Lambda_j$  étant des quantités comprises dans des intervalles finis, d'où

$$\log \varepsilon_j^2 = -\log \lambda_j^2 + Z_j, \quad \log \eta_j^2 = -\log \mu_j^2 + \Lambda_j$$

ou en se reportant aux équations (20) :

$$\log \varepsilon_j^* = -l P r_j + Z_j, \quad \log \eta_j^* = -l P s_j + \Lambda_j,$$

$$\log \varepsilon_j'^* = -m P r_j + Z_j', \quad \log \eta_j'^* = -m P s_j + \Lambda_j',$$

d'où

$$(23) \quad \log E_j^* = (l-m) P r_j + Z_j' - Z_j, \quad \log H_j^* = (l-m) P s_j + \Lambda_j' - \Lambda_j,$$

De là résulte que les substitutions de la première catégorie qui transforment  $F_0$  en elle-même ne peuvent dériver de moins de  $p+q-1$  substitutions fondamentales. Supposons, en effet, pour un instant qu'il y en ait un nombre  $\nu$  inférieur à  $p+q-1$ . Désignons par  $\sum', \sum'', \dots, \sum^{(\alpha)}, \dots, \sum^{(\nu)}$  ces substitutions fondamentales et par

$$E_j^{x_i} \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad H_j^{x_i} e^{\pm i \Theta_j^{x_i}},$$

les multiplicateurs relatifs à  $\sum^{(\alpha)}$ .

On aurait

$$\log E_j^* = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} p_\alpha \log E_j^{x_\alpha} \quad (j=1, 2, \dots, p),$$

$$\log H_j^* = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} p_\alpha \log H_j^{x_\alpha} \quad (j=1, 2, \dots, q),$$

où les quantités  $p_\alpha$  sont  $\nu$  entiers positifs ou négatifs, ces équations étant au nombre de  $p+q$ , tandis que les nombres  $p_\alpha$  sont au plus au nombre de  $p+q-2$ , les  $p+q-1$  premières équations suffiront pour que l'on puisse éliminer entre elles les quantités  $p_\alpha$ . On obtiendra ainsi une relation de la forme

$$(24) \quad \sum_{j=1}^{j=p} C_j \log E_j^* + \sum_{j=1}^{j=q-1} K_j \log H_j^* = 0,$$

où les quantités  $C_j$  et  $K_j$  sont des coefficients qui ne sont pas tous nuls. En remplaçant dans la relation (24) les logarithmes par les valeurs (23), il vient en divisant par  $(l-m)P$

$$\sum_{j=1}^{j=p} C_j r_j + \sum_{j=1}^{j=q-1} K_j s_j + \frac{\sum_{j=1}^{j=p} C_j (Z_j' - Z_j) + \sum_{j=1}^{j=q-1} K_j (\Lambda_j' - \Lambda_j)}{(l-m)P} = 0,$$

$l$  et  $m$  étant entiers et différents,  $(l-m)P$  est au moins égal à  $P$  en valeur

absolue. D'ailleurs le numérateur de la fraction est essentiellement limité, et comme P peut être supposé aussi grand que l'on veut, il faudrait que l'on eût

$$(25) \quad \sum_{j=1}^{j=p} C_j r_j + \sum_{j=1}^{j=q-1} K_j s_j = 0,$$

mais une relation de la forme (25) est impossible puisque  $p + q - 1$  des quantités  $r_j, s_j$  peuvent être prises arbitrairement.

*Les substitutions semblables de la première catégorie dérivent donc au moins de  $p + q - 1$  substitutions fondamentales.* Le nombre des substitutions fondamentales qui correspondent à des unités dont le module analytique est différent de un n'est d'ailleurs pas plus grand, comme on le reconnaît aisément d'après les considérations développées par M. Hermite dans sa quatrième lettre à Jacobi.

## V.

Il s'agit maintenant d'étudier de plus près les transformations semblables des formes décomposables en facteurs linéaires. A ce point de vue, certaines de ces formes se prêtent à une recherche facile. Nous utiliserons ici une notion très employée, celle du *système de modules minimum*.

Nous considérons un corps algébrique K comme l'ensemble des quantités qui s'expriment rationnellement à l'aide d'une racine  $z$ , d'une équation  $\Gamma$  à coefficients rationnels :

$$\varphi(z) = 0.$$

Soit  $n$  le degré de cette équation.

D'après la définition générale des entiers complexes, les entiers du corps K sont des quantités qui s'expriment rationnellement par l'une des racines de  $\Gamma$  et qui, en même temps, satisfont à des équations à coefficients entiers dont le plus haut coefficient est égal à l'unité.

On sait que la somme, le produit de plusieurs entiers complexes, et toute racine d'une équation algébrique entière dont le plus haut coefficient est l'unité et dont tous les autres coefficients sont des entiers complexes, sont aussi des entiers complexes. Ces propositions se démontrent aisément par la théorie des fonctions symétriques.

Soient  $n$  entiers complexes du corps K :

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n,$$

il résulte de ce qui précède que

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_n \omega_n$$

est un entier complexe du même corps en désignant par  $m_1, m_2, \dots, m_n$  des entiers non-complexes quelconques.

Soient

$$\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n; \omega''_1, \dots, \omega''_n; \dots; \omega_1^{(n-1)}, \dots, \omega_n^{(n-1)}$$

les entiers conjugués de  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Le carré du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ \omega'_1 & \dots & \dots & \omega'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{(n-1)} & \dots & \dots & \omega_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

est un entier non-complexe. En effet, ce carré est une quantité rationnelle, car il ne change pas quand on permute d'une manière quelconque les racines de l'équation  $\Gamma$ . Comme il satisfait d'ailleurs à la définition générale des entiers complexes, c'est un entier de l'arithmétique élémentaire. Car une équation à coefficients entiers dont le plus haut coefficient est l'unité, n'a pas d'autres racines rationnelles que des racines entières.  $D^2$  est positif ou négatif suivant que le nombre des couples de racines imaginaires de l'équation  $\Gamma$  est pair ou impair.

Nous appellerons *système de modules minimum* un système d'entiers complexes  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  appartenant au corps  $K$  et tel que la valeur absolue de  $D^2$  soit la plus petite possible, sans être nulle. Ce minimum existe certainement, puisque  $D^2$  ne peut prendre que des valeurs entières.

Tout entier complexe  $E$  du corps  $K$  peut se mettre sous la forme

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_n\omega_n,$$

$m_1, m_2, \dots, m_n$  étant des entiers non complexes. En effet, soient  $E', E'', \dots, E^{(n-1)}$ , les conjugués de  $E$ ; déterminons les quantités  $m_1, m_2, \dots, m_n$  par les équations

$$\begin{aligned} E &= m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_n\omega_n, \\ E' &= m_1\omega'_1 + \dots + m_n\omega'_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ E^{(n-1)} &= m_1\omega_1^{(n-1)} + \dots + m_n\omega_n^{(n-1)}; \end{aligned}$$

les quantités  $m_1, m_2, \dots, m_n$  seront rationnelles, car leurs valeurs ne changent évidemment pas quand on permute d'une manière quelconque les racines de  $\Gamma$ . Supposons que l'une au moins de ces quantités soit fractionnaire, par exemple,

$$m_1 = m'_1 + r_1,$$

$m'_1$  étant un nombre entier et  $r_1$  une fraction moindre que 1.  $E_1 = m'_1\omega_1$  est donc

un entier complexe égal à  $r_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_n \omega_n$ . Or le déterminant

$$\begin{vmatrix} r_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_n \omega_n & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ r_1 \omega'_1 + m_2 \omega'_2 + \dots + m_n \omega'_n & \omega'_2 & \dots & \omega'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 \omega_1^{(n-1)} + m_2 \omega_2^{(n-1)} + \dots + m_n \omega_n^{(n-1)} & \omega_2^{(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

a pour valeur  $r_1 D$ . Donc  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  ne constitueraient pas un système de modules minimum, ce qui est contre l'hypothèse <sup>(1)</sup>.

Soit  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une forme d'ordre  $n$  irréductible et décomposable en facteurs linéaires. Nous avons vu que la décomposition de cette forme dépend de la résolution d'une équation irréductible

$$\Gamma \quad \varphi(z) = 0,$$

qui n'a que des racines simples. Ces racines déterminent  $n$  corps algébriques conjugués  $K, K', \dots, K^{(n-1)}$ . Soit  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  un système de modules minimum, la forme

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{j=0}^{j=n-1} (\omega_1^{(j)} y_1 + \omega_2^{(j)} y_2 + \dots + \omega_n^{(j)} y_n)$$

a évidemment ses coefficients entiers. Quant à  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , dans la majorité des cas il ne sera pas possible de la décomposer en facteurs linéaires dont les coefficients sont des entiers de  $K$ . Mais on peut toujours écrire

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = A^{n-1} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{j=n} T_j,$$

en désignant par  $A$  le coefficient de  $x_1^n$  dans  $F$  et par  $T_j$  des facteurs linéaires à coefficients complexes entiers. En effet on voit aisément que ces coefficients sont déterminés par des équations où le coefficient du plus haut terme est l'unité.

Les transformations semblables de  $F$  et de  $F_1$  sont évidemment les mêmes. Il suffira donc d'étudier celles de  $F_1$ .

Considérons d'abord les transformations semblables de la première catégorie. Nous avons déjà démontré que, à une pareille transformation, correspond toujours une unité complexe.

Réciproquement, je dis que, à toute unité complexe de  $K$ , correspond une transformation semblable de  $\Phi$ .

<sup>(1)</sup> Voir au sujet des théorèmes que je rappelle ici l'*Arithmétique* de DIRICHLET ou MIKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*.



$$T_j = \sum_{h=1}^{h=n} \psi_h^{(j)} x_h,$$
$$\psi_h^{(j)} = \sum_{k=1}^{k=n} b_{hk} \omega_k^{(j)},$$
$$(30) \quad y_j = \sum_{h=1}^{h=h} b_{hj} x_h.$$

A  $S_1, S_2, \dots, S_\nu$  répondent des multiplicateurs  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu$  qui forment un système d'unités fondamentales. D'après la théorie générale exposée précédemment, nous savons aussi que  $F$  possède une infinité de transformations semblables de la première catégorie dérivant de  $\nu$  substitutions fondamentales  $S'_1, S'_2, \dots, S'_\nu$ , qui correspondent aussi, comme nous l'avons vu, à des unités  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_\nu$ , et l'on a nécessairement

$$\begin{aligned}\varepsilon'_1 &= \varepsilon_1^{m_{11}} \varepsilon_2^{m_{12}} \dots \varepsilon_N^{m_{1N}}, \\ \varepsilon'_2 &= \varepsilon_1^{m_{21}} \dots \varepsilon_N^{m_{2N}}, \\ &\vdots \\ \varepsilon'_N &= \varepsilon_1^{m_{N1}} \dots \varepsilon_N^{m_{NN}},\end{aligned}$$

20



$$\mathbf{E} = \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \dots \varepsilon_N^{k_N},$$
$$\begin{aligned} \lambda k_1 &= \mu_1 m_{11} + \mu_2 m_{21} + \dots + \mu_\nu m_{\nu 1}, \\ \lambda k_2 &= \mu_1 m_{12} + \mu_2 m_{22} + \dots + \mu_\nu m_{\nu 2}, \\ &\vdots \\ \lambda k_\gamma &= \mu_1 m_{1\gamma} + \mu_2 m_{2\gamma} + \dots + \mu_\nu m_{\nu\gamma}. \end{aligned}$$
$$\mathbf{E}^\lambda = \varepsilon'_1 \mu_1 \varepsilon'_2 \mu_2 \dots \varepsilon'_\nu \mu_\nu.$$

La discussion du cas où le corps  $K$  présente des unités dont le module analytique est *un* est un peu plus compliquée, sans offrir de difficultés particulières. Nous nous permettons de l'omettre. Dans tous les cas, on arrive à la conclusion suivante :

En effet, les corps conjugués qui correspondent aux diverses racines de  $\Gamma$  ne sont pas tous distincts, et le nombre des corps conjugués distincts est un diviseur de  $n$ . Supposons que

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n; \omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n; \dots; \omega_1^{(q-1)}, \omega_2^{(q-1)}, \dots, \omega_n^{(q-1)}$$

appartiennent au même corps algébrique; comme  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  forment un système de modules minimum et que  $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n$  sont des entiers complexes,

on aura

$$(31) \quad \omega'_j = \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_{jh} \omega_h \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

les quantités  $\alpha_{jh}$  étant des coefficients entiers.

En remplaçant les quantités  $\omega_h$  dans les seconds membres de (31) par un système quelconque de modules conjugués, on obtiendra encore un système de modules conjugués. Dès lors, si l'on opère sur les quantités  $\omega'_j$  comme on a opéré sur les quantités  $\omega_h$  et ainsi de suite, on devra finalement retomber sur le système de modules primitif. Il en résulte que les quantités  $\alpha_{jh}$  sont les coefficients d'une substitution périodique.

Considérons maintenant la substitution

$$x_h = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{jh} x'_j,$$

cette substitution ne fait que permuter les facteurs de  $\Phi$ ; c'est donc une transformation en elle-même de  $\Phi$  appartenant à la seconde catégorie. Chacun des  $q - 1$  systèmes appartenant au même groupe que  $\omega_1, \dots, \omega_n$  donnera de même lieu à une substitution transformant  $\Phi$  en elle-même.

Réciproquement, on voit sans difficulté que toute transformation de  $\Phi$  en elle-même résulte d'une transformation de la première catégorie suivie d'une transformation de la seconde catégorie permutant simplement entre eux les facteurs de  $\Phi$ .

Quant aux transformations semblables de seconde catégorie des formes  $F$ , il existe une puissance de l'une quelconque d'entre elles qui appartient à la première catégorie; il existe aussi un nombre limité de transformations semblables de la seconde catégorie qui ramènent une transformation de la seconde catégorie à la première catégorie.





---

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE M. C. GLASENAPP


POUR LA RÉDUCTION DES OBSERVATIONS

DES

ÉCLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER <sup>(1)</sup>,

PAR M. NICOLAS STOYANOFF,

Professeur au Lycée de Sofia.



Dans la dernière année de mon séjour à Toulouse, comme étudiant à la Faculté des Sciences et assistant à l'Observatoire, M. H. Bourget, maître de conférences à la Faculté des Sciences et astronome à l'Observatoire, a bien voulu attirer mon attention sur la dissertation de M. Glasenapp intitulée *Comparaison des observations des éclipses des satellites de Jupiter entre elles et avec les Tables d'éclipses*, écrite en langue russe. Après avoir lu ce très intéressant Mémoire j'ai cru bien, avec l'autorisation bienveillante de M. Glasenapp, d'en écrire un exposé succinct en français, d'autant plus qu'il se rattache en partie au Mémoire de Bailly : *Sur les inégalités de la lumière des satellites de Jupiter, sur leurs diamètres, et sur un moyen de rendre les observations comparables*. (*Histoire de l'Académie des Sciences*, Paris, 1771.)

On sait qu'aujourd'hui encore il y a des astronomes qui préfèrent adopter la valeur de la constante d'aberration de Struve et d'autres celle de Delambre. La discordance entre ces valeurs et les tentatives sans succès de l'explication de cette discordance, ont été l'origine du travail de M. Glasenapp, qui a pour objet de vérifier les calculs de Delambre. Ce problème paraît d'autant plus intéressant que Delambre n'a publié aucun travail ni laissé aucun manuscrit, concernant la détermination de la vitesse de propagation de la lumière. Pour atteindre son but, l'auteur étudie, dans son Mémoire, principalement les causes qui peuvent modifier

---

(1) Le Mémoire de M. Glasenapp est un des plus importants qu'on ait écrits sur la réduction des observations des satellites de Jupiter. M. Downing en a donné autrefois une courte analyse dans le Tome XII (1889) du Recueil *The Observatory*. H. B.

l'éclat apparent du premier satellite de Jupiter et les circonstances que présente l'éclipse du satellite.

Le Mémoire, de 158 pages, est divisé en quatre Chapitres. Nous essayerons d'exposer ici le contenu essentiel de chacun de ces Chapitres.

Le premier Chapitre est consacré à l'étude des causes pouvant modifier l'éclat du premier satellite de Jupiter.

Dans le deuxième Chapitre, on détermine la grandeur du segment qui reste encore éclairé au moment de l'éclipse, dans des circonstances données.

Dans le troisième Chapitre, on examine l'influence sur la durée de l'immersion et de l'émersion du premier satellite due à l'inclinaison de l'orbite du satellite et à la position des nœuds de son orbite par rapport à l'orbite de Jupiter.

Enfin, dans le quatrième Chapitre, on applique les résultats obtenus dans les trois premiers Chapitres aux Problèmes suivants :

1<sup>o</sup> *Détermination de la vitesse de la lumière et vérification des Tables d'éclipses du premier satellite, construites par De Damoiseau.*

2<sup>o</sup> *Détermination de la longitude de Leyde au moyen des observations des éclipses du premier satellite, comparées aux Tables d'éclipses des satellites de De Damoiseau.*

3<sup>o</sup> *Recherche de la constance de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.*

## CHAPITRE I.

### MESURE DE LA QUANTITÉ DE LUMIÈRE IMPERCEPTIBLE.

Dans ce Chapitre, l'auteur tâche de déterminer, pour chacun des satellites de Jupiter et pour chaque éclipse, la quantité de lumière, réfléchiée par le segment invisible <sup>(1)</sup>, en tenant compte de toutes les circonstances qui se présentent pendant l'observation.

En 1732, Grandjean de Fauchy <sup>(2)</sup> a fait remarquer aux astronomes que les inégalités subjectives du mouvement des satellites de Jupiter modifient les dimensions du segment invisible. De Fauchy a même montré qu'il était possible d'étu-

---

<sup>(1)</sup> Bailly appelle *segment invisible* la portion du disque du satellite en dehors de l'ombre pure. Il paraît ignorer l'existence de la pénombre. H. B.

<sup>(2)</sup> *Hist. de l'Acad. d. Sc.*, Paris, 1732.

dier cette modification et de mesurer la quantité de lumière imperceptible, réfléchi par le segment éclairé au moment de l'éclipse apparente. De Fauchy n'a pu parvenir à confirmer son assertion en déterminant les dimensions du segment invisible et en étudiant les inégalités des mouvements des satellites de Jupiter. Ce n'est qu'en 1771 que Bailly<sup>(1)</sup> est parvenu à faire les expériences, indiquées seulement par De Fauchy. Ces expériences sont basées sur la loi suivante :

*Les quantités de lumière reçues par l'œil dans deux lunettes sont en raison directe des carrés des diamètres des ouvertures des deux lunettes.*

La méthode de Bailly, que l'on peut nommer *la méthode des diaphragmes*, lui a permis de calculer la quantité  $S$  de lumière imperceptible, réfléchi par le segment éclairé au moment de l'éclipse apparente, en prenant pour unité la quantité de lumière, réfléchi par le disque entier du satellite pour la lunette d'ouverture  $m$  <sup>(2)</sup>, dont il a fait usage, et dans les conditions suivantes :

- 1° La distance zénithale de Jupiter étant égale à zéro;
- 2° Les distances de Jupiter au Soleil et à la Terre étant respectivement  $\alpha$  et  $\alpha - 1$ , en désignant par  $\alpha$  le demi-grand axe de l'orbite de Jupiter, exprimé en prenant pour unité la distance moyenne de la Terre au Soleil.

Étant donnée la quantité  $S$  de lumière imperceptible du satellite dans les conditions ci-dessus (1° et 2°), l'auteur cherche comment varie  $S$  :

- 1° Quand au lieu d'observer avec une lunette d'ouverture  $m$  on a observé avec une lunette d'ouverture  $n$ ;
- 2° Quand la distance zénithale de Jupiter, au moment de l'observation, est  $z$ ;
- 3° Et quand la distance de Jupiter au Soleil est  $r$ , et celle à la Terre  $\Delta$ .

En tenant compte des trois corrections dues aux trois conditions nouvelles, on aura, pour la quantité de lumière imperceptible, l'expression suivante :

$$(1) \quad S \frac{m^2}{n^2} \varphi(z) \frac{r^2 \Delta^2}{\alpha^2 (\alpha - 1)^2},$$

où  $S$  représente toujours la quantité de lumière imperceptible dans les conditions normales ( $z = 0$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha - 1$ ), mentionnées plus haut.

La Table de Seidel, annexée à la fin de cet exposé (Table III), donne les logarithmes des rapports de l'éclat de l'astre lorsqu'il se trouve au zénith à son éclat

(1) *Sur les inégalités de la lumière des satellites de Jupiter, sur leurs diamètres et sur un moyen de rendre les observations comparables.* (Hist. de l'Acad. d. Sciences, Paris, 1771.)

(2) L'ouverture de la lunette de Bailly mesurait 24 lignes, ou bien 5<sup>m</sup>, 4.

lorsqu'il est à une distance zénithale  $z$  <sup>(1)</sup>. Les logarithmes de ces rapports [de la fonction  $\varphi(z)$ ] sont donnés de degré en degré à partir de  $13^\circ$  jusqu'à  $86^\circ$ .

La valeur de l'expression (1) varie avec la phase du satellite. En effet, le satellite ne nous montre pas toujours toute sa moitié éclairée. Donc, l'expression (1) étant exacte dans le cas où l'on prend pour unité la quantité de lumière réfléchie par le disque entier, sera un peu modifiée dans le cas où nous ne verrons qu'une partie de la surface du satellite.

Si l'on désigne par  $\alpha$  la valeur angulaire de la partie non éclairée du disque apparent du satellite, on pourra exprimer le rapport de la surface éclairée à la surface entière du disque par

$$(1) \quad [1 - \frac{1}{2}\alpha] : 1,$$

et il s'ensuit que, pour les différentes phases, l'expression (1) doit être multipliée par le facteur  $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha}$ . Donc, finalement, la quantité de lumière imperceptible sera donnée par l'expression

$$(3) \quad S \frac{m^2}{n^2} \varphi(z) \frac{r^2 \Delta^2}{a^2 (a-1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha}.$$

La Table II, annexée à la fin de l'exposé, donne les valeurs de  $\log \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha}$  pour les différentes positions de Jupiter et de la Terre. Elle a pour argument l'angle  $\gamma$ , ayant pour sommet le centre de Jupiter et pour côtés les droites qui joignent ce point au centre du Soleil et de la Terre. On a calculé les valeurs pour chaque degré, jusqu'à  $\gamma = 12^\circ$ . Pour le but que l'auteur poursuit, il suffit d'avoir la valeur approximative de cet angle, qui est égale à la valeur absolue de la différence entre la longitude héliocentrique et la longitude géocentrique de Jupiter.

Les causes suivantes peuvent également modifier la valeur de l'expression (3) :

a. La distance plus ou moins grande de la Lune; sa phase et sa distance zénithale;

b. L'état de l'atmosphère;

c. La vue de l'observateur;

d. Toutes les autres causes capables de modifier l'éclat apparent du satellite.

Or, jusqu'à l'apparition du Mémoire de M. Glasenapp, personne n'avait encore fait l'étude intéressante de l'influence de toutes ces causes d'erreurs, et, par conséquent, on n'en pouvait tenir compte.

L'auteur fait ensuite remarquer que les instruments employés peuvent avoir une

---

<sup>(1)</sup> SKIDEL, *Untersuchungen über die gegenseitige Heiligkeit der Firsterne erster Grösse und über die Extinction des Lichtes, etc.*, München, 1852.

influence considérable sur les observations des éclipses, et quand on compare les observations avec les Tables on ne peut se dispenser de tenir compte de cette influence. La conclusion est que les observations des éclipses, faites avec des réflecteurs, sont moins exactes que celles faites avec des réfracteurs.

L'éclat de Jupiter peut aussi faire varier la quantité  $S$  trouvée par Bailly; l'intensité apparente du satellite diminuant à mesure qu'il se rapproche du disque de Jupiter, et croissant au contraire lorsqu'il s'en éloigne. Pour étudier la loi de la variation de l'éclat des satellites avec leurs distances au centre de Jupiter, Bailly a fait des observations avec des diaphragmes pour diverses distances des satellites au centre de Jupiter à des époques différentes. Il a trouvé que la quantité  $S$  de lumière imperceptible, en fonction de la distance  $\rho$  du satellite au centre de Jupiter, est donnée par la formule

$$(4) \quad S = A \frac{1}{\rho} + B \frac{1}{\rho^2}.$$

Bailly n'a déterminé les valeurs de ces constantes que pour les trois premiers satellites de Jupiter.

Voici les valeurs correspondantes de  $S_1, S_2, S_3$  :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{C I.} & S_1 = 0,0495 \frac{1}{\rho} + 0,3397 \frac{1}{\rho^2}, \\ \text{C II.} & S_2 = 0,3933 \frac{1}{\rho} + 0,0375 \frac{1}{\rho^2}, \\ \text{C III.} & S_3 = 0,2157 \frac{1}{\rho} + 0,0756 \frac{1}{\rho^2}. \end{array} \right.$$

Les valeurs des constantes  $A$  et  $B$  se rapportent à la lunette de Bailly, mesurant 24 lignes d'ouverture et grossissant à peu près 60 fois pour une hauteur de Jupiter égale à  $15^\circ$ , et pour la distance 5,2207 au Soleil et 4,8456 à la Terre.

De Lalande <sup>(1)</sup> est parvenu à déterminer la valeur des constantes  $A$  et  $B$  pour le quatrième satellite. Pour sa lunette de  $40 \frac{1}{2}$  <sup>(2)</sup> lignes d'ouverture, il a trouvé pour  $S_4$  la formule

$$(6) \quad \text{C IV.} \quad S_4 = 0,0351 \frac{1}{\rho} + 0,01796 \frac{1}{\rho^2}.$$

Une autre méthode pour déterminer la loi de la variation de l'éclat des satellites avec leurs distances au centre de Jupiter, due à De Barros, est exposée dans son *Mémoire : Nouvelles équations pour le perfectionnement de la théorie*

<sup>(1)</sup> *Hist. de l'Acad. d. Sc.*, Paris, MDCCLXXXVIII, p. 212.

<sup>(2)</sup> 9<sup>cm</sup>, 1.



*des satellites de Jupiter et pour la correction des longitudes terrestres déterminées par les observations des mêmes satellites (Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, pour l'année 1755).* Pour mesurer l'éclat apparent des satellites, De Barros se servait de lames de verre à faces parallèles d'épaisseurs différentes, dont le pouvoir absorbant avait été préalablement déterminé. En comparant les épaisseurs des lames de verre qui produisent les éclipses artificielles du satellite avant les époques de deux éclipses effectives on trouve directement le rapport entre les éclats du satellite au moment des éclipses, le rapport entre les quantités de lumière imperceptible et entre les segments invisibles.

Mais, en diminuant l'éclat du satellite jusqu'à disparition complète, comme cela se fait dans les méthodes de Bailly et de De Barros, on diminue en même temps l'éclat de Jupiter, et quand un diaphragme ou une certaine épaisseur de verre a fait disparaître le satellite, l'éclat apparent de Jupiter est tellement diminué qu'il n'a presque aucune influence sur l'éclat du satellite. D'où l'auteur conclut qu'aucune de ces deux méthodes n'atteint le but qu'il poursuit, à savoir : *Établir la loi de la diminution de l'éclat apparent du satellite avec la diminution de sa distance au centre de Jupiter.* Tout au moins, la solution qu'elles donnent est très peu satisfaisante. Par suite les expressions (5) et (6) données par Bailly et De Lalande ne peuvent, rigoureusement parlant, servir pour comparer les observations des éclipses des satellites de Jupiter, ni entre elles ni avec les Tables d'éclipses.

L'auteur remarque, en outre, que ces deux méthodes ne donnent aucun moyen de déterminer l'influence de la variation de l'éclat de Jupiter sur l'éclat apparent des satellites et il expose sa propre méthode héliométrique, laquelle, d'après lui, donne un moyen excellent pour déterminer la loi de la variation de l'éclat des satellites en fonction de leurs distances au centre de Jupiter. En voici le principe.

On sait que l'objectif de l'héliomètre est composé de deux moitiés mobiles. En faisant mouvoir les deux parties de l'objectif on peut changer la position relative des deux astres; on peut rapprocher à volonté le satellite du disque de Jupiter. Remarquons en plus que chaque moitié de l'objectif donne une image de Jupiter et de son satellite.

Désignons l'une des moitiés de l'objectif et l'image qu'elle donne par l'indice I et l'autre moitié et son image par l'indice II. En prenant des diaphragmes de diverses dimensions (comme ceux dont s'est servi Bailly) et en ne diaphragmant que l'objectif I on peut diminuer à volonté l'éclat du satellite dans l'image I sans modifier l'éclat de Jupiter et de son satellite dans l'image II. En diminuant successivement l'ouverture de l'objectif I on arrive à faire disparaître l'image du satellite dans l'image correspondante. Des expériences semblables pour différentes distances du satellite au centre de Jupiter donneront la loi de la variation de l'éclat

apparent et permettront de déterminer les valeurs des coefficients A, B, C dans la formule

$$(7) \quad S = A + B \frac{1}{\rho} + C \frac{1}{\rho^2},$$

qui, d'après M. Glasenapp, doit remplacer la formule (4), donnée par Bailly.

Un climat défavorable et surtout l'hiver de l'Europe septentrionale n'ayant pas permis à l'auteur de commencer ses observations héliométriques, il se sert des observations de Bailly et de De Lalande pour déterminer les valeurs des constantes A, B, C pour les quatre satellites. Bailly avait déterminé les coefficients A et B en employant seulement deux observations, bien qu'il en ait fait plusieurs pour chaque satellite; M. Glasenapp a profité de toutes les observations faites, pour trouver les valeurs les plus probables des coefficients A, B, C; Bailly avait réduit les observations à l'époque à laquelle Jupiter est éloigné du Soleil de 5,2207, et de la Terre de 4,8456, et situé à la distance zénithale de 75°; M. Glasenapp a réduit les observations à l'époque où Jupiter est aux distances moyennes du Soleil et de la Terre :  $\alpha$  et  $\alpha - 1$ , et lorsqu'il se trouve au zénith.

On obtient ainsi les formules suivantes :

$$(8) \quad \text{C I.} \quad S_1 = 0,0204 - 0,0108 \frac{1}{\rho} + 0,1437 \frac{1}{\rho^2},$$

$$(9) \quad \text{C II.} \quad S_2 = -0,0012 + 0,1789 \frac{1}{\rho} - 0,0450 \frac{1}{\rho^2},$$

$$(10) \quad \text{C III.} \quad S_3 = -0,0027 + 0,1034 \frac{1}{\rho} + 0,0097 \frac{1}{\rho^2},$$

$$(11) \quad \text{C IV.} \quad S_4 = 0,0012 + 0,650 \frac{1}{\rho} + 0,0513 \frac{1}{\rho^2}.$$

Si l'on connaît, en outre, la loi de distribution de la lumière sur le segment invisible, les dimensions du satellite, celles de l'ombre et de la pénombre de Jupiter, on en peut déduire, à l'aide de la valeur de la quantité S, la grandeur du segment invisible et, par conséquent, la position du satellite par rapport à la surface du cône d'ombre de Jupiter.

Après la discussion des valeurs des coefficients A, B, C et après avoir trouvé leurs erreurs probables respectives, l'auteur termine ce Chapitre en observant que l'on ne doit pas regarder comme définitifs les résultats ci-dessus, parce que les expériences de Bailly et de De Lalande, qui ont servi à déterminer les coefficients de la fonction S, ne peuvent nous donner la vraie loi de la variation de l'éclat des satellites de Jupiter.



## CHAPITRE II.

*Étant donnée la quantité de lumière réfléchie par le segment invisible du satellite, déterminer la grandeur de ce segment.*

La solution de ce problème, dit l'auteur, serait tout à fait simple si l'on pouvait admettre avec Bailly qu'il y a une surface de séparation bien déterminée entre l'ombre de Jupiter et l'espace éclairé par le Soleil; c'est-à-dire si l'on pouvait considérer le Soleil comme un point lumineux d'intensité égale à l'éclat du Soleil; autrement dit, si l'on néglige la pénombre. Dans cette hypothèse la quantité de lumière, réfléchie par le segment invisible, exprimerait en même temps le rapport entre la surface du segment invisible et celle du disque entier du satellite. La surface  $J$  du segment invisible serait donnée par l'équation

$$(1) \quad J = \left( \frac{2\varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2\pi} \sin 2\varphi \right) - \frac{R^2}{r^2} \left( \frac{2\psi}{360^\circ} - \frac{1}{2\pi} \sin 2\psi \right),$$

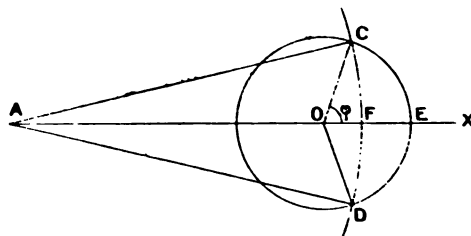
où  $\varphi$  désigne l'angle COE (*fig. 1*), déterminé par la relation

$$(2) \quad \sin \psi = \frac{r}{R} \sin \varphi;$$

$r$  et  $R$  sont les rayons respectifs du disque du satellite et celui du disque de Jupiter.

Mais l'hypothèse faite par Bailly, étant loin d'être vraie, n'est pas admissible,

Fig. 1.



et voici le procédé de M. Glasenapp pour trouver la quantité  $S$  de lumière imperceptible, réfléchie par le segment invisible.

Soient :

ADEO (*fig. 2*), le disque apparent d'un des satellites de Jupiter;

$AC = \Upsilon = 1$ , son rayon;

$AB = P$ , le rayon de l'ombre;

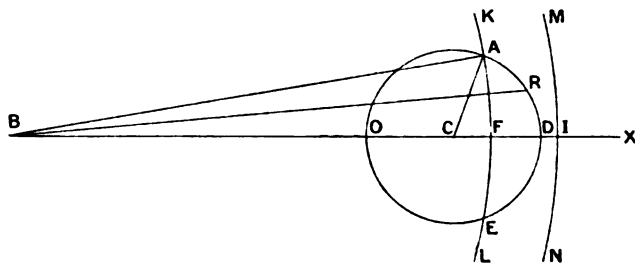
$BI = P_1$ , le rayon de la pénombre;

$FI = q$ , la largeur de la pénombre, comptée le long du rayon BJ.

AB, BI, FI sont exprimés en prenant le rayon du satellite pour unité.

L'intensité de la lumière dans la pénombre n'est pas partout la même : à la limite KL de l'ombre il y a une absence complète de lumière; à la limite MN de

Fig. 2.



la pénombre l'intensité de la lumière est la plus grande : c'est cette intensité que l'auteur prend pour unité. Elle croît de KL à MN.

Soit  $F(\Delta)$  l'intensité lumineuse d'un point quelconque, situé dans la pénombre à une distance  $\Delta$  de la circonférence de l'ombre, comptée le long de la normale à la circonférence de l'ombre.

Pour  $\Delta = 0$ , la fonction  $F(\Delta)$  devient égale à zéro; pour  $\Delta = q$ , elle devient égale à l'unité; pour toutes les autres valeurs de  $\Delta$  comprises entre zéro et  $q$  on a  $0 < F(\Delta) < 1$ .

$\Delta$  ne peut être ni négatif, ni plus grand que  $q$ .

Soient, en coordonnées polaires,

$$(3) \quad u = P,$$

l'équation du cercle d'ombre, qui a pour centre B;

$$(4) \quad u = P_1,$$

l'équation de la pénombre;

$$(5) \quad (u \cos \Theta - b)^2 + u^2 \sin^2 \Theta = \Upsilon^2,$$

l'équation du disque du satellite.

L'angle  $\Theta$  est compté à partir de l'axe fixe BOX vers le rayon vecteur  $u = BR$  dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre;  $b = BC$  est la distance du centre du cercle d'ombre au centre du satellite.

En supposant que la fonction  $F(\Delta)$  exprime la loi de distribution de l'intensité lumineuse dans la pénombre, prenant pour unité l'aire du disque du satellite, et en prenant pour unité la quantité de lumière, réfléchiée par le disque, la quantité de lumière  $S$  du segment ADEF aura pour valeur

$$(6) \quad S = \frac{2}{\pi} \int_{\Theta=0}^{\Theta=\Phi(0)} \int_{u=P}^{u=P+\Delta} F(\Delta) u d\Theta.$$

Introduisant dans cette formule, à la place de  $u$ , une nouvelle variable  $\Delta$ , qui satisfait aux conditions

$$(7) \quad \begin{cases} u = P + \Delta, \\ du = d\Delta, \end{cases}$$

on aura

$$(8) \quad S = \int_{\Theta=0}^{\Theta=\Phi(\Delta)} \int_{\Delta=0}^{\Delta=\Delta} F(\Delta) \left(1 + \frac{\Delta}{P}\right) d\Delta d\Theta,$$

où la limite supérieure de  $\Theta$ ,  $\Theta = \Phi(\Delta)$ , est donnée par l'équation du disque du satellite (5)

$$(9) \quad \Theta = \Phi(\Delta) = \arccos \left[ \frac{(P + \Delta)^2 + b^2 - 1}{2b(P + \Delta)} \right].$$

Parfois l'éclipse a lieu lorsqu'une partie du disque du satellite se trouve en dehors de la pénombre et une autre dans la pénombre. La figure 3 nous représente un tel cas.

Voici comment on trouvera, dans ce cas, la quantité de lumière réfléchiée par le segment IAMLDF :

a. La quantité de lumière, réfléchiée par la surface AMLG, lorsque son intensité de lumière est égale à 1, sera

$$(10) \quad A = \left( \frac{2\varphi_1}{360} - \frac{1}{\pi} \sin 2\varphi_1 \right) - P_1^2 \left( \frac{2\Theta_1}{360} - \frac{1}{2\pi} \sin 2\Theta_1 \right),$$

où  $\varphi_1 = \widehat{ACM}$ ,  $\Theta = \widehat{ABM}$ .

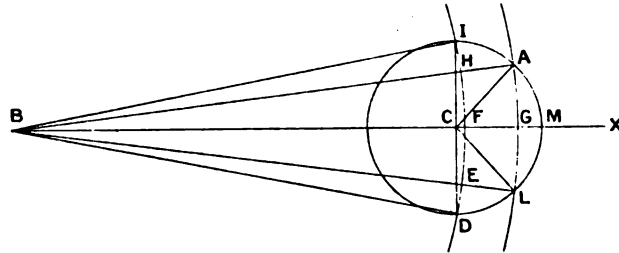
b. La quantité de lumière, réfléchiée par la surface AGLEFH, en supposant que la distribution de l'intensité de lumière dans la pénombre soit exprimée par la fonction  $F(\Delta)$ , sera

$$(11) \quad B = \frac{2P}{\pi} \int_0^{\Theta_1} \int_0^{\eta} F(\Delta) \left(1 + \frac{\Delta}{P}\right) d\Delta d\Theta;$$

c. Enfin, la quantité de lumière, réfléchié par les deux surfaces IAH et ELD, sera

$$(12) \quad C = \frac{2P}{\pi} \int_{\Theta=\Theta_1}^{\Theta=\Phi_0(\Delta)} \int_{\Delta=0}^{\Delta=q} F(\Delta) \left(1 + \frac{\Delta}{P}\right) d\Delta d\Theta,$$

Fig. 3.



où la limite supérieure de  $\Theta$ ,  $\Theta = \Phi(\Delta)$  est donnée par l'équation (5) :

$$(13) \quad \Theta = \Phi_0(\Delta) = \arccos \left[ \frac{(P + \Delta)^2 + b^2 - 1}{2b(P + \Delta)} \right].$$

Donc la quantité de lumière, réfléchié par le segment entier, sera donnée par la somme de (10), (11) et (12)

$$(14) \quad S = A + B + C.$$

Lorsque  $\Theta_1 > \Theta_0$ , il est plus commode, pour les calculs numériques, de faire un changement de limites de la façon suivante : remplaçons dans l'intégrale B(11) la limite  $\Theta_1$  par la limite  $\Theta_0$ , on aura

$$(15) \quad B_1 = \frac{2P}{\pi} \int_{\Theta}^{\Theta_0} \int_0^q F(\Delta) \left(1 + \frac{\Delta}{P}\right) d\Delta d\Theta;$$

faisons dans l'intégrale C (12) les changements correspondants, à savoir : mettons  $\Theta_1$  à la place de  $\Theta_0$  et remplaçons  $\Delta$  par  $q = \Delta'$ , de sorte que

$$(16) \quad \begin{cases} F_1(\Delta') = F(q - \Delta'), \\ u = P - \Delta', \end{cases}$$

elle devient

$$(17) \quad C_1 = \frac{2P_1}{\pi} \int_{\Theta_1}^{\Theta=\Phi_1(\Delta)} \int_{\Delta=0}^{\Delta=q} F_1(\Delta') \left(1 - \frac{\Delta'}{P_0}\right) d\Delta' d\Theta,$$

dont la limite supérieure  $\Theta$  est donnée par l'équation

$$(18) \quad \Theta = \Phi(\Delta') = \arccos \left[ \frac{(P_1 - \Delta')^2 + b^2 - 1}{2b(P_1 - \Delta')} \right],$$

et la quantité de lumière, réfléchiée par le segment entier, sera donnée par l'expression

$$(19) \quad S = A + B_1 + C_1.$$

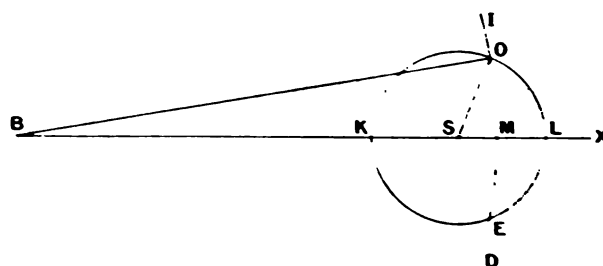
Il y a encore un cas qui peut se présenter lorsqu'on observe une éclipse : c'est le cas où le satellite tout entier est en dehors de l'ombre pure. Les observations de telles éclipses étant très incertaines, l'auteur ne s'occupe pas de ce cas. Il passe à la recherche de la loi de distribution de l'intensité de la lumière dans la pénombre comme il suit :

En admettant que l'intensité de la lumière en un point quelconque de la pénombre soit en raison directe de l'aire de la portion du Soleil visible de ce point, l'intensité de la lumière en un point de la pénombre situé à une distance  $\Delta$  de la circonférence de l'ombre sera donnée par l'expression

$$(20) \quad J = \left( \frac{2\omega}{360} - \frac{1}{2\pi} \sin 2\omega \right) - \frac{R^2}{r^2} \left( \frac{2\psi}{360} - \frac{1}{2\pi} \sin 2\psi \right),$$

où (fig. 4)  $\omega = \widehat{OSL}$  ;  $\psi = \widehat{OBL}$  ;  $R = BN$  étant le rayon apparent du disque de

Fig. 4.



Jupiter, visible du point considéré; et  $r = QS$  le rayon apparent du Soleil visible du même point.

On a encore les relations suivantes entre les angles  $\omega$ ,  $\psi$  et  $\Delta$  :

$$(21) \quad \sin \psi = \frac{r}{R} \sin \omega,$$

$$(22) \quad ML = \Delta = r(1 - \cos \omega) - R(1 - \cos \psi).$$

Au moyen des équations (21) et (22) on peut exprimer les angles  $\omega$  et  $\psi$  en

fonction de  $\Delta$ . On arrive aux relations suivantes :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega \sin 1'' = A \Delta^{\frac{1}{2}} + B \Delta^{\frac{3}{2}} + C \Delta^{\frac{5}{2}} + \dots, \\ \sin 2 \omega = A_1 \Delta^{\frac{1}{2}} + B_1 \Delta^{\frac{3}{2}} + C_1 \Delta^{\frac{5}{2}} + \dots, \\ \psi \sin 1'' = \frac{r}{R} \Delta^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha' \Delta + \beta' \Delta^2 + \gamma' \Delta^3 + \dots), \\ \sin 2 \psi = A_2 \Delta^{\frac{1}{2}} + B_2 \Delta^{\frac{3}{2}} + C_2 \Delta^{\frac{5}{2}} + \dots, \end{array} \right.$$

où  $A, B, C, \dots; A_1, B_1, C_1, \dots; \alpha', \beta', \gamma', \dots; A_2, B_2, C_2, \dots$  sont des coefficients constants pour chaque satellite, que l'on trouvera par des quadratures mécaniques.

En substituant ces valeurs dans l'équation (20) on exprime l'intensité  $J$  en fonction de  $\Delta$ . On a

$$(24) \quad J = F(\Delta) = a\Delta^{\frac{3}{2}} + b\Delta^{\frac{5}{2}} + c\Delta^{\frac{7}{2}} + d\Delta^{\frac{9}{2}} + \dots,$$

où  $a, b, c, d, \dots$  sont des constantes pour chaque satellite.

Voici les valeurs de la fonction  $F(\Delta) = J$ , pour les quatre satellites de Jupiter :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_1 = F'(\Delta) = [0,4217] \Delta^{\frac{3}{2}} + [0,0334_n] \Delta^{\frac{5}{2}} + [1,3968_n] \Delta^{\frac{7}{2}} + [1,1471_n] \Delta^{\frac{9}{2}} + [1,0548_n] \Delta^{\frac{11}{2}} + \dots, \\ J_2 = F''(\Delta) = [0,0023] \Delta^{\frac{3}{2}} + [1,3373_n] \Delta^{\frac{5}{2}} + [2,4617_n] \Delta^{\frac{7}{2}} + [3,8809_n] \Delta^{\frac{9}{2}} + [3,4691_n] \Delta^{\frac{11}{2}} + \dots, \\ J_3 = F'''(\Delta) = [0,0692] \Delta^{\frac{3}{2}} + [1,4655_n] \Delta^{\frac{5}{2}} + [2,5415_n] \Delta^{\frac{7}{2}} + [2,0323_n] \Delta^{\frac{9}{2}} + [3,6412_n] \Delta^{\frac{11}{2}} + \dots, \\ J_4 = F^{IV}(\Delta) = [1,4659] \Delta^{\frac{3}{2}} + [2,4599_n] \Delta^{\frac{5}{2}} + [3,0832_n] \Delta^{\frac{7}{2}} + [4,2152_n] \Delta^{\frac{9}{2}} + [5,4054_n] \Delta^{\frac{11}{2}} + \dots, \end{array} \right.$$

où  $\Delta$  doit être exprimée en partie du rayon du satellite correspondant ; les coefficients étant donnés par leurs logarithmes.

Ayant trouvé la forme des fonctions  $J_1, J_2, J_3, J_4$ , M. Glasenapp résout le problème proposé comme il suit :

Pour les différentes positions du satellite par rapport à l'ombre de Jupiter, c'est-à-dire pour les différentes valeurs de  $\Delta$ , il calcule par les formules (14) et (19) la quantité  $S$  de lumière réfléchiée par le segment. De cette façon il peut construire une Table qui donne les valeurs de  $S$  pour un argument donné  $\Delta$ . A l'aide de cette Table il en construit une autre ayant pour argument  $S$ .

Nous reproduisons à la fin de cet exposé les Tables de M. Glasenapp. Dans la première colonne (Table IV) se trouve l'argument  $S$  ; dans les autres colonnes, les valeurs correspondantes de  $\Delta$ .

A la fin de ce Chapitre l'auteur fait remarquer que les valeurs des intégrales (14) et (19) ne correspondent pas toujours aux vraies valeurs de  $\Delta$ , car elles ne sont



exactes que dans le cas où le disque entier du satellite est éclairé : circonstance qui n'a pas toujours lieu. En effet, la phase du satellite faisant varier la grandeur du segment éclairé, elle peut faire changer la position de  $\Delta$  sur le satellite et la valeur correspondante de  $S$ . Mais il prouve que les variations de  $\Delta$  dues à la phase sont insignifiantes et que, par suite, on peut les négliger. Il remarque encore que la phase du satellite ne change presque pas la valeur de  $\Delta$ , mais elle déplace  $\Delta$  sur le disque d'une distance  $\alpha$ , de sorte que le point extrême du segment invisible se déplace vers le centre apparent du disque du satellite.

En admettant que le déplacement de  $\Delta$  s'effectue de la périphérie du disque vers le centre en suivant le rayon du disque, pour avoir la valeur de  $\Delta$ , qui est nécessaire pour trouver le moment de l'éclipse du centre du satellite (le moment de *l'éclipse centrale*), il faut ajouter la valeur  $\alpha$  à la valeur de  $\Delta$ , calculée au moyen de la Table II.

L'auteur donne à la fin de son Livre la valeur de  $\alpha$  pour les différentes phases des satellites.

Cette Table (II), annexée à la fin de notre travail, a pour argument la différence entre les longitudes héliocentriques et géocentriques de Jupiter.

### CHAPITRE III.

#### DÉTERMINATION DE LA CORRECTION DE L'ÉCLIPSE OBSERVÉE, DÉPENDANT DE LA POSITION DU NOËUD DE L'ORBITE DU SATELLITE PAR RAPPORT A L'AXE DU CÔNE D'OMBRE DE JUPITER.

Pour faire mieux ressortir les deux méthodes que l'auteur emploie, pour résoudre le problème ci-dessus, nous traduisons textuellement ce Chapitre, en ne faisant seulement que de très légères omissions. Ces deux méthodes diffèrent l'une de l'autre : la première est directe, et la seconde indirecte et plus appropriée au calcul numérique.

« Si le satellite en entrant dans le cône d'ombre de Jupiter suivait une direction normale à la projection de l'ombre, il suffirait, pour trouver la correction que l'on doit ajouter au moment observé pour obtenir le moment de l'éclipse centrale du satellite, d'employer la Table IV. Mais comme le plan de l'orbite du satellite ne coïncide pas avec le plan de l'orbite de Jupiter (nous parlons de ce qui se passe dans la projection) le satellite ne peut entrer normalement dans le cône d'ombre que dans des cas exceptionnels où la longitude jovicentrique du nœud ascendant ou du nœud descendant de l'orbite de Jupiter est à peu près

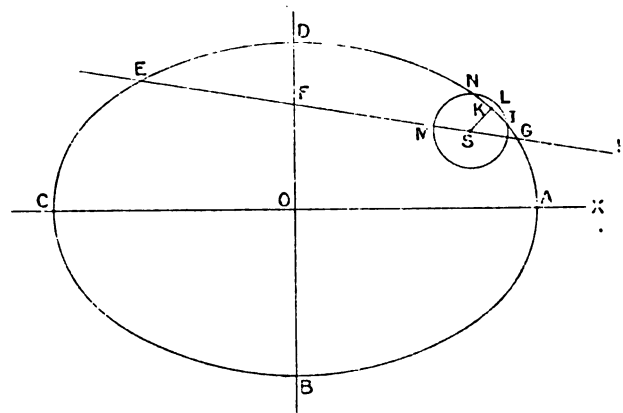
égale à la longitude héliocentrique de Jupiter. Dans tous les autres cas on doit ajouter à la correction, tirée de la Table IV, une autre correction dépendant de l'inclinaison et des positions des nœuds de l'orbite du satellite par rapport à l'orbite de Jupiter.

» Ainsi il nous faudra résoudre le problème suivant :

» *Étant donnée la grandeur du segment invisible, trouver la correction, exprimée en temps, que l'on doit ajouter au moment observé de l'éclipse du satellite de Jupiter, pour avoir le moment de l'éclipse du centre du satellite (moment de l'éclipse centrale).*

» Menons un plan normal à l'axe du cône d'ombre à une distance du centre de Jupiter égale à la moyenne distance du satellite au centre de la planète, on aura comme section l'ellipse ABCD (fig. 5) de demi-axes :  $OA = a$ ,  $OD = b$  <sup>(1)</sup>.

Fig. 5.



L'équation de cette ellipse rapportée aux axes  $OX$ ,  $OY$ , coïncidant avec les axes de l'ellipse, sera

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

» Soit  $EH$  la trajectoire supposée rectiligne du centre du satellite dans le cône d'ombre; elle aura pour équation

$$(2) \quad Y = pX + q.$$

» Le cercle  $MNL$  représente le satellite au moment de l'éclipse observée, son

(1) LAPLACE, *Traité de Mécanique céleste*, p. 114.

centre est en S. La droite SK est normale à l'ellipse, et l'on détermine sa longueur d'après ce qui a été dit dans le Chapitre précédent.

» On peut maintenant énoncer le problème posé ci-dessus sous la forme suivante :

» *Étant données la longueur de la droite SK, normale à l'ellipse et l'équation de la trajectoire du centre du satellite et par conséquent les coordonnées du point G( $\alpha$ ,  $\beta$ ), déterminer la grandeur de la droite SG et l'exprimer en unités de temps.*

» Soient :

$$(1)' \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(2)' \quad Y = pX + q,$$

les équations de l'ellipse d'ombre et de la droite EH.

» Posons

$$SK = k, \quad SG = u;$$

supposons ensuite que

$$\begin{array}{lll} x \text{ et } y & \text{soient les coordonnées du point K,} \\ X \text{ et } Y & \text{»} & \text{»} & S; \end{array}$$

on aura

$$(3) \quad SK^2 = k^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + \dots,$$

$$(4) \quad SG^2 = u^2 = (X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + \dots$$

» L'équation de la normale au point K( $x$ ,  $y$ ) de l'ellipse passant par le point S ( $X$ ,  $Y$ ) sera

$$(5) \quad Y - y = \frac{a^2 y}{b^2 x} (X - x).$$

» Au moyen des quatre équations (1)', (2)', (3), (5) on peut déterminer les quatre coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $X$ ,  $Y$ , et cela fait, en se servant de l'équation (4), trouver  $u$ .

» Cette solution directe offre beaucoup de difficultés pour le calcul numérique et la construction des Tables.

» Voilà pourquoi, pour construire les Tables V et VI, j'ai fait usage d'une autre méthode que je vais exposer ici.

» Des équations données

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$Y = pX + q,$$

j'ai tiré les coordonnées  $\alpha$  et  $\beta$  du point G; puis, les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $k$  étant données, j'ai calculé les différences  $X - x$  et  $Y - y$  par les formules

$$(6) \quad X - \alpha = \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p},$$

$$(7) \quad Y - \gamma = \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p} \frac{a^2 y}{b^2 x},$$

d'où l'on tire

$$(8) \quad k = \pm \sqrt{(X - x)^2 - (Y - y)^2}.$$

» Ensuite j'ai déterminé les coordonnées  $X$  et  $Y$  par les équations (6) et (7), et j'ai fait les différences :

$$(9) \quad X - \alpha = x - \alpha + \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p},$$

$$(10) \quad Y - \beta = y - \beta + \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p} \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

» Enfin, j'ai calculé la valeur de  $u$  par la formule

$$(11) \quad u = \pm \sqrt{(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2}.$$

» Pour l'immersion,  $k$  et  $u$  sont positifs sitôt que le centre du satellite est en dehors du cône d'ombre; ils deviennent négatifs, au contraire, dès que le centre du satellite se trouve dans le cône d'ombre. Dans le premier cas, on doit ajouter la valeur de  $u$  au moment observé; dans le second cas, l'en retrancher. Pour l'émersion, c'est le contraire.

» En suivant cette méthode, j'ai calculé les valeurs de  $k$  et de  $u$  pour les positions des nœuds ascendants des satellites, situés à  $0^\circ$ ,  $10^\circ$ , . . . ,  $90^\circ$  de l'axe du cône d'ombre de Jupiter et j'ai construit la Table qui a pour arguments  $C$  et  $k$ ; où  $C$  est la différence entre les longitudes jovicentriques du Soleil et des nœuds ascendants des orbites des satellites, comptée sur l'orbite de Jupiter. Les Tables IV nous donnent la valeur de  $k$ .

» Prenons quelques exemples pour expliquer l'application des Tables aux réductions des immersions et des émersion observées du premier satellite au moment de l'éclipse centrale du satellite.

## EXEMPLE I.

Le 21 novembre 1871, on a observé à Poulkovo l'immersion du premier satellite. Chaque observateur se servait d'un instrument différent :

Observateurs.	Instru- ments.	Diamètre de l'objectif.	
1. Block.....	Bader.	106 <sup>mm</sup>	14.25.55,1 t. m. de Poulkovo
2. Glasenapp..	Merz I.	97	14.25.53,6    "
3. Bonnsdorf..	Merz III.	97	14.25.51,9    "
4. Kuhlberg...	Salleron.	85	14.25.44,0    "
5. Schwartz...	Plüssl.	56	14.25.34,7    "

Calculons d'abord, au moyen du *Berliner Jahrbuch*, la distance du satellite au centre de Jupiter; pour cette éclipse, elle est égale à 1,867 en parties du diamètre équatorial de Jupiter. La Table I nous donne le logarithme du segment correspondant 2,7468. Cela fait, on doit :

1° Réduire ce segment à la distance moyenne de Jupiter au Soleil et à la Terre : le calcul donne :

$$\log \frac{r^2 \Delta^2}{a^2 (a-1)^2} = 0,0934;$$

2° Trouver la correction due à la phase; l'angle  $\gamma$ , la différence des longitudes héliocentrique et géocentrique de Jupiter sera, dans le cas actuel, 9°, 5; la correction correspondant à cet angle se trouve dans la Table II; elle est égale à

$$\log \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x} = 0,0030;$$

3° Réduire le segment au cas où la distance zénithale de Jupiter serait égale à zéro; dans le cas actuel et au moment de l'immersion, Jupiter avait une distance zénithale de 43°, 1; à cet angle correspond

$$\log \varphi(z) = 0,0233.$$

En multipliant le segment 2,7468, trouvé plus haut, par les nombres trouvés aux n°s 1°, 2°, 3°, on aura la grandeur  $S_0$  du segment invisible, correspondant aux circonstances de l'immersion observée :

*Logarithme du segment normal.*

Pour la lunette de Bailly.....	$\bar{2},7468$
$\log \frac{r^2 \Delta^2}{a^2(a-1)^2}$ .....	0,0934
$\log \frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha}$ .....	0,0030
$\log \varphi(\alpha)$ .....	0,0233
$\log S_0$ .....	$\bar{2},8665$

Le segment ainsi réduit varie pour chaque lunette dans le rapport  $\frac{m^2}{n^2}$ , où  $m$  désigne l'ouverture de la lunette de Bailly, à laquelle correspond le segment trouvé  $S_0$ , et  $n$  l'ouverture de la lunette, au moyen de laquelle on a fait l'observation. Pour les lunettes en question,  $\log \frac{m^2}{n^2}$  a les valeurs correspondantes que voici :

1.	2.	3.	4.	5.
Bader.	Merz I.	Merz III.	Salleron.	Plössl.
$\bar{1},4166$	$\bar{1},4970$	$\bar{1},4970$	$\bar{1},6065$	$\bar{1},9717$

En ajoutant ces logarithmes à la valeur de  $S_0 = [\bar{2},8665]$ , nous aurons les valeurs des segments, correspondant à chaque lunette au moment de l'éclipse :

$\log S$ .....	$\bar{2},2831$	$\bar{2},3635$	$\bar{2},3635$	$\bar{2},4730$	$\bar{2},8382$
$S$ .....	0,0192	0,0231	0,0231	0,0297	0,0689

La Table IV donne ensuite les valeurs suivantes de  $k_0$  :

$-73^{\circ},7$	$-71^{\circ},8$	$-71^{\circ},8$	$-68^{\circ},7$	$-56^{\circ},2$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

qui doivent être corrigées de l'influence de la phase du satellite. La correction que l'on doit y apporter se trouve dans la deuxième colonne de la Table II, ayant pour argument l'angle  $\chi$ . Cette correction est  $\alpha = 1^{\circ},6$  et, par conséquent, les  $k_0$  corrigés ou les  $k$  prendront les valeurs suivantes :

$-72^{\circ},1$	$-70^{\circ},2$	$-70^{\circ},2$	$-67^{\circ},1$	$-54^{\circ},6$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Pour trouver les valeurs définitives des  $u$ , il faut connaître la position du nœud par rapport à l'axe du cône d'ombre de Jupiter au moment de l'immersion.

La Table V, qui a pour arguments l'angle  $C$  et  $k$ , nous donne les valeurs des  $u$ . Dans le cas actuel,  $C = 155^{\circ}$ , et les  $u$  cherchés seront

$-74^{\circ},8$	$-72^{\circ},9$	$-72^{\circ},9$	$-69^{\circ},6$	$-56^{\circ},7$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

En ajoutant ces valeurs aux moments observés, nous aurons les résultats suivants pour l'époque de l'éclipse centrale du premier satellite, observée en 1871, le 21 novembre, à Poulkovo :

Obser- vateurs.	Instru- ments.	Diamètre de l'objectif.	Moment observé.	Éclipse centrale.
1. Block . . . . .	Bader.	106 <sup>mm</sup>	14.25.55,1 <sup>h m s</sup>	14.24.40,3 <sup>h m s</sup> t. m. de Poulkovo
2. Glasenapp .	Merz I.	97	14.25.53,6	14.24.40,7 »
3. Bonnsdorff.	Merz III.	97	14.25.51,9	14.24.39,0 »
4. Kuhlberg..	Salleron.	85	14.25.49,0	14.24.34,4 »
5. Schwarz...	Plössl.	56	14.25.34,7	14.24.38,0 »

### EXEMPLE II.

En 1873, le 14 avril, fut observé à Poulkovo l'émersion du satellite de Jupiter, au moyen des instruments suivants, par les observateurs suivants :

Observateurs.	Instruments.	Diamètre de l'objectif.	
1. Wagner....	Le grand refr.	379 <sup>mm</sup>	9.43. 9,8 t. m. de Poulkovo
2. Tatchaloff..	Héliomètre.	188	9.43.35,5 »
3. Lindemann.	Steinheil.	126	9.43.30,9 »
4. Glasenapp..	Merz I.	97	9.43.35,2 »
5. Bruns.....	Merz III.	94	9.43.34,3 »

En procédant de la même façon que dans le premier exemple, nous obtiendrons les éléments suivants pour la réduction des moments observés aux moments de l'émersion du centre du satellite :

$\log \frac{r^2 \Delta^2}{a^2(a-1)^2}$ .....	0,1558
$\log \frac{1}{1-\frac{1}{2}z}$ .....	0,0032
$\varphi(z) \log$ .....	0,0376
$\log \frac{r^2 \Delta^2}{a^2(a-1)^2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} \varphi(z)$ .....	0,1966
$z$ .....	47°,9
$\chi$ .....	9°,6
$C$ .....	16°,0
$\rho$ .....	1,873

La distance  $\rho$  du satellite au centre de Jupiter étant connue, la Table I nous donne : le logarithme du segment normal est égal à 2,7449, il faut lui ajouter

$\log \frac{r^2 \Delta^2}{a^2(a-1)^2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha} \varphi(z) = 0,1966$ ; ainsi la valeur du segment  $S_0$  sera égale à  $[2,9415]$ , qui correspond à la lunette de Bailly et aux circonstances particulières au moment de l'émergence du satellite.

Ensuite, comme dans l'exemple précédent, on doit multiplier  $S_0$  par  $\frac{m^2}{n^2}$ . Les logarithmes de  $\frac{m^2}{n^2}$ , pour les instruments dont on a fait usage sont les suivants :

1.	2.	3.	4.	5.
Grand refr.	Héliomètre.	Steinheil.	Merz I.	Merz III.
$\bar{2},3084$	$\bar{1},2200$	$\bar{1},2264$	$\bar{1},4970$	$\bar{1},7288$

en les multipliant par  $S_0 = [8,9415]$ , nous aurons

$[\bar{3},2499]$	$[\bar{2},1615]$	$[\bar{2},0279]$	$[\bar{2},4385]$	$[\bar{2},6703]$
------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

c'est-à-dire

0,00178	0,0145	0,0161	0,0274	0,0468
---------	--------	--------	--------	--------

Ces derniers nombres représentent les segments correspondant aux différentes lunettes, dans les circonstances des observations.

Ayant les segments, nous trouverons, à l'aide de la Table IV, les valeurs suivantes pour  $k_0$  :

$-100^s,6$	$-76^s,2$	$-75^s,2$	$-69^s,7$	$-62^s,3$
------------	-----------	-----------	-----------	-----------

Ensuite nous trouverons la correction  $\alpha$  à l'aide de l'argument  $\chi$ ; la valeur de cette correction est  $1^s,6$ . En appliquant cette correction on obtient pour  $k$  les valeurs suivantes :

$-99^s,0$	$-74^s,6$	$-73^s,6$	$-68^s,1$	$-60^s,7$
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

D'après ces données et l'angle  $C = 16^\circ$ , qui détermine la position du nœud de l'orbite du premier satellite par rapport au cône d'ombre de Jupiter, nous obtiendrons, en faisant usage de la Table V, les valeurs suivantes de  $u$  :

$-100^s,9$	$-76^s,1$	$-75^s,1$	$-69^s,4$	$-61^s,8$
------------	-----------	-----------	-----------	-----------

que l'on doit retrancher des moments observés, pour avoir les moments de l'émergence du centre du premier satellite de Jupiter, on aura donc :



Observateurs.	Instruments.	Diamètre de l'objectif.	Moment observé.	Moment de l'émerison du centre du satellite.
1. Wagner...	Le grand refr.	379 <sup>mm</sup>	9.43. 9,8 <sup>h m s</sup>	9.44.50,7 t. m. de Poulkovo
2. Tatchaloff.	Héliomètre.	188	9.43.35,5	9.44.51,6 »
3. Lindemann.	Steinheil.	126	9.43.30,9	9.44.46,0 »
4. Glasenapp.	Merz I.	97	9.43.35,2	9.44.44,6 »
5. Bruns .....	Merz VIII.	74	9.43.34,3	9.44.36,1 »

## CHAPITRE IV.

Les trois premiers Chapitres de l'Ouvrage de M. Glasenapp sont consacrés à l'étude des méthodes de réduction des observations des éclipses des satellites de Jupiter au moment de l'éclipse centrale.

Le quatrième Chapitre, qui renferme à lui seul 102 pages, est consacré à l'application des résultats, obtenus dans les trois premiers Chapitres, à la résolution des problèmes, dont nous avons déjà fait mention au début. Nous nous bornerons à donner ici un court résumé de la solution de ces questions; renvoyant, pour plus de détails, le lecteur au Mémoire même de M. Glasenapp.

### 1<sup>re</sup> Mesure de la vitesse de la lumière.

Pour déterminer l'équation de la lumière, l'auteur fait usage de toutes les éclipses du premier satellite de Jupiter (immersions et émerisons), observées depuis l'année 1848 jusqu'à l'année 1873, dans les observatoires de Greenwich, d'Altona, de Leipzig, de Marburg, de Leyde, d'Oxford, de Windsor, des Galles du Sud, de Poulkovo, de Kieff et de Nicolaëff. Tout d'abord il réduit toutes ces observations au nombre de 387 à l'instant de l'éclipse centrale et aux circonstances normales. Puis il compare les moments des observations réduites avec les moments des éclipses correspondantes du premier satellite de Jupiter donnés par les Tables d'éclipses de Damoiseau.

Voici le procédé employé pour la formation des équations de condition :

« Désignons par  $x_0$  la correction des Tables des éclipses du premier satellite de Jupiter du baron de Damoiseau, par  $y$  la correction de l'équation de la lumière, d'après Delambre; c'est-à-dire prenons pour la vraie valeur de l'équation de la lumière  $493^s,2 + y$ , désignons par  $\Delta$  la distance de Jupiter au centre de la Terre au moment de l'éclipse du satellite, par  $T_0$  le moment réduit de l'observation,

par  $T_c$  le moment calculé de l'éclipse (tiré du *Naut. Alm.*). Pour déterminer  $y_1$ , on aura les équations de condition suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} T_c + x_0 + \Delta y_1 = T_0, \\ T'_c + x_0 + \Delta' y_1 = T'_0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

» Pour n'avoir à faire qu'à de petits nombres posons  $y_1 = \delta^s + y$ ; les équations (1) prendront la forme

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{\epsilon} + x_0 + \Delta y = T_0, \\ \bar{\epsilon}' + x_0 + \Delta' y = T'_0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

où  $\bar{\epsilon} = T_c + S\Delta$ ,  $\bar{\epsilon}' = T'_c + S\Delta'$ , ....

» En comparant  $\bar{\epsilon}$ ,  $\bar{\epsilon}'$ , ... avec  $T_0$ ,  $T'_0$ , ..., on voit de suite que  $x_0$  est à peu près égal à  $\pm 65^s$  en temps moyen, où le signe inférieur correspond à l'immersion, le signe supérieur à l'émersion; en vertu de quoi on peut poser  $x_0 = \pm 65^s + x$ . La correction et son signe montrent que l'ellipse des Tables se trouve dans l'intérieur de l'ellipse réelle, ou, autrement dit, que la surface d'ombre donnée par les Tables se trouve dans l'intérieur de la surface réelle.

» Ici, nous devons faire une supposition relativement à la courbe adoptée par De Damoiseau comme intersection de la surface d'ombre avec un plan normal à l'axe de cette surface. »

M. Glasnapp, après avoir montré qu'on peut faire à ce sujet deux hypothèses, admet qu'en construisant ses Tables d'éclipses des satellites, Damoiseau avait supposé que la courbe d'intersection de la surface d'ombre avec un plan normal à l'axe de cette surface était une ellipse; il suppose, en outre, que l'ellipse donnée par les Tables et l'ellipse effective sont semblables, et que la différence entre leurs demi-grands axes est égale à  $\pm 65^s$  en temps moyen. A l'aide de ces hypothèses, il a construit la Table VII annexée à la fin de ce Mémoire. Elle servira à corriger les instants calculés  $\bar{\epsilon}$ ,  $\bar{\epsilon}'$ , ... de  $\pm 65^s$ , en tenant compte de la position des nœuds de l'orbite du satellite par rapport à l'axe de la surface d'ombre de Jupiter. L'argument C de cette Table est le même que celui des Tables V et VI.

« Ainsi, après avoir corrigé les quantités  $\bar{\epsilon}$ ,  $\bar{\epsilon}'$ , ..., nous obtiendrons les équations (2) sous la forme

$$(3) \quad \begin{cases} \iota + x + \Delta y = T_0, \\ \iota' + x + \Delta' y = T'_0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

dans lesquelles  $\iota = \bar{\epsilon} \mp (65^s)$ ,  $\iota' = \bar{\epsilon}' \mp (65^s)$ , ..., où  $(65^s)$  signifie la correction

des moments calculés  $\tau$ ,  $\tau'$ , . . . de 65<sup>s</sup>, corrigée de la position du nœud de l'orbite du satellite.

» Les équations (3) peuvent ne pas être tout à fait exactes, parce que les réductions  $u$  du moment observé ne sont pas tout à fait complètes, c'est-à-dire que tous les  $T_0$  ne sont pas réduits à être homogènes. En réalité les réductions de nos observations impliquent la fonction  $S$ , dont les coefficients ont été donnés par Bailly. Donc, les erreurs des coefficients de cette fonction ne permettent pas d'éliminer tout à fait l'influence des lunettes et d'autres causes, dépendant de l'éclat du satellite pendant l'éclipse. Supposons que nous ne connaissions pas exactement la loi de la variation de l'éclat du satellite, due à la variation de la distance apparente du satellite au centre de Jupiter, introduisons dans les équations (3) un terme de la forme  $\rho z$  dépendant du coefficient indéterminé  $z$  et de la distance apparente  $\rho$  du satellite au centre de Jupiter (<sup>1</sup>). Dans ce cas, les équations (3) deviendront :

$$(4) \quad \begin{cases} x + \Delta y + \rho z + t - T_0 = 0, \\ x + \Delta' y + \rho' z + t' - T'_0 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

L'auteur prend comme forme définitive d'équations de condition la forme (4). Il forme ces équations pour toutes les observations, leur applique la méthode des moindres carrés et obtient deux systèmes d'équations normales, un pour les immersions et un autre pour les émergences. Leur résolution lui donne les valeurs suivantes de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  :

a. *Pour l'immersion du premier satellite.*

$$\begin{aligned} x_0 &= -60,6 \pm 8,0, \\ y_0 &= +10,52 \pm 1,74, \\ z_0 &= -1,97 \pm 3,54. \end{aligned}$$

L'erreur probable d'une observation de poids  $un = \pm 9^s, 89$ .

(5)

b. *Pour l'émergence du premier satellite.*

$$\begin{aligned} x_1 &= -9,0 \pm 6,0, \\ y_1 &= -1,47 \pm 1,26, \\ z_1 &= +1,60 \pm 2,56. \end{aligned}$$

L'erreur probable d'une observation de poids  $un = \pm 9^s, 09$ .

---

(<sup>1</sup>)  $z$  est la correction correspondant à la variation supposée d'éclat.

Les valeurs de  $y$  trouvées des observations de l'immersion et de l'émersion du premier satellite diffèrent l'une de l'autre d'un nombre très considérable, de 11<sup>s</sup>,99, qui dépasse beaucoup trop la valeur de l'erreur probable d'une détermination isolée. L'auteur ne donne pas d'explication définitive de cette différence, mais il fait des hypothèses intéressantes pour l'expliquer.

Il remarque que cette discordance peut avoir trois origines :

1<sup>o</sup> Inexactitudes dans les Tables de Damoiseau.

2<sup>o</sup> Erreurs dans l'évaluation du segment invisible que les valeurs trop grossières de  $z$  ne peuvent éliminer.

3<sup>o</sup> Du fait que les immersions et les émergences ne sont pas observées de la même manière.

Sans données pour se déterminer sur ces points, M. Glasenapp prend la moyenne pondérée des valeurs de  $y$  et trouve

$$y = + 2^s,64 \pm 1^s,02.$$

ce qui donne pour l'équation de la lumière :

$$500^s,84 \pm 1^s,02.$$

et, en traitant les valeurs de  $x$  d'une manière analogue, il en tire la correction moyenne des Tables

$$- 27^s,7 \pm 4^s,8.$$

Pour voir si ces corrections améliorent la valeur de l'erreur probable, il résout à nouveau les équations de condition en gardant les moments des éclipses sans y apporter de corrections. Il trouve

a. *Pour l'immersion du premier satellite.*

$$x_0 = - 8^s,8 \pm 9^s,0,$$

$$y_0 = + 1,47 \pm 1,96,$$

$$z_0 = + 10,9 \pm 4,0.$$

L'erreur probable d'une observation de poids  $un = \pm 11^s,12.$

(6)

b. *Pour l'émersion du premier satellite.*

$$x_1 = - 19^s,3 \pm 7^s,3,$$

$$y_1 = + 5,43 \pm 1,51,$$

$$z_1 = - 4,1 \pm 3,1.$$

L'erreur probable d'une observation de poids  $un = \pm 10,95.$

Combinant comme plus haut les valeurs de  $y$ , on trouve la valeur suivante de l'équation de la lumière :

$$497^{\circ},15 \pm 1^{\circ},20.$$

On en conclut donc que la méthode de M. Glassenapp n'abaisse pas d'une manière notable l'erreur probable d'une observation, déduite de la comparaison aux Tables de Damoiseau.

On obtient un meilleur résultat, dit M. Glassenapp, en traitant à part les observations faites le même jour de manière à éliminer les erreurs périodiques des Tables. Voici les résultats obtenus ainsi :

a. *Immersion.*

Erreur probable d'une observation réduite.....	$\pm 5^{\circ},5$
Erreur probable d'une observation non réduite .....	$\pm 10^{\circ},0$

b. *Émersions.*

Erreur probable d'une observation réduite.....	$\pm 6^{\circ},6$
Erreur probable d'une observation non réduite.....	$\pm 8^{\circ},5$

Nous ne devons pas oublier de mentionner la remarque faite par l'auteur, que les corrections obtenues pour les Tables et pour l'équation de la lumière ne peuvent être admises comme définitives. « Ce n'est qu'un essai, dit-il, de comparaison des observations avec les Tables; on ne pourra obtenir un résultat définitif qu'après avoir vérifié la théorie des satellites de Jupiter, calculé à nouveau leurs perturbations et construit de nouvelles Tables. »

En suivant un procédé semblable, l'auteur fait une discussion très intéressante sur l'écart qui existe entre les deux valeurs de l'équation de la lumière, trouvées par Delambre et W. Struve par deux méthodes différentes. Il détermine l'équation de la lumière d'après toutes les observations dont il a fait usage plus haut, après avoir calculé les différences calcul — observation, et sans avoir réduit les moments des observations aux moments des éclipses centrales, en mettant les équations de condition sous la forme suivante :

$$(7) \quad \begin{cases} x + \Delta y + D(C - O) = 0, \\ x + \Delta_1 y + D(C - O)_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

où  $x$  signifie la correction des Tables,  $y$  la correction de la vitesse de la lumière, d'après Delambre,  $\Delta$  la distance de Jupiter à la Terre,  $D(C - O)$  la différence calcul — observation.

Appliquant la méthode des moindres carrés, il arrive à deux systèmes d'équations normales, l'une pour les immersions et l'autre pour les émergences, dont la résolution lui donne pour la valeur de l'équation de la lumière le nombre

$$497^{\text{s}}, 46 \pm 1^{\text{s}}, 08.$$

Ce résultat, identique à celui de Struve, lui montre que l'hypothèse du professeur Hoek <sup>(1)</sup> sur cette question n'est pas exacte, et que toutes les variations possibles dans l'intensité du premier satellite s'annulent mutuellement et qu'elles n'ont pas d'influence sur le résultat final de la détermination de l'équation de la lumière.

2° *Détermination de la longitude de Leyde au moyen de la comparaison des observations des éclipses du premier satellite de Jupiter avec les Tables de De Damoiseau.*

Nous serons très brefs sur ce point. L'auteur trouve que la différence de longitude entre Leyde et Greenwich, déduite des observations des éclipses des satellites de Jupiter faites simultanément en ces deux stations, ne concorde pas avec la différence adoptée,

$$0^{\text{h}} 17^{\text{m}} 56^{\text{s}}, 2 \text{ E},$$

pour la longitude de l'observatoire de Leyde.

Les observations simultanées, réduites d'après la méthode de M. Glassenapp, donnent en effet

$$0^{\text{h}} 18^{\text{m}} 5^{\text{s}}, 4.$$

Les mêmes observations non réduites donnent

$$0^{\text{h}} 18^{\text{m}} 3^{\text{s}}, 6.$$

Ces divergences nous montrent simplement que le mode d'observation des éclipses des satellites de Jupiter ne satisfait pas aux exigences de l'Astronomie moderne. Peut-être le mode d'observation photométrique proposé par Cornu ou celui suivi depuis plusieurs années par M. Pickering à Harvard College donnent-ils de meilleurs résultats?

3° *Constance de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.*

Ce problème me paraissant très intéressant au point de vue théorique, je ter-

---

<sup>(1)</sup> *Astr. Nachr.*, B. LXX, p. 193.

mine le présent exposé en donnant une traduction des pages de la dissertation de M. Glassenapp qui se rapportent à cette question :

« Le professeur S. Newcomb a publié dans la revue américaine *The American Journal of Sciences and Arts*, conducted by Prof. B.-Silliman and James-D. Dana, vol. L, 1870, p. 183, un article intitulé : *Considerations on the apparent inequalities of long period in the mean motion of the Moon*, dans lequel il se propose d'expliquer les inégalités à longues périodes remarquées dans le moyen mouvement de la Lune, en comparant toutes les observations de la Lune, faites à Greenwich et à Washington depuis 1850 jusqu'à 1869, aux Tables de Hansen, en admettant des variations de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.

» Admettant la possibilité d'une pareille variation, il a déterminé les écarts du midi moyen correspondant au cas de la non uniformité de rotation, par rapport au midi moyen correspondant à la rotation uniforme.

» Voici ces écarts, qui m'ont été communiqués dans une lettre du 24 octobre 1873 :

Époque.	Correction du midi.
1830,5.....	0
1835,5.....	0
1840,5.....	+ 1
1845,5.....	+ 1
1850,5.....	+ 2
1855,5.....	— 5
1860,5.....	+10
1862,5.....	+11
1864,5.....	+10
1866,5.....	+ 6
1868,5.....	+ 2
1870,5.....	0
1872,5.....	— 2

» Ce sont les corrections qu'on doit ajouter au jour moyen, correspondant à la rotation uniforme, pour avoir le jour effectif. En même temps, ce sont les corrections que l'on doit ajouter au moment observé pour avoir le temps moyen en supposant que la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe soit constante.

» L'hypothèse de Newcomb relativement à la variation périodique de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe sera certaine et authentique lorsque sa raison d'être sera prouvée d'une autre manière et par d'autres observations. Les observations des éclipses des satellites de Jupiter peuvent fournir une démonstration de cette hypothèse, démonstration tout à fait indépendante de celle de Newcomb.

» En construisant ses Tables d'éclipses du premier satellite de Jupiter, Damoiseau a admis que la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe était constante; de sorte que si l'on détermine les corrections des Tables d'éclipses du premier satellite de Jupiter pour différentes époques et si l'on trouve des variations périodiques, de telles variations prouvent ou : 1° l'inexactitude des Tables de Damoiseau; ou 2° que le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe n'est pas uniforme. Mais en admettant que les Tables soient exactes, c'est-à-dire qu'en calculant les perturbations des satellites : 1° on n'a négligé aucune des inégalités périodiques importantes; 2° que les coefficients de toutes les inégalités diffèrent des coefficients vrais de nombres entièrement négligeables; et 3° que dans la construction des Tables on n'a fait aucune erreur périodique importante, nous sommes conduits à admettre la seconde hypothèse, à savoir : que la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe varie périodiquement.

» Pour examiner cette question nous avons pris toutes les observations des éclipses du premier satellite de Jupiter, dont nous avons fait usage dans la détermination de l'équation de la lumière. Nous avons ajouté aux moments observés les corrections du midi moyen, trouvées par Newcomb, ensuite nous avons procédé comme nous l'avons fait pour les observations sans corrections.

» Voici les résultats obtenus :

a. *Immersion du premier satellite.*      b. *Émersions du premier satellite.*

$$\begin{array}{ll} x_0 = -42,3 \pm 7,9 & x_1 = -8,7 \pm 6,0 \\ y_0 = +6,83 \pm 1,72 & y_1 = -1,12 \pm 1,24 \\ z_0 = -0,64 \pm 3,50 & z_1 = +1,82 \pm 2,52 \\ r_0 = \pm 9,77 & r'_0 = \pm 8,97 \end{array}$$

» En comparant les erreurs probables ainsi trouvées :  $\pm 9,77$  et  $\pm 8,97$ , d'une observation de poids égal à *un*, avec celles trouvées lors de la détermination de l'équation de la lumière, c'est-à-dire avec  $\pm 9^s,82$  et  $\pm 9^s,09$ , on voit que l'application de la correction de Newcomb aux moments observés des éclipses améliore la concordance entre les observations et les Tables d'éclipses du premier satellite de Jupiter.

» Cette amélioration dans les deux cas, des immersions du premier satellite et des émersions, peut ne pas être considérée comme accidentelle, mais être attribuée à la vraisemblance de la correction de Newcomb, et par conséquent à celle de son hypothèse relativement à la variation périodique de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.

» Pour déterminer les valeurs des corrections du jour moyen à des époques



différentes au moyen des observations des éclipses du premier satellite, c'est-à-dire faire ce qu'a fait Newcomb, en comparant les observations de la Lune avec les Tables, j'ai procédé comme il suit : j'ai corrigé les moments des éclipses du premier satellite, donnés par les Tables, des valeurs de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  trouvées précédemment, et après avoir comparé de nouveau toutes les observations avec les valeurs tabulaires corrigées, j'ai trouvé les valeurs suivantes pour  $C - O$  (calcul — observation) pour les diverses époques :

a. *Pour les immersions.*

Époque.	C — O.	Poids.
1848,86	+ 6,9	4,7
1849,22	+ 6,7	3,4
1850,00	+ 22,7	2,4
1851,10	+ 9,2	5,3
1852,70	+ 22,2	1,6
1853,50	+ 33,2	2,0
1856,58	+ 20,9	4,7
1857,72	+ 16,3	22,7
1858,82	+ 11,5	7,7
1859,90	+ 22,9	2,0
1861,22	+ 14,5	3,3
1862,17	+ 29,0	2,9
1863,15	+ 22,0	3,5
1864,28	— 4,7	7,5
1866,45	+ 22,6	1,8
1867,63	— 33,9	2,6
1868,65	+ 33,8	2,0
1869,76	— 15,2	12,5
1870,84	+ 8,4	6,3
1871,90	— 2,6	9,6
1872,50	+ 5,3	8,2
1873,25	— 15,0	10,2

b. *Pour les émergences.*

Époque.	C — O.	Poids.
1848,24	— 16,7	7,7
1849,27	— 4,5	8,5
1850,32	— 15,4	7,6
1853,50	— 30,7	1,9
1855,70	— 17,2	2,7
1856,97	— 11,5	3,6
1858,10	— 12,2	4,5
1859,15	— 5,9	9,7
1860,21	— 6,3	8,1
1861,30	+ 4,4	0,9
1862,32	— 12,7	4,4
1863,37	— 28,3	3,6
1864,60	— 11,5	1,6
1865,70	— 27,8	0,7
1866,72	— 18,8	3,3
1867,82	— 16,9	4,9
1868,83	— 16,5	6,7
1869,45	— 23,3	2,0
1870,05	— 24,2	1,8
1871,14	— 20,6	8,0
1872,21	— 17,4	21,9
1873,24	— 16,5	26,4

qui m'ont servi à former des équations de condition de la forme

$$(1) \quad x + k(t - t_0) + m(t - t_0)^2 + (C - O) = 0,$$

où pour  $t_0$  nous avons pris l'année 1861,00 et où  $x$ ,  $k$ ,  $m$  doivent être déterminés d'après les valeurs de  $(C - O)$ .

» Les équations de condition nous ont donné des équations normales que voici :

*a. Pour les immersions du premier satellite.*

$$\begin{aligned}
+ 126.9x + 259.3k + 8227m + 1718.1 &= 0, \\
+ 259.3x + 8227k + 35467m + 1706 &= 0, \\
+ 8227x + 35467k + 923395m + 85480 &= 0.
\end{aligned}$$

*b. Pour les émerisions du premier satellite.*

$$\begin{aligned}
+ 140.5x + 455.6k + 12239m + 2111.8 &= 0, \\
+ 455.6x + 12239k + 55150m + 9823 &= 0, \\
+ 12239x + 55150k + 1558741m + 196478 &= 0.
\end{aligned}$$

» La solution de ces équations normales nous a fourni les valeurs suivantes de  $x$ ,  $k$  et  $m$  pour :

*a. Immersions.**b. Émersions.*

$$\begin{aligned}
x_0 &= -17.76 \pm 1.25, & x_1 &= +12.69 \pm 0.86, \\
k_0 &= +0.0832 \pm 0.1553, & k_1 &= -0.2512 \pm 0.09172, \\
m_0 &= +0.06245 \pm 0.02178, & m_1 &= -0.01753 \pm 0.01356,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
x &= -3.52 \pm 0.71, \\
k &= -0.2076 \pm 0.0783, \\
m &= -0.03066 \pm 0.01151.
\end{aligned}$$

» Au moyen de  $x$ ,  $k$  et  $m$  j'ai trouvé les corrections du midi moyen, pour les époques considérées par Newcomb. La Table suivante contient à la fois les corrections de Newcomb et les miennes <sup>(1)</sup>.

---

(1) Les nombres dans la troisième colonne ont été déterminés par la formule (1), de façon que la correction du midi pour 1870.5 soit égale à celle de Newcomb pour la même date.

	Époque.	Correction	
		de Newcomb.	d'après le 1 <sup>er</sup> $\tau$ .
(2)	1850,5	— 2 <sup>4</sup>	+3 <sup>5</sup>
	1855,5	— 5	+4
	1860,5	— 10	+5
	1862,5	— 11	+4
	1864,5	— 10	+3
	1866,5	— 6	+2
	1868,5	— 2	+1
	1870,5	0	0
	1872,5	— 2	— 2

» Les nombres de cette Table montrent :

» 1<sup>re</sup> Que les signes des corrections du midi moyen, déterminé au moyen des observations des éclipses du premier satellite de Jupiter, ne diffèrent pas de ceux des corrections de Newcomb;

» 2<sup>de</sup> Que les périodes de la variation des corrections coïncident dans les deux cas.

» Malgré que mes corrections et celles de Newcomb diffèrent beaucoup les unes des autres, ce qui fait que nous ne pouvons tirer aucune conclusion définitive sur la vraisemblance de l'hypothèse de Newcomb, néanmoins le fait que mes corrections ont le même signe et la même période que celles de Newcomb trouvées au moyen des observations de la Lune, nous donne le droit d'affirmer la grande probabilité de l'hypothèse de Newcomb sur la non-uniformité du mouvement de rotation de la Terre. »

# APPENDICE.

TABLE I (').

2.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1,00	9,1856	9,1848	9,1840	9,1832	9,1824	9,1816	9,1808	9,1801	9,1794	9,1786
1,01	9,1778	9,1770	9,1762	9,1754	9,1747	9,1740	9,1733	9,1725	9,1717	9,1709
1,02	9,1701	9,1693	9,1686	9,1679	9,1672	9,1664	9,1656	9,1648	9,1640	9,1632
1,03	9,1625	9,1618	9,1611	9,1603	9,1595	9,1587	9,1579	9,1572	9,1565	9,1558
1,04	9,1551	9,1543	9,1535	9,1527	9,1519	9,1512	9,1505	9,1498	9,1491	9,1483
1,05	9,1475	9,1467	9,1460	9,1453	9,1446	9,1439	9,1432	9,1424	9,1416	9,1409
1,06	9,1402	9,1395	9,1388	9,1381	9,1374	9,1366	9,1358	9,1351	9,1344	9,1337
1,07	9,1330	9,1323	9,1316	9,1308	9,1301	9,1294	9,1287	9,1280	9,1273	9,1266
1,08	9,1259	9,1251	9,1244	9,1237	9,1230	9,1223	9,1216	9,1209	9,1202	9,1195
1,09	9,1188	9,1181	9,1174	9,1167	9,1160	9,1153	9,1146	9,1139	9,1132	9,1125
1,10	9,1118	9,1111	9,1104	9,1097	9,1090	9,1083	9,1076	9,1069	9,1062	9,1055
1,11	9,1048	9,1041	9,1035	9,1028	9,1021	9,1014	9,1007	9,1000	9,0993	9,0987
1,12	9,0981	9,0974	9,0967	9,0960	9,0953	9,0946	9,0939	9,0933	9,0927	8,0920
1,13	9,0913	9,0906	9,0899	9,0892	9,0886	9,0880	9,0874	9,0867	9,0860	9,0853
1,14	9,0846	9,0839	9,0833	9,0827	9,0821	9,0814	9,0807	9,0800	9,0793	9,0786
1,15	9,0780	9,0774	9,0768	9,0761	9,0755	9,0747	9,0740	9,0734	9,0728	9,0722
1,16	9,0716	9,0709	9,0702	9,0695	9,0688	9,0682	9,0676	9,0670	9,0664	9,0657
1,17	9,0650	9,0643	9,0637	9,0631	9,0625	9,0619	9,0613	9,0606	9,0599	9,0592
1,18	9,0586	9,0580	9,0574	9,0568	9,0562	9,0555	9,0548	9,0542	9,0536	9,0530
1,19	9,0524	9,0518	9,0512	9,0505	9,0498	9,0492	9,0486	9,0480	9,0474	9,0468
1,20	9,0462	9,0455	9,0449	9,0443	9,0437	9,0431	9,0425	9,0419	9,0413	9,0406
1,21	9,0400	9,0394	9,0388	9,0382	9,0376	9,0370	9,0364	9,0358	9,0352	9,0346
1,22	9,0339	9,0333	9,0327	9,0321	9,0315	9,0309	9,0303	9,0297	9,0291	9,0285
1,23	9,0279	9,0273	9,0267	9,0261	9,0255	9,0249	9,0243	9,0237	9,0231	9,0225
1,24	9,0219	9,0213	9,0207	9,0201	9,0195	9,0189	9,0183	9,0177	9,0171	9,0165
1,25	9,0159	9,0153	9,0147	9,0141	9,0135	9,0129	9,0124	9,0118	9,0112	9,0106
1,26	9,0100	9,0094	9,0088	9,0082	9,0077	9,0071	9,0065	9,0059	9,0053	9,0047
1,27	9,0041	9,0036	9,0031	9,0025	9,0019	9,0013	9,0007	9,0001	8,9995	8,9990
1,28	8,9985	8,9979	8,9973	8,9967	8,9961	8,9955	8,9950	8,9945	8,9940	8,9934
1,29	8,9928	8,9922	8,9916	8,9910	8,9905	8,9900	8,9895	8,9889	8,9883	8,9877

(') La caractéristique de tous les logarithmes, donnés dans la Table I, est augmentée de 10.

TABLE I (SUITE).

p.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1,30	8,9871	8,9866	8,9861	8,9856	8,9851	8,9845	8,9839	8,9833	8,9827	8,9822
1,31	8,9817	8,9812	8,9807	8,9801	8,9795	8,9789	8,9783	8,9778	8,9773	8,9768
1,32	8,9763	8,9757	8,9751	8,9745	8,9740	8,9735	8,9730	8,9725	8,9720	8,9714
1,33	8,9708	8,9702	8,9697	8,9692	8,9687	8,9682	8,9677	8,9671	8,9665	8,9659
1,34	8,9654	8,9649	8,9644	8,9639	8,9634	8,9628	8,9622	8,9617	8,9612	8,9607
1,35	8,9602	8,9597	8,9592	8,9586	8,9580	8,9575	8,9570	8,9565	8,9560	8,9555
1,36	8,9550	8,9544	8,9539	8,9534	8,9529	8,9524	8,9519	8,9514	8,9509	8,9503
1,37	8,9498	8,9493	8,9488	8,9483	8,9478	8,9473	8,9468	8,9462	8,9457	8,9452
1,38	8,9447	8,9442	8,9437	8,9432	8,9427	8,9421	8,9416	8,9411	8,9406	8,9401
1,39	8,9396	8,9391	8,9386	8,9381	8,9376	8,9371	8,9366	8,9361	8,9356	8,9351
1,40	8,9346	8,9341	8,9336	8,9331	8,9326	8,9321	8,9316	8,9311	8,9306	8,9301
1,41	8,9296	8,9291	8,9286	8,9281	8,9276	8,9271	8,9267	8,9262	8,9257	8,9252
1,42	8,9247	8,9242	8,9237	8,9232	8,9228	8,9223	8,9218	8,9213	8,9208	8,9203
1,43	8,9198	8,9193	8,9189	8,9184	8,9179	8,9174	8,9169	8,9164	8,9159	8,9154
1,44	8,9150	8,9145	8,9140	8,9135	8,9130	8,9125	8,9120	8,9116	8,9112	8,9107
1,45	8,9102	8,9097	8,9092	8,9087	8,9082	8,9078	8,9074	8,9069	8,9064	8,9059
1,46	8,9054	8,9049	8,9044	8,9040	8,9036	8,9031	8,9026	8,9021	8,9016	8,9012
1,47	8,9008	8,9004	8,8999	8,8994	8,8989	8,8984	8,8979	8,8974	8,8970	8,8966
1,48	8,8962	8,8957	8,8952	8,8947	8,8942	8,8937	8,8933	8,8929	8,8925	8,8920
1,49	8,8915	8,8910	8,8905	8,8901	8,8897	8,8893	8,8889	8,8884	8,8879	8,8874
1,50	8,8869	8,8864	8,8860	8,8856	8,8852	8,8847	8,8842	8,8837	8,8832	8,8828
1,51	8,8824	8,8820	8,8816	8,8811	8,8806	8,8801	8,8796	8,8792	8,8788	8,8784
1,52	8,8780	8,8775	8,8770	8,8765	8,8761	8,8757	8,8753	8,8749	8,8745	8,8740
1,53	8,8735	8,8730	8,8726	8,8722	8,8718	8,8714	8,8710	8,8705	8,8700	8,8695
1,54	8,8691	8,8687	8,8683	8,8679	8,8675	8,8670	8,8665	8,8660	8,8656	8,8652
1,55	8,8648	8,8644	8,8640	8,8635	8,8630	8,8626	8,8622	8,8618	8,8614	8,8610
1,56	8,8606	8,8601	8,8596	8,8592	8,8588	8,8584	8,8580	8,8576	8,8572	8,8567
1,57	8,8563	8,8559	8,8555	8,8551	8,8547	8,8543	8,8539	8,8534	8,8530	8,8526
1,58	8,8522	8,8518	8,8514	8,8510	8,8506	8,8501	8,8497	8,8493	8,8489	8,8485
1,59	8,8481	8,8477	8,8473	8,8468	8,8464	8,8460	8,8456	8,8452	8,8448	8,8444
1,60	8,8440	8,8435	8,8431	8,8427	8,8423	8,8419	8,8415	8,8411	8,8407	8,8402
1,61	8,8398	8,8394	8,8390	8,8386	8,8382	8,8378	8,8374	8,8370	8,8366	8,8362
1,62	8,8358	8,8354	8,8350	8,8346	8,8342	8,8338	8,8334	8,8330	8,8326	8,8322
1,63	8,8318	8,8314	8,8310	8,8306	8,8302	8,8298	8,8294	8,8290	8,8286	8,8282
1,64	8,8278	8,8274	8,8270	8,8266	8,8262	8,8258	8,8254	8,8250	8,8246	8,8242

TABLE I (SUITE).

p.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1,65	8,8238	8,8231	8,8230	8,8226	8,8222	8,8218	8,8215	8,8211	8,8207	8,8203
1,66	8,8199	8,8195	8,8191	8,8187	8,8184	8,8180	8,8176	8,8172	8,8168	8,8164
1,67	8,8160	8,8156	8,8153	8,8149	8,8145	8,8141	8,8137	8,8133	8,8129	8,8125
1,68	8,8122	8,8118	8,8114	8,8110	8,8106	8,8102	8,8098	8,8095	8,8092	8,8088
1,69	8,8084	8,8080	8,8076	8,8072	8,8068	8,8065	8,8062	8,8058	8,8054	8,8050
1,70	8,8046	8,8042	8,8038	8,8035	8,8032	8,8028	8,8024	8,8020	8,8016	8,8012
1,71	8,8008	8,8005	8,8002	8,7998	8,7994	8,7990	8,7986	8,7982	8,7979	8,7976
1,72	8,7973	8,7969	8,7965	8,7961	8,7957	8,7953	8,7950	8,7947	8,7944	8,7940
1,73	8,7936	8,7932	8,7928	8,7924	8,7921	8,7918	8,7915	8,7911	8,7907	8,7903
1,74	8,7899	8,7895	8,7892	8,7889	8,7886	8,7882	8,7878	8,7874	8,7870	8,7867
1,75	8,7864	8,7861	8,7858	8,7854	8,7850	8,7846	8,7842	8,7838	8,7835	8,7832
1,76	8,7829	8,7825	8,7821	8,7817	8,7813	8,7810	8,7807	8,7804	8,7801	8,7797
1,77	8,7793	8,7789	8,7785	8,7782	8,7779	8,7776	8,7773	8,7769	8,7765	8,7761
1,78	8,7757	8,7754	8,7751	8,7748	8,7745	8,7741	8,7737	8,7733	8,7729	8,7726
1,79	8,7723	8,7720	8,7717	8,7713	8,7709	8,7705	8,7702	8,7699	8,7696	8,7693
1,80	8,7690	8,7686	8,7682	8,7678	8,7675	8,7672	8,7669	8,7666	8,7663	8,7659
1,81	8,7655	8,7651	8,7648	8,7645	8,7642	8,7639	8,7636	8,7632	8,7628	8,7624
1,82	8,7621	8,7618	8,7615	8,7612	8,7609	8,7605	8,7601	8,7598	8,7595	8,7592
1,83	8,7589	8,7586	8,7583	8,7579	8,7575	8,7571	8,7568	8,7565	8,7562	8,7559
1,84	8,7556	8,7552	8,7549	8,7546	8,7543	8,7540	8,7537	8,7534	8,7531	8,7527
1,85	8,7523	8,7520	8,7517	8,7514	8,7511	8,7508	8,7505	8,7501	8,7497	8,7494
1,86	8,7491	8,7488	8,7485	8,7482	8,7479	8,7475	8,7471	8,7468	8,7465	8,7462
1,87	8,7459	8,7456	8,7453	8,7449	8,7446	8,7443	8,7440	8,7437	8,7434	8,7431
1,88	8,7428	8,7424	8,7421	8,7418	8,7415	8,7412	8,7409	8,7406	8,7403	8,7399
1,89	8,7396	8,7393	8,7390	8,7387	8,7384	8,7381	8,7378	8,7374	8,7371	8,7368
1,90	8,7365	8,7362	8,7359	8,7356	8,7353	8,7350	8,7347	8,7344	8,7341	8,7338
1,91	8,7335	8,7332	8,7329	8,7325	8,7322	8,7319	8,7316	8,7313	8,7310	8,7307
1,92	8,7304	8,7301	8,7298	8,7295	8,7292	8,7289	8,7286	8,7283	8,7280	8,7277
1,93	8,7274	8,7271	8,7268	8,7265	8,7262	8,7259	8,7256	8,7253	8,7250	8,7247
1,94	8,7244	8,7241	8,7238	8,7235	8,7232	8,7229	8,7226	8,7223	8,7220	8,7217
1,95	8,7214	8,7211	8,7208	8,7205	8,7202	8,7199	8,7196	8,7193	8,7190	8,7187
1,96	8,7185	8,7182	8,7179	8,7176	8,7173	8,7170	8,7167	8,7164	8,7161	8,7158
1,97	8,7155	8,7152	8,7149	8,7146	8,7143	8,7140	8,7138	8,7135	8,7132	8,7129
1,98	8,7126	8,7123	8,7120	8,7117	8,7115	8,7112	8,7109	8,7106	8,7103	8,7100
1,99	8,7096	8,7094	8,7092	8,7089	8,7086	8,7083	8,7080	8,7077	8,7074	8,7071

TABLE I (SUITE).

$\rho$ .	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
2.00	8,7069	8,7066	8,7063	8,7060	8,7057	8,7054	8,7051	8,7049	8,7047	8,7044
2.01	8,7041	8,7038	8,7035	8,7032	8,7029	8,7026	8,7024	8,7021	8,7018	8,7015
2.02	8,7012	8,7009	8,7006	8,7004	8,7002	8,6999	8,6996	8,6993	8,6990	8,6987
2.03	8,6984	8,6982	8,6980	8,6977	8,6974	8,6971	8,6968	8,6965	8,6962	8,6960
2.04	8,6958	8,6955	8,6952	8,6949	8,6946	8,6943	8,6940	8,6938	8,6936	8,6933
2.05	8,6930	8,6927	8,6924	8,6921	8,6919	8,6917	8,6915	8,6912	8,6909	8,6906
2.06	8,6903	8,6900	8,6897	8,6895	8,6893	8,6890	8,6887	8,6884	8,6881	8,6878
2.07	8,6876	8,6874	8,6872	8,6869	8,6866	8,6863	8,6860	8,6857	8,6855	8,6853
2.08	8,6851	8,6848	8,6845	8,6842	8,6839	8,6836	8,6834	8,6832	8,6830	8,6827
2.09	8,6824	8,6821	8,6818	8,6815	8,6813	8,6811	8,6809	8,6806	8,6803	8,6800
2.10	8,6797	8,6795	8,6793	8,6791	8,6789	8,6786	8,6783	8,6780	8,6777	8,6775

TABLE II.

$z$ .	$\log \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z}$ .	$z$ .
0	0,0000	0,0
1	0,0000	0,0
2	0,0001	0,1
3	0,0003	0,2
4	0,0005	0,3
5	0,0009	0,5
6	0,0012	0,7
7	0,0016	0,9
8	0,0021	1,1
9	0,0027	1,4
10	0,0033	1,8
11	0,0040	2,2
12	0,0047	2,6

TABLE III.

<i>z.</i>	<i>log φ z.</i>	<i>z.</i>	<i>log φ z.</i>	<i>z.</i>	<i>log φ z.</i>	<i>z.</i>	<i>log φ z.</i>
		30	0,007	50	0,045	70	0,191
		31	0,008	51	0,049	71	0,204
		32	0,009	52	0,053	72	0,218
13	0,000	33	0,010	53	0,057	73	0,233
14	0,001	34	0,011	54	0,062	74	0,249
15	0,001	35	0,012	55	0,067	75	0,268
16	0,001	36	0,013	56	0,072	76	0,288
17	0,001	37	0,014	57	0,077	77	0,309
18	0,002	38	0,015	58	0,083	78	0,333
19	0,003	39	0,016	59	0,090	79	0,359
20	0,003	40	0,017	60	0,097	80	0,388
21	0,003	41	0,019	61	0,104	81	0,428
22	0,003	42	0,021	62	0,112	82	0,484
23	0,004	43	0,023	63	0,121	83	0,549
24	0,004	44	0,026	64	0,130	84	0,616
25	0,005	45	0,028	65	0,140	85	0,684
26	0,005	46	0,031	66	0,150	86	0,754
27	0,006	47	0,034	67	0,160		
28	0,006	48	0,038	68	0,170		
29	0,007	49	0,041	69	0,180		

TABLE IV.

<i>S.</i>	<i>k<sub>0</sub>.</i>	<i>S.</i>	<i>k<sub>0</sub>.</i>
0,000000	— 118,6	0,00	
0,000001	— 117,8	0,000001	— 115,0 <sup>s</sup>
0,000002	— 117,2	0,000002	— 114,4
0,000003	— 116,6	0,000003	— 114,0
0,000004	— 116,2	0,000004	— 113,6
0,000005	— 115,9	0,000005	— 113,3
0,000006	— 115,6	0,000006	— 113,0
0,000007	— 115,4	0,000007	— 112,8
0,000008	— 115,2	0,000008	— 112,5
0,000009	— 115,1	0,000009	— 112,3
0,000010	— 115,0	0,000010	— 112,0



TABLE IV (SUITE).

S.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0,000	-118,6	-112,0	-110,8	-109,7	-108,7	-107,8	-107,0	-106,3	-105,7	-105,1
0,001	-104,5	-104,0	-103,5	-103,0	-102,5	-102,0	-101,6	-101,2	-100,7	-100,3
0,002	-99,9	-99,5	-99,2	-98,8	-98,4	-98,0	-97,8	-97,5	-97,2	-96,9
0,003	-96,6	-96,3	-95,9	-95,6	-95,3	-95,0	-94,7	-94,4	-94,1	-93,9
0,004	-93,6	-93,3	-93,1	-92,9	-92,6	-92,4	-92,1	-91,9	-91,7	-91,5
0,005	-91,2	-91,0	-90,8	-90,5	-90,3	-90,1	-89,8	-89,6	-89,4	-89,2
0,006	-89,0	-88,8	-88,6	-88,4	-88,2	-88,0	-87,8	-87,6	-87,4	-87,2
0,007	-87,0	-86,8	-86,6	-86,4	-86,2	-86,1	-85,8	-85,6	-85,4	-85,2
0,008	-85,0	-84,8	-84,5	-84,5	-84,3	-84,1	-83,9	-83,7	-83,5	-83,2
0,009	-83,1	-82,9	-82,8	-82,6	-82,5	-82,3	-82,1	-81,9	-81,7	-81,6
0,01	-81,4	-79,9	-78,6	-77,5	-76,6	-75,9	-75,3	-74,8	-74,3	-73,8
0,02	-73,3	-72,8	-72,3	-71,8	-71,4	-70,9	-70,4	-69,9	-69,4	-69,0
0,03	-68,6	-68,1	-67,7	-67,3	-66,9	-66,6	-66,2	-65,8	-65,4	-65,0
0,04	-64,7	-64,3	-63,9	-63,6	-63,3	-62,9	-62,5	-62,2	-61,9	-61,6
0,05	-61,3	-61,0	-60,7	-60,4	-60,0	-59,7	-59,3	-58,9	-58,6	-58,3
0,06	-58,1	-57,9	-57,7	-57,5	-57,2	-56,9	-56,7	-56,4	-56,2	-56,0
0,07	-55,8	-55,5	-55,2	-54,9	-54,7	-54,4	-54,1	-53,9	-53,6	-53,3
0,08	-53,0	-52,7	-52,5	-52,3	-52,1	-51,8	-51,6	-51,4	-51,1	-50,8
0,09	-50,5	-50,2	-49,9	-49,6	-49,3	-49,0	-48,7	-48,4	-48,1	-47,8
0,10	-47,6	-47,4	-47,2	-47,0	-46,7	-46,4	-46,1	-45,9	-45,6	-45,3
0,11	-45,1	-44,9	-44,7	-44,4	-44,1	-43,9	-43,7	-43,5	-43,2	-42,9
0,12	-42,6	-42,4	-42,2	-41,9	-41,6	-41,4	-41,2	-41,0	-40,7	-40,4
0,13	-40,1	-39,9	-39,7	-39,4	-39,1	-38,9	-38,7	-38,5	-38,2	-38,0
0,14	-37,8	-37,5	-37,3	-37,0	-36,8	-36,6	-36,4	-36,2	-35,9	-35,7
0,15	-35,5	-35,2	-34,9	-34,7	-34,5	-34,3	-34,1	-33,9	-33,7	-33,4
0,16	-33,2	-33,0	-32,8	-32,5	-32,3	-32,1	-31,9	-31,7	-31,5	-31,2
0,17	-31,0	-30,8	-30,6	-30,3	-30,1	-29,9	-29,7	-29,5	-29,2	-29,0
0,18	-28,8	-28,6	-28,4	-28,1	-27,9	-27,7	-27,5	-27,3	-27,0	-26,8
0,19	-26,6	-26,4	-26,2	-25,9	-25,7	-25,5	-25,3	-25,1	-24,8	-24,6
0,20	-24,4	-24,2	-24,0	-23,7	-23,5	-23,3	-23,1	-22,9	-22,6	-22,4
0,21	-22,2	-22,0	-21,8	-21,5	-21,3	-21,1	-20,9	-20,7	-20,5	-20,3
0,22	-20,1	-19,8	-19,6	-19,4	-19,2	-19,0	-18,8	-18,6	-18,4	-18,2
0,23	-18,0	-17,7	-17,5	-17,3	-17,1	-16,9	-16,7	-16,5	-16,3	-16,1
0,24	-15,9	-15,7	-15,5	-15,3	-15,1	-14,9	-14,7	-14,5	-14,3	-14,1

TABLE IV (SUITE).

S.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0,23	— 13,8	— 13,6	— 13,4	— 13,2	— 13,0	— 12,8	— 12,6	— 12,4	— 12,2	— 12,0
0,26	— 11,7	— 11,5	— 11,3	— 11,1	— 10,9	— 10,7	— 10,5	— 10,3	— 10,1	— 9,9
0,27	— 9,7	— 9,5	— 9,3	— 9,1	— 8,9	— 8,7	— 8,5	— 8,3	— 8,1	— 7,9
0,28	— 7,6	— 7,4	— 7,2	— 7,0	— 6,8	— 6,6	— 6,4	— 6,2	— 6,0	— 5,8
0,29	— 5,6	— 5,4	— 5,2	— 5,0	— 4,8	— 4,6	— 4,4	— 4,2	— 4,0	— 3,8
0,30	— 3,5	— 3,3	— 3,1	— 2,9	— 2,7	— 2,5	— 2,3	— 2,1	— 1,9	— 1,7
0,31	— 1,5	— 1,3	— 1,1	— 0,9	— 0,8	— 0,6	— 0,4	— 0,2	0,0	+ 0,2
0,32	+ 0,4	+ 0,6	+ 0,8	+ 1,0	+ 1,2	+ 1,4	+ 1,6	+ 1,8	+ 1,9	+ 2,1
0,33	+ 2,3	+ 2,5	+ 2,7	+ 2,9	+ 3,1	+ 3,3	+ 3,5	+ 3,7	+ 3,9	+ 4,1
0,34	+ 4,3	+ 4,4	+ 4,6	+ 4,8	+ 5,0	+ 5,2	+ 5,4	+ 5,6	+ 5,8	+ 6,0
0,35	+ 6,2	+ 6,3	+ 6,5	+ 6,7	+ 6,9	+ 7,1	+ 7,3	+ 7,5	+ 7,7	+ 7,9
0,36	+ 8,1	+ 8,3	+ 8,5	+ 8,7	+ 8,9	+ 9,0	+ 9,2	+ 9,4	+ 9,6	+ 9,8
0,37	+ 10,0	+ 10,2	+ 10,4	+ 10,6	+ 10,8	+ 10,9	+ 11,1	+ 11,3	+ 11,5	+ 11,7
0,38	+ 11,9	+ 12,1	+ 12,3	+ 12,5	+ 12,6	+ 12,8	+ 13,0	+ 13,2	+ 13,4	+ 13,5
0,39	+ 13,7	+ 13,9	+ 14,1	+ 14,3	+ 14,5	+ 14,7	+ 14,8	+ 15,0	+ 15,2	+ 15,4
0,40	+ 15,7	+ 15,9	+ 16,1	+ 16,3	+ 16,5	+ 16,7	+ 16,9	+ 17,1	+ 17,2	+ 17,4
0,41	+ 17,6	+ 17,8	+ 18,0	+ 18,2	+ 18,4	+ 18,6	+ 18,8	+ 19,0	+ 19,1	+ 19,3
0,42	+ 19,5	+ 19,7	+ 19,9	+ 20,1	+ 20,3	+ 20,5	+ 20,7	+ 20,9	+ 21,0	+ 21,2
0,43	+ 21,4	+ 21,6	+ 21,8	+ 22,0	+ 22,2	+ 22,3	+ 22,5	+ 22,7	+ 22,8	+ 23,0
0,44	+ 23,2	+ 23,4	+ 23,6	+ 23,8	+ 24,0	+ 24,1	+ 24,3	+ 24,5	+ 24,7	+ 24,9
0,45	+ 25,1	+ 25,2	+ 25,4	+ 25,6	+ 25,8	+ 26,0	+ 26,2	+ 26,4	+ 26,6	+ 26,8
0,46	+ 27,0	+ 27,1	+ 27,3	+ 27,5	+ 27,7	+ 27,9	+ 28,1	+ 28,3	+ 28,5	+ 28,7
0,47	+ 28,9	+ 29,0	+ 29,2	+ 29,4	+ 29,6	+ 29,8	+ 30,0	+ 30,2	+ 30,3	+ 30,5
0,48	+ 30,7	+ 30,8	+ 31,0	+ 31,2	+ 31,4	+ 31,6	+ 31,8	+ 32,0	+ 32,1	+ 32,3
0,49	+ 32,5	+ 32,7	+ 32,8	+ 33,0	+ 33,2	+ 33,4	+ 33,6	+ 33,8	+ 34,0	+ 34,2
0,5	+ 34,4	+ 36,3	+ 38,2	+ 40,2	+ 41,9	+ 43,7	+ 45,6	+ 47,5	+ 49,4	+ 51,3
0,6	+ 53,1	+ 54,9	+ 56,8	+ 58,8	+ 60,7	+ 62,6	+ 64,5	+ 66,4	+ 68,4	+ 70,3
0,7	+ 72,3	+ 74,2	+ 76,2	+ 78,2	+ 80,3	+ 82,3	+ 84,4	+ 86,5	+ 88,5	+ 90,6
0,8	+ 92,7	+ 94,9	+ 97,1	+ 99,4	+ 101,6	+ 103,8	+ 106,1	+ 108,4	+ 110,7	+ 113,2
0,9	+ 115,8	+ 118,5								

TABLE V (ARGUMENT  $-k$ ).

$k$ .	180°. 0°.	170°. 10°.	160°. 20°.	150°. 30°.	140°. 40°.	130°. 50°.	120°. 60°.	110°. 70°.	100°. 80°.	90°. 90°.
— 0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
— 10	0,0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,1	1,4	1,6	1,7	1,7
— 20	0,0	0,2	0,4	0,9	1,6	2,2	2,7	3,1	3,4	3,5
— 30	0,0	0,3	0,6	1,5	2,4	3,3	4,1	4,7	5,0	5,2
— 40	0,0	0,4	0,9	2,0	3,1	4,4	5,5	6,3	6,6	6,9
— 50	0,0	0,5	1,2	2,5	3,9	5,4	6,8	7,8	8,3	8,6
— 60	0,0	0,6	1,5	3,1	4,7	6,5	8,1	9,4	10,1	10,3
— 70	0,1	0,8	1,8	3,6	5,5	7,5	9,5	11,0	11,9	12,1
— 80	0,1	0,9	2,1	4,2	6,3	8,6	10,9	12,6	13,7	13,9
— 90	0,1	1,1	2,3	4,6	7,0	9,7	12,3	14,2	15,5	15,7
— 100	0,1	1,2	2,5	5,1	7,8	10,7	13,7	15,8	17,3	17,5
— 110	0,1	1,3	2,8	5,6	8,5	11,8	15,1	17,4	19,1	19,3
— 120	0,1	1,4	3,1	6,1	9,3	12,9	16,5	19,1	20,9	21,1

TABLE VI (ARGUMENT  $+k$ ).

$k$ .	180°. 0°.	170°. 10°.	160°. 20°.	150°. 30°.	140°. 40°.	130°. 50°.	120°. 60°.	110°. 70°.	100°. 80°.	90°. 90°.
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
+ 10	0,0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,1	1,3	1,5	1,7	1,7
+ 20	0,0	0,2	0,4	0,9	1,5	2,1	2,7	3,0	3,2	3,3
+ 30	0,0	0,3	0,6	1,4	2,2	3,0	3,9	4,5	4,8	5,0
+ 40	0,0	0,4	0,9	1,9	2,9	4,0	5,2	6,0	6,3	6,7
+ 50	0,0	0,5	1,1	2,3	3,6	5,0	6,4	7,3	7,9	8,4
+ 60	0,0	0,6	1,4	2,8	4,3	6,0	7,6	8,8	9,4	10,0

TABLE VII.

C.	$h$ .	$\partial h$ .
0	64,9	10,0
10	65,0	10,1
20	65,5	10,2
30	66,3	10,3
40	67,2	10,4
50	68,4	10,5
60	69,5	10,6
70	70,4	10,7
80	71,1	10,8
90	71,3	10,9

TABLE VIII.

$u$ .	$g$ .	$u$ .	$g$ .
+ 5	0,2	103	1,2
+ 8	0,3	109	1,3
— 12	0,4	113	1,4
26	0,5	116	1,5
40	0,6	118	1,6
53	0,7	120	1,7
63	0,8	121	1,8
76	0,9	122	1,9
86	1,0	123	2,0
93	1,1	124	2,1

---

# RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM.

---

## QUATRIÈME PARTIE.

DES CONDITIONS AUX LIMITES.

(SUITE ET FIN.)

---

### CHAPITRE III.

DU RÉGIME PERMANENT AU SEIN D'UN FLUIDE VISQUEUX.

---

§ 1. — LA CONDITION D'ADHÉRENCE DOIT ÊTRE ASSIMILÉE A L'INTRODUCTION DE NOUVELLES LIAISONS. — ÉNONCÉ ET DÉMONSTRATION D'UN LEMME <sup>(1)</sup>.

Lorsque deux fluides ne peuvent glisser l'un sur l'autre, lorsqu'un fluide ne peut glisser sur un solide, doit-on traiter le système où deux corps adhèrent entre eux comme on traitait le système où ces corps glissaient l'un sur l'autre, en égalant simplement à 0 la vitesse relative le long de la surface de contact? Doit-on au contraire regarder le nouveau système comme différant du premier par l'introduction de nouvelles liaisons? Les deux manières de voir sont plausibles, bien que la seconde paraisse plus logique.

Ces deux manières de voir ne sont pas équivalentes; la première exige que le vecteur  $(p_x, p_y, p_z)$  aboutisse normalement à la surface de contact, ce que la seconde n'exige pas.

Une ambiguïté analogue s'est présentée dans l'étude du frottement de deux solides l'un sur l'autre; dans ce cas, la première manière de voir a dû être rejetée; elle aurait introduit plus de conditions que le problème ne comportait d'inconnues.

N'en serait-il pas de même dans la question qui nous a occupé au Chapitre précédent? C'est ce que nous nous proposons d'examiner en celui-ci.

Dans ce but, nous allons établir un LEMME QUI EST VALABLE SEULEMENT DANS L'HYPOTHÈSE OU L'ADHÉRENCE D'UN FLUIDE A UN SOLIDE ENTRAÎNE LA PERPENDICULARITÉ DU VECTEUR  $(p_x, p_y, p_z)$  A LA SURFACE DU SOLIDE.

---

<sup>(1)</sup> *Sur certains cas d'adhérence d'un liquide visqueux aux solides qu'il baigne* (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 265; 3 février 1902).

Voici l'énoncé de ce lemme :

*Si un fluide visqueux et non compressible adhère à un corps solide, les six quantités*

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right.$$

*s'annulent aux points du fluide qui sont infiniment voisins de la surface du solide.*

Soient, en effet,  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ , les trois composantes de la vitesse en un point du solide; nous aurons

$$\begin{aligned} u' &= U - \Omega_z y + \Omega_y z, \\ v' &= V - \Omega_x z + \Omega_z x, \\ w' &= W - \Omega_y x + \Omega_x y, \end{aligned}$$

$U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Omega_z$  étant trois quantités qui dépendent exclusivement de  $t$ .

S'il y a adhérence du fluide au solide, nous avons, en tout point de leur commune surface,

$$u - u' = 0, \quad v - v' = 0, \quad w - w' = 0.$$

Les trois fonctions

$$\begin{aligned} f &= u - U + \Omega_z y - \Omega_y z, \\ g &= v - V + \Omega_x z - \Omega_z x, \\ h &= w - W + \Omega_y x - \Omega_x y \end{aligned}$$

s'annulent donc en tous les points de la surface; partant, on peut trouver, en chaque point de cette surface, un vecteur  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , tel que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \alpha F, & \frac{\partial f}{\partial y} &= \beta F, & \frac{\partial f}{\partial z} &= \gamma F, \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= \alpha G, & \frac{\partial g}{\partial y} &= \beta G, & \frac{\partial g}{\partial z} &= \gamma G, \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \alpha H, & \frac{\partial h}{\partial y} &= \beta H, & \frac{\partial h}{\partial z} &= \gamma H, \end{aligned}$$

égalités qui peuvent encore s'écrire

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha F, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \beta F - \Omega_z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma F + \Omega_y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha G + \Omega_z, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \beta G, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma G - \Omega_x, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha H - \Omega_y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \beta H + \Omega_x, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma H. \end{array} \right.$$

Dans ces égalités, on a posé

$$\cos(n_i, x) = \alpha, \quad \cos(n_i, y) = \beta \quad \cos(n_i, z) = \gamma.$$

Ces égalités nous donnent les expressions suivantes des six quantités (89) :

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha F, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \beta G, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma H, \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma G + \beta H, \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha H + \gamma F, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \beta F + \alpha G. \end{array} \right.$$

Les trois premières égalités (91) donnent

$$(92) \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} = \alpha F + \beta G + \gamma H.$$

Les égalités (43) et (44) transforment les égalités (51) de la 1<sup>e</sup> Partie de ces *Recherches* en

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = -\lambda(\alpha F + \beta G + \gamma H) - 2\mu\alpha F, \\ v_y = -\lambda(\alpha F + \beta G + \gamma H) - 2\mu\beta G, \\ v_z = -\lambda(\alpha F + \beta G + \gamma H) - 2\mu\gamma H, \\ \tau_x = -\mu(\gamma G + \beta H), \\ \tau_y = -\mu(\alpha H + \gamma F), \\ \tau_z = -\mu(\beta F + \alpha G). \end{array} \right.$$

Les égalités (48) de la première partie deviennent alors

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_x = (\lambda + \mu)\alpha(\alpha F + \beta G + \gamma H) + \mu F, \\ p_y = (\lambda + \mu)\beta(\alpha F + \beta G + \gamma H) + \mu G, \\ p_z = (\lambda + \mu)\gamma(\alpha F + \beta G + \gamma H) + \mu H. \end{array} \right.$$

Mais, si le fluide adhère au solide, le vecteur  $(p_x, p_y, p_z)$  doit être normal à la surface de contact; on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} \beta p_z - \gamma p_y &= 0, \\ \gamma p_x - \alpha p_z &= 0, \\ \alpha p_y - \beta p_x &= 0; \end{aligned}$$

ou bien

$$\beta H - \gamma G = 0,$$

$$\gamma F - \alpha H = 0,$$

$$\alpha G - \beta F = 0;$$

ou enfin

$$(95) \quad F = K\alpha, \quad G = K\beta, \quad H = K\gamma,$$

$K$  étant une quantité variable d'un point à l'autre de la surface.

D'ailleurs, les égalités (92) et (95) donnent

$$(96) \quad \theta = K.$$

Ce que nous avons écrit jusqu'ici s'applique aussi bien aux fluides compressibles qu'aux liquides incompressibles; si nous restreignons dorénavant notre analyse à ces derniers, nous devons écrire  $\theta = 0$ , partant, selon l'égalité (96),

$$(97) \quad K = 0.$$

Alors, des égalités (91) et (95), découlera le lemme énoncé.

En outre, les égalités (90), (95) et (96) donneront, en tout point de la surface de contact du solide et du liquide

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\Omega_x, \\ \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\Omega_y, \\ \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\Omega_z. \end{array} \right.$$

Supposons, en particulier, le solide immobile ou animé d'un simple mouvement de translation; nous aurons

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = 0$$

et, selon les égalités (98),

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ce résultat, joint au lemme précédent, conduit à la proposition suivante :

*Si un fluide visqueux et incompressible adhère à un solide, et si ce solide est immobile ou animé d'un simple mouvement de translation, on a, en tout*

point de la surface commune aux deux corps,

$$(99) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0, & \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0, & \frac{\partial w}{\partial y} = 0, & \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

§ 2. — ÉCOULEMENT PERMANENT D'UN LIQUIDE, DE PROFONDEUR ET DE HAUTEUR INFINIES, COULANT ENTRE DES PAROIS VERTICALES.

Nous nous occuperons exclusivement de *liquides*, c'est-à-dire de fluides incompressibles; nous supposerons que la température garde une valeur uniforme et constante dans toute l'étendue du fluide. Nous nous trouverons alors (I<sup>re</sup> Partie, Chap. III. § 2) dans un cas où il existe une fonction  $\Lambda(x, y, z, t)$  permettant de mettre les équations de l'Hydrodynamique sous la forme [*loc. cit.*, égalités (157)]

$$(100) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \gamma_x - \frac{q_x}{\rho}, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \gamma_y - \frac{q_y}{\rho}, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} + \gamma_z - \frac{q_z}{\rho}, \end{cases}$$

et cette fonction  $\Lambda$  sera donnée par l'égalité [*loc. cit.*, égalité (158)]

$$(101) \quad \Lambda(x, y, z, t) = V_i + V_e + \frac{\Pi}{\rho}.$$

Dans le présent Chapitre, nous nous proposons d'étudier un *écoulement permanent*, c'est-à-dire un écoulement où les composantes  $u, v, w$  de la vitesse dépendent de  $x, y, z$ , mais point de  $t$ ; dans un tel écoulement, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

partant,

$$\gamma_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\gamma_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\gamma_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}.$$



D'autre part, en un fluide incompressible où

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

est toujours nul, où  $\rho$  a partout la même valeur, où, en outre, d'après les hypothèses faites,  $T$  a une valeur uniforme, on a [I<sup>re</sup> Partie, égalités (58)]

$$q_x = \mu \Delta u, \quad q_y = \mu \Delta v, \quad q_z = \mu \Delta w.$$

Les équations (100) deviennent donc, pour les mouvements que nous avons en vue d'étudier,

$$(100 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} \Delta v = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} \Delta w = 0. \end{cases}$$

A ces équations, il faut joindre l'équation de continuité

$$(101 \text{ bis}) \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Le fluide dont nous étudierons le régime permanent sera supposé illimité aussi bien dans le sens des  $x$  positifs que dans le sens des  $x$  négatifs; les parois du canal dans lequel il se meut seront des cylindres dont les génératrices seront parallèles à  $Oz$ . La vitesse de chaque point matériel appartenant au fluide sera supposée parallèle au plan des  $x, y, z$ , en sorte que l'on aura

$$w = 0.$$

Enfin,  $u, v$  seront supposés indépendants de  $z$ .

Le canal s'étendra à l'infini, aussi bien en amont qu'en aval. A cet égard nous ferons les hypothèses suivantes :

Si l'on désigne par  $l$  la distance d'un point du plan des  $x, y$  à l'origine des coordonnées, lorsque  $l$  croît au delà de toute limite :

Les parois cylindriques du canal s'écartent infiniment; la largeur du canal croît au delà de toute limite;

Les composantes  $u, v$  de la vitesse et toutes leurs dérivées partielles tendent vers 0;

Les produits  $lu, lv, l^2 \frac{\partial u}{\partial x}, l^2 \frac{\partial u}{\partial y}, l^2 \frac{\partial v}{\partial x}, l^2 \frac{\partial v}{\partial y}$ , ne croissent pas au delà de toute

Les équations (100 bis) deviennent

$$(102) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho} \Delta v = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

tandis que l'équation de continuité (101 bis) devient

$$(103) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

En vertu de cette égalité (103), il existe une fonction  $\varphi(x, y)$  telle que l'on ait

$$(104) \quad u = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}.$$

Si nous reportons ces valeurs de  $u$  et de  $v$  dans les deux premières égalités (102), elles deviennent

$$(105) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \varphi = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi = 0. \end{cases}$$

De ces deux égalités, il est aisé de tirer une troisième relation où ne figure plus que la fonction inconnue  $\varphi$ . En effet, différencions la première égalité (105) par rapport à  $y$ , la seconde par rapport à  $x$  et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$(106) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \varphi - \frac{\mu}{\rho} \Delta \Delta \varphi = 0.$$

Traçons une circonférence de rayon  $l$ , ayant pour centre l'origine des coordonnées et située dans le plan des  $x, y$ . Soit  $\sigma$  la partie comprise à l'intérieur de cette circonférence, du plan des  $x, y$  que recouvre le fluide. Considérons l'intégrale

$$(107) \quad J = \int_{\sigma} \Delta \varphi \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \varphi \right] d\sigma$$

que l'on peut encore écrire

$$(107 \text{ bis}) \quad J = \int_{\sigma} \Delta \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta \varphi \right) \right] d\sigma.$$

Transformons-la au moyen d'une intégration par parties.

Soient :

$L$ , le contour de l'aire  $\sigma$ ,

$n_i$ , la normale au contour  $L$  vers l'intérieur de l'aire  $\sigma$ ,

$$\alpha = \cos(n_i, x), \quad \beta = \cos(n_i, y).$$

Nous aurons

$$J = - \int_L (\Delta \varphi)^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right) dL - \int_{\sigma} \Delta \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \varphi \right) d\sigma.$$

Mais, selon l'égalité (107), la seconde intégrale n'est autre que  $J$ ; nous trouvons donc

$$(108) \quad 2J = - \int_L (\Delta \varphi)^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right) dL.$$

D'autre part, nous avons

$$(109) \quad \int_{\sigma} \Delta \varphi \Delta \Delta \varphi d\sigma = - \int_L \Delta \varphi \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n_i} dL - \int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma.$$

Les égalités (106), (107), (108), (109) donnent sans peine

$$(110) \quad \frac{\mu}{\rho} \int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma = \int_L \Delta \varphi \left[ \frac{\Delta \varphi}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n_i} \right] dL.$$

Le contour  $L$  se compose de trois parties :

1° Une partie  $\lambda$  qui coupe le canal en amont;

2° Une partie  $\lambda'$  qui coupe le canal en aval;

3° Une partie qui est la section des parois du canal par le plan des  $x, y$ .

Tout le long de cette dernière partie, si le liquide adhère au solide et si l'on admet l'hypothèse énoncée au § 1, on a, en vertu des égalités (99),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

partant

$$\Delta \varphi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(111) \quad \frac{\mu}{\rho} \int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma = \int_{\lambda} \Delta \varphi \left[ \frac{\Delta \varphi}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n_i} \right] d\lambda \\ + \int_{\lambda'} \Delta \varphi \left[ \frac{\Delta \varphi}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n_i} \right] d\lambda'.$$

Faisons maintenant croître au delà de toute limite le rayon  $l$ . D'après les hypothèses faites, chacun des deux termes du second membre tend vers 0. Il en est donc de même du premier.

Mais, au premier membre, la quantité sous le signe  $\int$  n'est jamais négative; le premier membre n'est donc jamais négatif et il ne peut décroître lorsque  $l$  croît; il ne peut donc avoir 0 pour limite que s'il est constamment nul. Cela exige que l'on ait, en tout point du fluide,

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} = 0.$$

D'ailleurs, nous avons vu, il y a un instant, que l'on avait, sur les parois,

$$\Delta \varphi = 0.$$

On a donc, dans tout le fluide,

$$(112) \quad \Delta \varphi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Nous voyons alors qu'il existe une fonction  $\psi(x, y)$  telle que l'on ait

$$(113) \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

La condition de continuité (103) nous montre que cette fonction vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta \psi = 0.$$

Il en est nécessairement de même de ses dérivées partielles  $u$  et  $v$ , en sorte que, dans toute la partie du plan des  $x, y$  recouverte par le fluide, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Le long de l'intersection des parois du canal avec le plan des  $x, y$ , on a les

égalités (99), partant les égalités

$$\begin{aligned} u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \beta &= \frac{\partial u}{\partial n_i} = 0, \\ v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \beta &= \frac{\partial v}{\partial n_i} = 0. \end{aligned}$$

Si l'on observe en outre que

$$lu, \quad lv, \quad l^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad l^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad l^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad l^2 \frac{\partial v}{\partial y}$$

tendent vers des limites finies lorsque, dans le plan des  $x, y$ , le point  $(x, y)$  s'éloigne à une distance infinie  $l$  de l'origine, on voit que l'on a nécessairement, dans tout l'espace occupé par le fluide,

$$(114) \quad u = 0, \quad v = 0.$$

*Le fluide ne peut présenter d'autre régime permanent que le repos.*

Mais ces égalités (114), reportées dans les égalités (102), exigent que l'on ait

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0,$$

égalités qui sont les conditions d'équilibre de la masse fluide. Si nous supposons que l'on dispose de la pression  $\Pi$  de telle sorte que les deux premières ne soient pas vérifiées, le repos sera impossible et nous nous heurterons à une contradiction.

§ 3. — UN CYLINDRE INDÉFINI, AU SEIN D'UN FLUIDE INDÉFINI, ÉPROUVE UN MOUVEMENT UNIFORME DANS UNE DIRECTION PERPENDICULAIRE AUX GÉNÉRATRICES (1).

Une analyse très voisine de la précédente va nous permettre de traiter un problème dont un cas particulier a été examiné par Stokes.

Un cylindre indéfini, dont les génératrices sont parallèles à  $Oz$ , est animé parallèlement à  $Ox$  d'une translation uniforme de vitesse  $U$ . Il est plongé dans un fluide visqueux indéfini *qui adhère à sa surface*. Le mouvement dure depuis très longtemps, de sorte que *l'état du fluide, rapporté à un système d'axes coordonnés invariablement lié au cylindre, est un état de régime permanent*. On suppose chaque particule fluide animée d'une vitesse normale à  $Oz$  et indépendante de  $z$

$$(115) \quad w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

---

(1) *Sur certains cas d'adhérence d'un liquide visqueux aux solides qu'il baigne* (Comptes rendus, t. CXXXIV, p. 265; 3 février 1902).

Si  $l$  est la distance d'un point à l'axe des  $z$ , on suppose que, lorsque  $l$  croît au delà de toute limite,  $u$ ,  $v$  et toutes leurs dérivées partielles tendent vers 0 et que

$$lu, \quad lv, \quad l^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad l^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad l^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad l^2 \frac{\partial v}{\partial y}$$

ne croissent pas au delà de toute limite.

D'après l'une des hypothèses faites, chacune des composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse doit avoir la même valeur, à l'instant  $t$ , au point dont les coordonnées sont  $x, y$  et, à l'instant  $t'$ , au point dont les coordonnées sont  $x' = x + U(t' - t)$ ,  $y' = y$ , c'est-à-dire que  $u$  et  $v$  ne dépendent de  $x$  et de  $t$  que par le binôme  $(x - Ut)$ , ce qui permet d'écrire

$$(116) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -U \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -U \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Moyennant les égalités (115) et (116), les équations (100 bis) deviennent

$$(117) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + (u - U) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + (u - U) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho} \Delta v = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

tandis que l'équation de continuité (101 bis) reprend la forme

$$(103) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Il existe donc une fonction  $\varphi(x - Ut, y)$  telle que l'on ait

$$(104) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

en sorte que les deux premières égalités (117) deviennent

$$(118) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \varphi = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi = 0. \end{cases}$$

Différentions la première de ces équations (118) par rapport à  $y$ , la seconde par rapport à  $x$  et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous

trouvons que la fonction  $\varphi$  doit vérifier l'équation

$$(119) \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \varphi - \frac{\mu}{\rho} \Delta \Delta \varphi = 0.$$

Dans le plan des  $x, y$ , la section du cylindre a pour contour  $L$ ; dans ce plan, de l'origine des coordonnées pour centre, et avec un rayon  $l$ , décrivons une circonférence de cercle  $\lambda$ ; prenons  $l$  assez grand pour que le contour  $L$  soit, en entier, à l'intérieur du cercle; soit  $\sigma$  l'aire comprise entre les contours  $L$  et  $\lambda$ .

L'égalité (119) nous permet d'écrire

$$(120) \quad \int_{\sigma} \Delta \varphi \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \varphi - \frac{\mu}{\rho} \Delta \Delta \varphi \right] d\sigma = 0.$$

Considérons l'intégrale

$$(121) \quad J = \int_{\sigma} \Delta \varphi \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \varphi \right] d\sigma.$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} J &= \int_{\sigma} \Delta \varphi \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \Delta \varphi \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta \varphi \right) \right\} d\sigma \\ &= - \int_L (\Delta \varphi)^2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right] dL \\ &\quad - \int_{\lambda} (\Delta \varphi)^2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right] d\lambda \\ &\quad - \int_{\sigma} \Delta \varphi \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \varphi \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Mais, selon l'égalité (121), la dernière intégrale est précisément  $J$ ; nous trouvons donc

$$(122) \quad \begin{aligned} J &= - \frac{1}{2} \int_L (\Delta \varphi)^2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right] dL \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\lambda} (\Delta \varphi)^2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right] d\lambda. \end{aligned}$$

Les égalités (120), (121) et (122) donnent sans peine

$$(123) \quad \begin{aligned} &\frac{\mu}{\rho} \int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma \\ &= \int_L \Delta \varphi \left\{ \frac{\Delta \varphi}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right] - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n_i} \right\} dL \\ &\quad + \int_{\lambda} \Delta \varphi \left\{ \frac{\Delta \varphi}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - U \right) \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta \right] - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n_i} \right\} d\lambda, \end{aligned}$$

Au second membre de cette égalité (123), la première intégrale est nulle en vertu des égalités (99), en sorte que ce second membre se réduit à la seconde intégrale.

Faisons croître le rayon  $l$  au delà de toute limite. Visiblement, en vertu des hypothèses faites, cette seconde intégrale tend vers 0. Il en doit donc être de même du premier membre de l'équation (123). Or, cela n'est possible que si l'on a, en tout point de l'aire  $\sigma$ ,

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} = 0;$$

et comme on a, en tout point du contour L, en vertu des égalités (99),

$$\Delta \varphi = 0,$$

on doit avoir aussi, en tout point du plan des  $x, y$  extérieur au contour L,

$$(124) \quad \Delta \varphi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Il doit donc exister, en tout point des  $x, y$  extérieur au contour L, une fonction  $\psi$  telle que

$$(125) \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

cette fonction pouvant d'ailleurs n'être pas uniforme. Selon l'égalité (103), cette fonction vérifierait l'équation de Laplace et il en serait de même de  $u$  :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Mais  $u$  est une fonction uniforme; elle s'annule à l'infini; en tout point du contour L on a, selon les égalités (99),

$$(126) \quad \frac{\partial u}{\partial n_i} = \frac{\partial u}{\partial x} \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \beta = 0.$$

La fonction  $u$  doit donc être nulle dans tout le fluide, ce qui est impossible puisque l'on doit avoir, en tout point du contour L,

$$(127) \quad u = U.$$



Stokes (1) avait déjà traité ce problème dans le cas particulier où le cylindre est à section circulaire. Il était également parvenu à cette conséquence que le régime permanent considéré ne peut s'établir; mais, pour obtenir ce résultat, il avait uniquement fait usage de l'égalité (127); il n'avait pas invoqué les égalités (99), nécessaires pour que le vecteur  $(p_x, p_y, p_z)$  soit normal à la surface du cylindre. Le raisonnement qu'il a suivi pourrait donner prise à certaines critiques.

En effet, si l'analyse exposée en ce paragraphe et au paragraphe précédent aboutit à des contradictions, elle le doit à l'emploi des équations (99), c'est-à-dire, en dernière analyse, à l'hypothèse que le vecteur  $(p_x, p_y, p_z)$  aboutit normalement à la surface le long de laquelle le fluide adhère au solide.

Si nous regardons cette adhérence comme constituant une liaison nouvelle, rien n'oblige plus le vecteur  $(p_x, p_y, p_z)$  à aboutir normalement à la surface d'adhérence; les impossibilités que nous venons de signaler disparaissent alors d'elles-mêmes. Nous sommes donc contraints d'adopter cette supposition dans l'étude du frottement des fluides sur les solides, comme nous l'avons adoptée dans l'étude du frottement des solides entre eux. Par là, toute ambiguïté se trouve levée dans l'établissement des conditions aux limites.

Nous allons faire usage de ces conditions pour traiter quelques problèmes très simples relatifs au régime permanent des fluides incompressibles de température uniforme. Nous aurons de nouveau occasion de constater que le vecteur  $(p_x, p_y, p_z)$  ne peut aboutir normalement aux surfaces d'adhérence.

#### § 4. — DE L'ÉCOULEMENT PERMANENT PAR FILETS PARALLÈLES.

Le cas le plus simple, que nous allons étudier tout d'abord, est celui du mouvement permanent *par filets parallèles*; on nomme ainsi un mouvement où toutes les vitesses sont constamment parallèles à une droite fixe que nous pouvons prendre pour axe des  $z$ . Cette hypothèse s'exprime par les égalités

$$(128) \quad u = 0, \quad v = 0.$$

Moyennant ces égalités, l'équation de continuité (101 bis) se réduit à  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ; elle nous enseigne que  $w$  est une simple fonction de  $x$  et de  $y$ :

$$(129) \quad w = w(x, y).$$

---

(1) STOKES, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums* (Transactions of the Cambridge philosophical Society, vol. IX, p. 8; 9 décembre 1850; Part I, Section IV, nos 45 à 48. — *Mathematical and physical Papers*, vol. III, p. 62. — *Collection de Mémoires publiés par la Société française de Physique*, t. V, p. 344).

Les deux premières égalités (100 bis), réduites à

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0,$$

nous enseignent que  $\Lambda$  est une simple fonction de  $z$  :

$$(130) \quad \Lambda = \Lambda(z).$$

Quant à la dernière égalité (100 bis), elle devient

$$(131) \quad \frac{d\Lambda(z)}{dz} - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Les équations (129) et (131) nous apprennent que  $\frac{d\Lambda(z)}{dz}$  ne dépend pas de  $z$ , partant, que  $\Lambda$  est une fonction linéaire de  $z$ ; soient  $\Lambda_0, \Lambda_1$  les valeurs que prend cette fonction lorsqu'on donne à  $z$  les valeurs  $z_0, z_1$ . L'égalité (131) deviendra alors

$$(132) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\Lambda_1 - \Lambda_0}{z_1 - z_0}.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles dont dépend l'étude du mouvement permanent par filets parallèles; elle a été donnée par Navier (<sup>1</sup>).

Pour compléter la mise en équations du problème, il convient de joindre à l'équation précédente les conditions qui doivent être vérifiées le long de la surface du solide où le fluide est contenu. Cette surface ne peut être, d'ailleurs, qu'une surface cylindrique dont les génératrices soient parallèles à  $Oz$ .

Selon les égalités (128) et (129), les égalités (51) de la I<sup>re</sup> Partie de ces *Recherches* deviennent

$$(133) \quad \begin{cases} v_x = 0, & v_y = 0, & v_z = 0, \\ \tau_x = -\mu \frac{\partial w}{\partial y}, & \tau_y = -\mu \frac{\partial w}{\partial x}, & \tau_z = 0. \end{cases}$$

Si  $n_i$  est la normale à la surface limite dirigée vers l'intérieur du fluide, nous aurons  $\cos(n_i, z) = 0$  et les égalités (133), jointes aux égalités (48) de la première partie, donneront

$$(134) \quad p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = \mu \frac{\partial w}{\partial n_i}.$$

---

(<sup>1</sup>) NAVIER, *Mémoire sur les lois de l'écoulement des fluides*, lu à l'Académie royale des Sciences le 18 mars 1822 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1823, p. 417).

Les conditions aux limites sont de formes différentes selon que le liquide glisse ou ne glisse pas à la surface du solide.

Supposons d'abord que le fluide glisse à la surface du solide. Les conditions à vérifier seront les conditions (80). Mais l'égalité (85), jointe aux égalités (134) que nous venons d'écrire, donne

$$\Pi - \varpi = 0.$$

On voit alors que les deux premières égalités (80) deviennent deux identités, tandis que la troisième devient

$$(135) \quad \mu \frac{\partial \varpi}{\partial n_i} = - \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|\varpi|} \right) \varpi.$$

Si nous supposons que  $f$  et  $\mathfrak{G}$  soient deux constantes, rien, dans les conditions (132) et (135), ne dépendra plus de la variable  $z$  et le problème auquel nous sommes amenés pourra s'énoncer de la manière suivante :

Soient  $\sigma$  la section droite du cylindre et  $L$  la ligne qui sert de contour à cette section droite ; la direction  $n_i$  sera normale à la ligne  $L$ , menée dans le plan de l'aire  $\sigma$  et vers l'intérieur de cette aire.

Il s'agit de trouver une fonction  $\varpi(x, y)$  qui vérifie la condition (132) en tout point de l'aire  $\sigma$  et la condition (135) en tout point du contour  $L$ .

Le sens positif de l'axe des  $z$  est arbitraire. Choisissons ce sens de telle sorte que  $\Lambda$  soit une fonction croissante de  $z$  ;  $\frac{\rho}{\mu} \frac{\Lambda_1 - \Lambda_0}{z_1 - z_0}$  sera alors une quantité positive que nous désignerons par  $K^2$  :

$$(136) \quad \frac{\rho}{\mu} \frac{\Lambda_1 - \Lambda_0}{z_1 - z_0} = K^2.$$

L'équation (132) deviendra

$$(132 \text{ bis}) \quad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} = K^2.$$

Je dis que la fonction  $\varpi(x, y)$ , continue en tout point de l'aire  $\sigma$ , ne peut être positive en aucun point de cette aire.

Supposons, en effet, qu'elle puisse être positive en certains points de l'aire  $\sigma$  ; comme elle ne peut être infinie, elle admettrait une limite supérieure positive et, comme elle est fonction continue de  $x$  et de  $y$ , elle atteindrait sa limite soit en un point de l'aire  $\sigma$ , soit en point du contour  $L$ .

Imaginons, d'abord, que cette limite soit atteinte en un point  $M$  du contour  $L$  ; écrivons, au point  $M$ , la condition (135) ;  $\varpi$  étant supposé positif, cette condition

deviendra

$$(137) \quad \mu \frac{\partial w}{\partial n_i} = -f w - \mathfrak{C}.$$

$w$  serait positif par hypothèse;  $f$  et  $\mathfrak{C}$  sont essentiellement négatifs [IV<sup>e</sup> Partie, inégalités (46) et (53)];  $\mu$  est essentiellement positif [I<sup>re</sup> Partie, inégalité (62 bis)]. La condition (137) donnerait donc

$$\frac{\partial w}{\partial n_i} > 0.$$

$w$  croîtrait lorsqu'on s'éloignerait du point M selon la normale  $n_i$ , en sorte que  $w$  ne pourrait avoir atteint, au point M, sa limite supérieure.

Imaginons maintenant que  $w$  atteigne sa valeur maximum en un point M intérieur à l'aire  $\sigma$ ; il faudrait qu'en ce point la forme quadratique en X et Y

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} X^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} XY + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} Y^2$$

ne fût positive pour aucun système de valeurs de X et de Y; partant, que ni  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , ni  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  ne fussent positifs, ce qui est incompatible avec la condition (132 bis).

La fonction  $w(x, y)$  n'est donc positive en aucun point de l'aire  $\sigma$ ; partout le fluide coule dans le même sens, et ce sens est celui où  $\Lambda(z)$  va en diminuant.

$w$  étant négatif en tout point de la ligne L, la condition (135) devient

$$(135 \text{ bis}) \quad \frac{\partial w}{\partial n_i} = -\frac{f}{\mu} w + \frac{\mathfrak{C}}{\mu}.$$

Le problème que nous avons à résoudre se ramène sans peine à un problème connu.

Soit  $r$  la distance entre deux points  $(x, y)$ ,  $(x', y')$  de l'aire  $\sigma$ . Posons

$$(138) \quad w_0(x, y) = -\frac{K^2}{2\pi} \iint \log r \, dx' dy',$$

l'intégrale double s'étendant à l'aire  $\sigma$ . Nous savons que

$$(139) \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = K^2.$$

Soit

$$(140) \quad w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y).$$

Le problème se ramènera à déterminer  $w_1(x, y)$ ; mais, selon les égalités

(132 *bis*) et (139),  $w_1(x, y)$  vérifiera, en tout point de l'aire  $\sigma$ , l'équation de Laplace

$$(141) \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0,$$

tandis qu'en vertu des égalités (135 *bis*) et (140), on aura, en tout point de la ligne L,

$$(142) \quad \frac{\partial w_1}{\partial n_i} + \frac{f}{\mu} w_1 = \frac{f}{\mu} w_0 - \frac{\partial w_0}{\partial n_i},$$

égalité où le second membre a une valeur connue en tout point de la ligne L.

Dans le cas où l'aire  $\sigma$  est une aire simplement connexe et convexe, le problème ainsi posé rentre comme cas particulier dans un problème que M. Zaremba <sup>(1)</sup> a complètement résolu en suivant les méthodes de M. H. Poincaré.

D'ailleurs, il est aisé de voir que ce problème est, en toutes circonstances, déterminé, c'est-à-dire qu'il ne peut comporter plus d'une solution. Supposons, en effet, qu'il en comporte deux distinctes,  $w_1(x, y)$  et  $w'_1(x, y)$  et posons

$$(143) \quad W_1(x, y) = w'_1(x, y) - w_1(x, y).$$

Selon (141), les fonctions  $w_1$ ,  $w'_1$  vérifient l'équation de Laplace en tout point de l'aire  $\sigma$ ; il en est donc de même de leur différence  $W_1$ , ce qui permet d'écrire

$$(144) \quad \int_L W_1 \frac{\partial W_1}{\partial n_i} dL + \int_\sigma \left[ \left( \frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma = 0.$$

D'autre part, selon l'égalité (142), on a, en tout point de la ligne L,

$$\frac{\partial W_1}{\partial n_i} + \frac{f}{\mu} W_1 = 0.$$

L'égalité (144) peut donc s'écrire

$$\int_\sigma \left[ \left( \frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma - \frac{f}{\mu} \int_L W_1^2 dL = 0.$$

Si l'on observe que  $\frac{f}{\mu}$  est essentiellement négatif, on voit que cette égalité exige que l'on ait

$$W_1 = 0$$

---

(1) S. ZAREMBA, *Sur l'équation aux dérivées partielles  $\Delta u + \xi u + f = 0$  et sur les fonctions harmoniques* (Annales de l'École Normale supérieure, 3<sup>e</sup> série, t. XVI, 1899, p. 435

en tout point du contour L et

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0,$$

en tout point de l'aire  $\sigma$ ; il en résulte que la fonction  $W_1(x, y)$  est nulle en tout point de l'aire  $\sigma$  et que les deux fonctions  $w_1(x, y)$ ,  $w'_1(x, y)$  y sont identiques, ce qui démontre le théorème énoncé.

La proposition que nous venons d'établir justifie l'emploi de méthodes synthétiques pour trouver, dans chaque cas particulier, la valeur de  $w(x, y)$ .

Nous nous contenterons de traiter le cas très simple et bien connu où le tuyau a la forme d'un cylindre droit, à base circulaire, de rayon R. Dans ce cas, si nous désignons par  $r$  la distance du point  $(x, y)$  à l'axe du cylindre,  $w$  deviendra une simple fonction de  $r$  qui vérifiera l'équation

$$(145) \quad \frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} = K^2,$$

transformée de l'équation (132 bis); l'intégrale générale de cette équation est

$$w(r) = \frac{K^2}{4} r^2 + B \log r + A,$$

A et B étant deux constantes arbitraires; mais comme  $w(r)$  doit demeurer fini pour  $r = 0$ , il nous faut prendre  $B = 0$  et

$$(146) \quad w(r) = \frac{K^2}{4} r^2 + A.$$

Exprimant alors que la condition (135 bis) est vérifiée pour  $r = R$ , nous trouvons

$$A = -\frac{K^2 R}{2} \left( \frac{R}{2} - \frac{\mu}{f} \right) - \frac{\mathfrak{G}}{f}$$

et, par conséquent,

$$(147) \quad w(r) = -\frac{K^2}{4} (R^2 - r^2) + \frac{K^2 \mu R}{2f} - \frac{\mathfrak{G}}{f}.$$

Si, dans cette formule, on suppose égal à 0 le coefficient de frottement  $\mathfrak{G}$ , on retrouve le résultat obtenu par Navier.

La vitesse le long de la paroi ( $r = R$ ) a pour valeur

$$(148) \quad w(R) = \frac{K^2 \mu R}{2f} - \frac{\mathfrak{G}}{f}.$$

En même temps, la troisième égalité (134) nous donne

$$(149) \quad p_z = - \frac{K^2 \mu R}{2}.$$

Supposons que l'on donne à la quantité  $K^2$  des valeurs de plus en plus petites, de telle sorte que  $K^2 \mu R$ , tout en demeurant supérieur à  $-2\mathfrak{G}$ , tende vers  $-2\mathfrak{G}$ ;  $\omega(R)$ , tout en restant négatif, tendra vers 0; en même temps,  $p_z$  tendra vers  $\mathfrak{G}$ .

Si nous supposons que  $K^2 \mu R$ , continuant à décroître, devienne inférieur à  $-2\mathfrak{G}$ , il ne pourra plus y avoir glissement le long des parois du tube; en effet, s'il y avait glissement,  $p_z$  deviendrait, en valeur absolue, inférieur à  $-\mathfrak{G}$ ; en même temps, la formule (148) donnerait pour  $\omega(R)$  une valeur négative que nous savons inacceptable.

Il est aisé d'explicitier davantage la condition limite que nous venons d'obtenir dans le cas où l'on suppose le fluide soumis seulement aux actions capillaires et à la pesanteur.

A l'intérieur du tube supposé illimité,  $V_i$  aura la même valeur tout le long d'une même parallèle à  $O_x$ ; il en sera de même de la partie  $V_e$  qui provient des actions capillaires; dès lors, si l'on désigne par  $\alpha$  l'angle que les génératrices du cylindre font avec l'horizon et par  $g$  l'accélération de la pesanteur, les égalités (101) et (136) donneront

$$(150) \quad K^2 = \frac{\rho}{\mu} g \sin \alpha + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{\mu(z_1 - z_0)}.$$

Donc, tant que l'on aura

$$(151) \quad \frac{1}{2} R \left( \rho g \sin \alpha + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{z_1 - z_0} \right) > -\mathfrak{G},$$

le fluide glissera sur la paroi solide; mais si l'on a

$$(151 \text{ bis}) \quad \frac{1}{2} R \left( \rho g \sin \alpha + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{z_1 - z_0} \right) < -\mathfrak{G},$$

le fluide demeurera soudé à la paroi solide.

Étudions donc maintenant le régime permanent qui s'établit dans le cas où le fluide demeure adhérent à la paroi solide.

$\omega(x, y)$  continuera à vérifier l'équation aux dérivées partielles (132 bis) en tout point de la section droite  $\sigma$ ; mais, en tout point du contour  $L$ , on aura

$$(152) \quad \omega(x, y) = 0.$$

La détermination de  $\omega$  est alors ramenée à un problème connu qui n'admet

qu'une solution. Il est aisé de voir que cette solution est négative en tout point de l'aire  $\sigma$ ; en effet, si elle était positive en quelque partie de cette aire, elle admettrait une limite supérieure positive; cette limite ne pourrait être atteinte le long de la ligne L où  $w$  est nul; la fonction  $w$  présenterait donc un maximum à l'intérieur de l'aire  $\sigma$ , et nous avons vu que cette hypothèse était incompatible avec l'équation (132 bis).

La quantité que l'expérimentateur détermine, c'est la *vitesse moyenne*

$$(153) \quad U = \frac{1}{\sigma} \int w(x, y) d\sigma.$$

Si l'on multiplie  $K^2$  par  $\alpha$  et les dimensions de l'aire  $\sigma$  par un rapport de similitude  $\beta$ , il est clair que les égalités (132 bis) et (152) demeureront vérifiées pourvu que l'on multiplie  $w(x, y)$  par  $\alpha\beta^2$ ;  $U$  sera multiplié par la même quantité; nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

*Pour un même liquide et pour des tubes de même substance ayant des sections semblables, la vitesse moyenne est proportionnelle à  $\frac{\Lambda_1 - \Lambda_0}{z_1 - z_0}$  et au carré des dimensions de la section.*

C'est la loi découverte expérimentalement par Poiseuille.

Si le tube est à section circulaire,  $w(x, y)$  devient une simple fonction de  $r$ , donnée encore par l'égalité (146); mais selon la condition (152), cette fonction doit s'annuler pour  $r = R$ , ce qui donne

$$w(r) = \frac{K^2}{4} (r^2 - R^2)$$

ou, plus explicitement, en vertu de l'égalité (150),

$$(154) \quad w(r) = \left[ \frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{4\mu(z_1 - z_0)} \right] (r^2 - R^2).$$

C'est le résultat trouvé par Hagen, par Émile Mathieu, par M. Boussinesq (voir, au dernier Chapitre, l'historique de cette question).

L'analyse précédente s'accorde fort bien avec les faits d'expérience; elle est d'ailleurs complète si nous assimilons l'adhérence du liquide au solide à une condition de liaison. Mais, si nous ne faisons pas cette assimilation, nous serions conduits à adjoindre aux conditions déjà invoquées la condition suivante, qui entraînerait une impossibilité :

Pour que le fluide adhère à la paroi du tube, il ne suffit pas que la fonction  $w$  vérifie la condition (152) en tous les points de la ligne L; il faut encore que le vecteur dont  $p_x, p_y, p_z$  sont les composantes soit normal à la paroi du tube, ce



qui, en vertu des égalités (134), s'exprime par l'égalité

$$(155) \quad \mu \frac{\partial w}{\partial n_i} = 0$$

vérifiée en tous les points de la ligne L.

Si le fluide n'est pas un fluide parfait,  $\mu$  est positif et l'égalité (155) devient

$$(155 \text{ bis}) \quad \frac{\partial w}{\partial n_i} = 0.$$

Or, il est impossible que cette égalité soit vérifiée en tout point de la ligne L. car on aurait

$$\int_L \frac{\partial w}{\partial n_i} dL = - \int_\sigma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) d\sigma = 0,$$

ce qui est incompatible avec l'égalité (132 bis), à moins que l'on ait

$$(156) \quad K^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \Lambda_0 = \Lambda_1.$$

Mais, dans ce cas, les conditions (132 bis) et (152) donnent, en tout point,  $w = 0$ , ce qui ne saurait nous étonner, puisque la condition (156) est la condition d'équilibre du fluide.

Le problème de l'écoulement permanent par filets parallèles nous montre donc que l'on doit, sous peine de se heurter à une impossibilité, traiter l'adhérence du liquide à la paroi solide comme une condition de liaison.

### § 5. — FLUIDE VISQUEUX COMPRIS ENTRE DEUX PLANS PARALLÈLES.

Deux plans solides,  $z = 0$  et  $z = h$ , sont parallèles et maintenus à une distance invariable l'un de l'autre; le premier est immobile, le second se meut parallèlement à  $Ox$  avec une vitesse uniforme  $U$ . Entre ces deux plans se trouve un liquide visqueux. On suppose que ce liquide soit parvenu à un régime permanent tel que tous les points matériels se meuvent parallèlement à  $Ox$  et l'on se propose d'étudier ce mouvement.

Les égalités

$$v = 0, \quad w = 0,$$

jointes à l'équation de continuité, exigent que  $u$  soit indépendant de  $x$ ;  $u$  est aussi indépendant de  $t$ , puisque le régime est permanent;  $u$  ne peut donc dépendre que de  $y$  et de  $z$ ; par raison de symétrie, il ne dépendra que de  $z$ . Les deux dernières équations (100) donnent

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0,$$

en sorte que  $\Lambda$  ne dépend que de  $x$ . La première équation (100) devient

$$\frac{d\Lambda}{dx} - \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u}{dz^2} = 0.$$

Elle nous enseigne, en premier lieu, que  $\Lambda$  est une fonction linéaire de  $x$ , en sorte que

$$\frac{d\Lambda}{dx} = \frac{\Lambda' - \Lambda}{x' - x}.$$

Elle nous enseigne, en second lieu, que  $u$  est une fonction du second degré de  $z$ , en sorte que

$$(157) \quad u = \frac{\rho(\Lambda' - \Lambda)}{2\mu(x' - x)} z^2 + A z + B,$$

$A$  et  $B$  étant deux constantes qui devront être déterminées par les conditions aux limites.

Supposons, tout d'abord, que le fluide glisse sur les plans entre lesquels il est compris; soient  $u_0$  sa vitesse le long du plan  $z = 0$  et  $u_1$  sa vitesse le long du plan  $z = h$ .

Les conditions (80) se réduisent ici à

$$\begin{aligned} -p_x &= \left(f + \frac{\sigma}{|u_0|}\right) u_0 & \text{pour } z = 0, \\ -p_x &= \left(f + \frac{\sigma}{|U - u_1|}\right) (u_1 - U) & \text{pour } z = h. \end{aligned}$$

Mais nous avons, en vertu des égalités (57) de la 1<sup>e</sup> Partie de ces *Recherches*,

$$\begin{aligned} p_x &= \mu \frac{\partial u}{\partial z} & \text{pour } z = 0, \\ p_x &= -\mu \frac{\partial u}{\partial z} & \text{pour } z = h. \end{aligned}$$

Nos conditions aux limites sont donc

$$(158) \quad \begin{cases} \left(f + \frac{\sigma}{|u_0|}\right) u_0 + \mu \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & \text{pour } z = 0, \\ \left(f + \frac{\sigma}{|U - u_1|}\right) (U - u_1) + \mu \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & \text{pour } z = h. \end{cases}$$

Ces conditions détermineront les constantes  $A$  et  $B$  de la formule (157).

Traisons le cas très simple où  $\Lambda$  est indépendant de  $x$ . C'est ce qui arrive, par

raison de symétrie, si les deux plans sont supposés horizontaux et si les seules forces agissantes sont la pesanteur et les actions capillaires.

La formule (157) se réduit alors à

$$(157 \text{ bis}) \quad u = \Lambda z + B$$

et les conditions (158) deviennent

$$(158 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \left(f + \frac{\mathfrak{C}}{|B|}\right) B + \mu \Lambda = 0, \\ \left(f + \frac{\mathfrak{C}}{|U - \Lambda h - B|}\right) (U - \Lambda h - B) + \mu \Lambda = 0. \end{cases}$$

Ces conditions nous enseignent que les trois quantités

$$\Lambda, \quad B, \quad U - \Lambda h - B$$

sont de même signe, car  $f$  et  $\mathfrak{C}$  sont négatifs, tandis que  $\mu$  est positif.

Nous pouvons toujours supposer que  $U$  soit positif. Alors nous voyons sans peine que la condition précédente exige que  $\Lambda$  et  $B$  soient positifs. Les conditions (158 bis) deviennent

$$(159) \quad \begin{cases} fB + \mathfrak{C} + \mu \Lambda = 0, \\ f(U - \Lambda h - B) + \mathfrak{C} + \mu \Lambda = 0. \end{cases}$$

Elles donnent

$$(160) \quad \begin{cases} \Lambda = -\frac{2\mathfrak{C} + fU}{2\mu - fh}, \\ B = \frac{\mathfrak{C}h + \mu U}{2\mu - fh} \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$(161) \quad u = -\frac{(2\mathfrak{C} + fU)z - \mathfrak{C}h - \mu U}{2\mu - fh}.$$

Mais cette solution n'est acceptable que si les égalités (159) peuvent être substituées aux égalités (158 bis), ce qui exige que l'on ait

$$B > 0, \quad U - \Lambda h - B > 0.$$

Si l'on tient compte de la seconde égalité (160) et si l'on observe que, selon les mêmes égalités (160),

$$U - \Lambda h - B = \frac{\mathfrak{C}h + \mu U}{2\mu - fh},$$

on voit que cette double inégalité équivaut à l'inégalité unique

$$(162) \quad U > -\frac{6h}{\mu}.$$

Si donc on a

$$(162 \text{ bis}) \quad U < -\frac{6h}{\mu},$$

il est impossible d'admettre que le fluide glisse sur les deux plans entre lesquels il est contenu. On est obligé d'admettre qu'il adhère à ces plans, ce qui donne

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{pour} & \quad z = 0, \\ u &= U & \text{pour} & \quad z = h \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(163) \quad \begin{aligned} B &= 0, & A &= \frac{U}{h}, \\ u &= \frac{U}{h} z. \end{aligned}$$

Mais, en outre, si l'on n'assimilait pas à une liaison l'adhérence du liquide au solide, on devrait avoir, pour  $z = 0$  aussi bien que pour  $z = h$ ,  $p_x = 0$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ , ce qui est impossible, car l'égalité (163) donne

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{U}{h}.$$

Nous rencontrerions donc ici une impossibilité semblable à celle qui nous a arrêtés au paragraphe précédent lorsque nous avons examiné les conséquences de la même hypothèse.

#### § 6. — FLUIDE COMPRIS ENTRE DEUX CYLINDRES DE RÉVOLUTION DE MÊME AXE ET ANIMÉ D'UN MOUVEMENT DE ROTATION UNIFORME AUTOUR DE CET AXE.

Nous allons examiner un dernier exemple, très simple, et dont l'intégration peut être menée jusqu'au bout.

Une surface cylindrique indéfinie  $C_0$ , de révolution autour de l'axe des  $z$ , enferme à son intérieur un autre cylindre  $C_1$ , également de révolution autour de l'axe des  $z$ . Chacun des deux cylindres est homogène. Le cylindre  $C_0$  est immobile, tandis que le cylindre  $C_1$  est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des  $z$ ;  $\Omega$ , est la vitesse angulaire de ce mouvement.

Entre les deux surfaces  $C_0$ ,  $C_1$  se trouve un liquide visqueux. La position d'un point de ce liquide peut être repérée au moyen des coordonnées rectangulaires  $x$ ,

$y, z$  ou bien au moyen des coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$ . Le passage d'un système de coordonnées à l'autre est assuré par les formules

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ \text{qui donnent} & & & \\ (164) \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous supposons que la fonction potentielle  $V_e$  des actions extérieures et que la fonction potentielle  $V_i$  des actions intérieures sont uniformes dans tout le fluide et indépendantes de  $\theta$ ; c'est ce qui aura lieu, en particulier, si le fluide est soumis à la pesanteur, supposée parallèle à  $Oz$ , et aux actions capillaires.

La pression  $\Pi$  étant essentiellement uniforme, il en sera de même de la quantité

$$(165) \quad \Lambda = \frac{\Pi}{\rho} - V_i - V_e.$$

Il semble évident que le mouvement d'un pareil fluide tendra vers un régime permanent dans lequel chaque élément fluide sera animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de  $Oz$ ; en outre, la vitesse  $\Theta$  de ce mouvement sera indépendante de  $\theta$  et de  $z$ .

Étudions ce régime permanent.

Nous aurons, en ce régime,

$$(165) \quad u = -\Theta \sin \theta, \quad v = \Theta \cos \theta, \quad w = 0.$$

Les égalités (164) et (165) donnent

$$(166) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{\Theta}{r} - \frac{d\Theta}{dr} \right) \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\Theta}{r} \cos^2 \theta - \frac{d\Theta}{dr} \sin^2 \theta, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\Theta}{r} \sin^2 \theta - \frac{d\Theta}{dr} \cos^2 \theta, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\left( \frac{\Theta}{r} - \frac{d\Theta}{dr} \right) \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

L'équation de continuité, réduite à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

est vérifiée d'elle-même.

Les égalités (164) et (166) donnent sans peine

$$(167) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \left( \frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r^2} \right) \sin \vartheta, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left( \frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r^2} \right) \cos \vartheta. \end{cases}$$

Les égalités (164) donnent aussi

$$(168) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} \sin \vartheta, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} \cos \vartheta. \end{cases}$$

Enfin l'accélération de chaque élément fluide a pour grandeur  $\frac{\Theta^2}{r}$  et sa direction est opposée à celle du rayon vecteur  $r$ ; on a donc

$$(169) \quad \begin{cases} \gamma_x = - \frac{\Theta^2}{r} \cos \vartheta, \\ \gamma_y = - \frac{\Theta^2}{r} \sin \vartheta, \\ \gamma_z = 0. \end{cases}$$

Les équations (100 bis) deviennent donc

$$(170) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} \sin \vartheta - \frac{\Theta^2}{r} \cos \vartheta + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r^2} \right) \sin \vartheta = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} \cos \vartheta - \frac{\Theta^2}{r} \sin \vartheta - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r^2} \right) \cos \vartheta = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Les deux premières égalités (170) donnent sans peine

$$(171) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial r} - \frac{\Theta^2}{r} = 0,$$

$$(172) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r^2} \right) = 0.$$

Au premier membre de l'égalité (172), le second terme est indépendant de  $\vartheta$ ;  $\Lambda$  ne pourrait donc dépendre de  $\vartheta$  que s'il en était fonction linéaire; mais alors  $\Lambda$  ne pourrait pas être, comme il le doit, fonction uniforme de  $x$  et de  $y$ ;  $\Lambda$  est

donc indépendant de  $\theta$ . L'équation (172) se réduit à

$$(173) \quad \frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r^2} = 0,$$

tandis que l'équation (171) devient

$$(171 \text{ bis}) \quad \frac{d\Lambda(r)}{dr} = \frac{\Theta^2}{r}.$$

L'équation différentielle (171 bis) a déjà été rencontrée, dans la question qui nous occupe, par M. Max Margules <sup>(1)</sup> et par M. N. Petroff <sup>(2)</sup>.

L'intégrale générale de cette équation est

$$(174) \quad \Theta = \frac{A}{r} + Br,$$

A et B étant deux constantes.

Les égalités (166) deviennent, moyennant cette égalité (174),

$$(175) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2A}{r^2} \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{A}{r^2} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - B, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{A}{r^2} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + B, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2A}{r^2} \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

Nous aurons, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} p_x &= \mu \left[ 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\ p_y &= \mu \left[ \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\beta \frac{\partial v}{\partial y} \right], \\ p_z &= 0 \end{aligned}$$

(1) MAX MARGULES, *Ueber die Bestimmung der Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit* (Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. LXXXIII, Abth. II, 1881, p. 12).

(2) N. PETROFF, *Neue Theorie der Reibung*. Hambourg et Leipzig, 1887, p. 95.

ou bien, en vertu des égalités (175),

$$(176) \quad \begin{cases} p_x = \frac{2\mu A}{r^2} [2 \sin \theta \cos \theta \alpha + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \beta], \\ p_y = \frac{2\mu A}{r^2} [2 \sin \theta \cos \theta \beta + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \alpha], \\ p_z = 0. \end{cases}$$

Si nous désignons par  $q$  la projection du vecteur  $(p_x, p_y, p_z)$  sur la direction de la vitesse  $\Theta$ , nous avons

$$q = -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta$$

ou, en vertu des égalités (176),

$$(177) \quad q = \frac{2\mu A}{r^2} [-2 \sin \theta \cos \theta (\beta \cos \theta + \alpha \sin \theta) + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) (\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta)].$$

En un point du cylindre  $C_0$ , dont  $R_0$  est le rayon, on a

$$(178) \quad \begin{aligned} r &= R_0, & \alpha &= -\cos \theta, & \beta &= -\sin \theta, \\ q_0 &= \frac{2\mu A}{R_0^2}. \end{aligned}$$

En un point du cylindre  $C_1$ , dont  $R_1$  est le rayon, on a

$$(178 \text{ bis}) \quad \begin{aligned} r &= R_1, & \alpha &= \cos \theta, & \beta &= \sin \theta, \\ q_1 &= -\frac{2\mu A}{R_1^2}. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que le liquide glisse sur chacun des deux cylindres que, pour simplifier, nous supposons de même nature.

Le cylindre  $C_0$  est immobile; la vitesse relative du fluide par rapport à cette paroi se réduit à

$$(179) \quad \Theta_0 = \frac{A}{R_0} + B R_0.$$

On aura donc, en vertu de l'égalité (178), en tout point du cylindre  $C_0$ ,

$$(180) \quad \frac{2\mu A}{R_0^2} = - \left( f + \frac{\epsilon}{|\Theta_0|} \right) \left( \frac{A}{R_0} + B R_0 \right).$$

La vitesse avec laquelle tourne un point de la surface  $C_1$  est  $\Omega_1 R_1$ . La vitesse



relative du fluide par rapport au solide est

$$(179 \text{ bis}) \quad \Theta_1 - \Omega_1 R_1 = \frac{\Lambda}{R_1} + (B - \Omega_1) R_1.$$

On doit donc avoir, en vertu de l'égalité (178 bis), en tout point du cylindre  $C_1$ ,

$$(180 \text{ bis}) \quad \frac{2\mu\Lambda}{R_1^3} = - \left( f + \frac{\mathfrak{E}}{|\Omega_1 R_1 - \Theta_1|} \right) \left[ -\frac{\Lambda}{R_1} + (\Omega_1 - B) R_1 \right].$$

Les égalités (180) et (180 bis) nous enseignent que les deux quantités  $\Theta_0$  et  $(\Omega_1 R_1 - \Theta_1)$  sont toutes deux de même signe et que ce signe est le signe de  $\Lambda$ . Supposons que ce signe soit le signe  $+$ . Les égalités (180) et (180 bis) donneront les deux égalités

$$(181) \quad \begin{cases} \frac{2\mu\Lambda}{R_0^3} = -f \left( \frac{\Lambda}{R_0} + B R_0 \right) - \mathfrak{E}, \\ \frac{2\mu\Lambda}{R_1^3} = f \left[ \frac{R_1}{\Lambda} - (\Omega_1 - B) R_1 \right] - \mathfrak{E}, \end{cases}$$

qui déterminent  $A$  et  $B$  et donnent, en particulier,

$$(182) \quad \Lambda = - \frac{[(\mathfrak{E} + f\Omega_1 R_1) R_0 + \mathfrak{E} R_1] R_0^3 R_1^3}{2\mu(R_0^3 + R_1^3) - f(R_0^2 - R_1^2) R_0 R_1}.$$

Le dénominateur de cette expression est assurément positif, car on a

$$\mu > 0, \quad f < 0, \quad R_0 > R_1.$$

Mais l'usage des égalités (181) et (182) n'est légitime que si l'on a les inégalités

$$\Lambda > 0, \quad \Theta_0 > 0, \quad \Omega_1 R_1 - \Theta_1 > 0$$

qui, en vertu de l'inégalité  $f < 0$  et des égalités (181), exigent que l'on ait les inégalités

$$\Lambda > 0, \quad \frac{2\mu\Lambda}{R_0^3} + \mathfrak{E} > 0, \quad \frac{2\mu\Lambda}{R_1^3} + \mathfrak{E} > 0.$$

De ces trois inégalités, la seconde, en vertu des conditions  $\mathfrak{E} < 0$ ,  $R_0 > R_1$ , entraîne les deux autres; d'ailleurs, en vertu de l'égalité (182), cette seconde condition devient

$$\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)(2\mu - fR_1) - 2\mu f\Omega_1 R_1^3 > 0$$

ou bien

$$(183) \quad \Omega_1 > \frac{\mathfrak{E}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3} (2\mu - fR_1).$$

Si, dans les conditions (180) et (180 bis), nous avons supposé que le signe commun de  $A$ , de  $\Theta_0$  et de  $(\Omega_1 R_1 - \Theta_1)$  fût le signe  $-$ , nous aurions obtenu, pour déterminer  $A$  et  $B$ , les conditions

$$(181 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{2\mu A}{R_0^2} = -f \left( \frac{A}{R_0} + B R_0 \right) + \mathfrak{G}, \\ \frac{2\mu A}{R_1^2} = f \left[ \frac{A}{R_1} - (\Omega_1 - B) R_1 \right] + \mathfrak{G}. \end{cases}$$

Mais, pour que l'usage de ces deux inégalités fût légitime, il faudrait que l'on eût

$$(183 \text{ bis}) \quad \Omega_1 < -\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} (2\mu - f R_1).$$

Lors donc que l'on a

$$(184) \quad -\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} (2\mu - f R_1) \leq \Omega_1 \leq \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} (2\mu - f R_1),$$

le liquide ne peut glisser sur les deux cylindres  $C_0, C_1$ ; il adhère au moins à l'un d'entre eux.

La condition (184) étant vérifiée, peut-il arriver que le fluide adhère au cylindre  $C_1$  et glisse sur le cylindre  $C_0$ ?

L'égalité (179 bis) nous donnerait alors la première relation

$$(185) \quad \frac{A}{R_1} + B R_1 + \Omega_1 R_1,$$

à laquelle il faudrait continuer de joindre la relation

$$(180) \quad \frac{2\mu A}{R_0^2} = - \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|\Theta_0|} \right) \left( \frac{A}{R_0} + B R_0 \right).$$

Comme  $f$  et  $\mathfrak{G}$  sont tous deux négatifs, cette égalité (180) montre que  $A$  et  $\Theta_0 = \frac{A}{R_0} + B R_0$  sont de même signe. Supposons d'abord que ces quantités soient positives. Alors, à l'équation (180), nous pourrions substituer l'équation

$$(186) \quad \frac{2\mu A}{R_0^2} = f \left( \frac{A}{R_0} + B R_0 \right) - \mathfrak{G}.$$

Les égalités (185) et (186) déterminent  $A$  et  $B$ ; elles donnent, en particulier,

$$(187) \quad A = - \frac{(\mathfrak{G} + f \Omega_1 R_0) R_0^2 R_1^2}{2\mu R_1^2 - f(R_0^2 - R_1^2) R_0}.$$

Mais cette solution n'est acceptable que si elle donne pour A et pour  $\Theta_0 = \frac{A}{R_0} + BR_0$  des valeurs positives; or, selon l'égalité (186), elle donne à  $\Theta_0$  le même signe qu'à  $\frac{2\mu A}{R_0^2} + \mathfrak{E}$  et, comme  $\mathfrak{E}$  est négatif, cette dernière quantité ne peut être positive que si A est positif. Donc, pour que la précédente solution soit acceptable, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition

$$(188) \quad \frac{2\mu A}{R_0^2} + \mathfrak{E} > 0.$$

En vertu de l'expression (187) de A, expression dont le dénominateur est essentiellement positif, cette inégalité devient

$$-f[2\mu\Omega_1 R_1^2 + \mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)] > 0,$$

ou bien, puisque  $f$  est essentiellement négatif,

$$(189) \quad \Omega_1 > -\frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2}.$$

Si nous avons supposé que le signe commun de A et de  $\Theta_0$  fût le signe —, nous aurions obtenu, pour déterminer A et B, les équations

$$(185) \quad \frac{A}{R_1} + BR_1 = \Omega_1 R_1,$$

$$(186 \text{ bis}) \quad \frac{2\mu A}{R_0^2} = -f\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right) + \mathfrak{E}.$$

Mais, pour que cette solution fût valable, il faudrait que l'on eût

$$(189 \text{ bis}) \quad \Omega_1 < \frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2}.$$

La quantité  $\frac{\mathfrak{E}}{f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2}$  étant assurément positive, on a

$$(190) \quad \frac{\mathfrak{E}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} (2\mu - fR_1) > -\frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2}.$$

On peut donc trouver des valeurs de  $\Omega_1$  qui vérifient à la fois la condition (184) et l'une des conditions (189) ou (189 bis).

Lors donc que l'on a ou bien

$$(191) \quad -\frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2} < \Omega_1 < \frac{\mathfrak{E}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} (2\mu - fR_1)$$

ou bien

$$(191 \text{ bis}) \quad -\frac{\mathfrak{E}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3} (2\mu - fR_1) < \Omega_1 < \frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^3},$$

le liquide ne peut glisser à la fois sur les deux cylindres  $C_0, C_1$ ; mais il peut adhérer au cylindre  $C_1$  et glisser sur le cylindre  $C_0$ . Au contraire, ce régime est impossible si l'on a la condition

$$(192) \quad \frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^3} \leq \Omega_1 \leq -\frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^3},$$

qui entraîne la condition (184).

La condition (184) étant vérifiée, peut-il arriver que le liquide glisse sur le cylindre  $C_1$  et adhère au cylindre  $C_0$ ?

Les équations qui doivent déterminer A et B sont alors

$$(193) \quad \frac{A}{R_0} + BR_0 = 0,$$

$$(180 \text{ bis}) \quad \frac{2\mu A}{R_1^2} = -\left[f + \frac{\mathfrak{E}}{|\Omega_1 R_1 - \Theta_1|}\right] \left(\Omega_1 R_1 - \frac{R_1}{A} - BR_1\right).$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, nous trouverons que, pour que ces conditions déterminent des valeurs acceptables de A et de B, il faut et il suffit que l'on ait ou bien

$$(194) \quad \Omega_1 > -\frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

ou bien

$$(194 \text{ bis}) \quad \Omega_1 < \frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_0^2}.$$

D'ailleurs, on a

$$(195) \quad -\frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_0^2} < -\frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^3},$$

et, *a fortiori*, selon l'inégalité (190),

$$(196) \quad -\frac{\mathfrak{E}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_0^2} < \frac{\mathfrak{E}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3} (2\mu - fR_1).$$

Les conditions (194) et (194 bis) sont donc compatibles avec la condition (184), et nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

*Lorsque l'on a ou bien*

$$(197) \quad -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_0^2} < \Omega_1 < \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} (2\mu - fR_1)$$

*ou bien*

$$(197 \text{ bis}) \quad -\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} (2\mu - fR_1) < \Omega_1 < \frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

*le liquide peut adhérer au cylindre  $C_0$  et glisser sur le cylindre  $C_1$ ; lorsque l'on a, au contraire,*

$$(198) \quad \frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_0^2} \leq \Omega_1 \leq -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

*le liquide adhère forcément aux deux cylindres.*

Dans ce dernier cas, les constantes A et B sont déterminées par les inégalités

$$(199) \quad \frac{A}{R_1} + BR_1 = \Omega_1 R_1, \quad \frac{A}{R_0} + BR_0 = 0.$$

*En résumé, lorsque l'on a*

$$(200) \quad |\Omega_1| > \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} (2\mu - fR_1),$$

*le liquide glisse sur les deux cylindres.*

*Lorsque l'on a*

$$(201) \quad -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2} < |\Omega_1| \leq \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} (2\mu - fR_1),$$

*le liquide est susceptible de deux régimes permanents distincts; en l'un des régimes, il adhère au cylindre  $C_1$  et glisse sur le cylindre  $C_0$ ; en l'autre, il adhère au cylindre  $C_0$  et glisse sur le cylindre  $C_1$ .*

*Lorsque l'on a*

$$(202) \quad -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_0^2} < |\Omega_1| \leq -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2},$$

*le liquide adhère au cylindre  $C_0$  et glisse sur le cylindre  $C_1$ .*

*Enfin, lorsque l'on a*

$$(203) \quad |\Omega_1| \leq -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

*le liquide adhère aux deux cylindres  $C_0, C_1$ .*

Considérons un corps qui présente, avec les corps voisins, des liaisons bilatérales, accompagnées de viscosité et de frottement; imaginons que ce corps éprouve une modification réelle ou virtuelle; soient :

$\delta U_1$  la variation que subit son énergie interne;

$d\mathfrak{E}_{e1}$  le travail virtuel des actions extérieures qui lui sont appliquées;

$d\mathfrak{E}_{j1}$  le travail virtuel des forces d'inertie;

$d\mathfrak{E}_{l1}$  le travail des actions fictives de liaison, définies à la manière de Lagrange, qui s'exercent à sa surface.

La quantité de chaleur  $dQ_1$  que dégage le corps considéré est *définie* par l'égalité

$$(204) \quad E dQ_1 = -E \delta U_1 + d\mathfrak{E}_{e1} + d\mathfrak{E}_{j1} + d\mathfrak{E}_{l1}.$$

Supposons que nous ayons affaire à une masse fluide 1, limitée, d'une part, par une surface  $s_1$  le long de laquelle elle est *soudée* aux corps voisins, fluides ou solides, et, d'autre part, par une surface  $S$  le long de laquelle elle glisse, avec viscosité et frottement, sur un autre corps 2.

Selon ce que nous avons vu au Chapitre II, les actions de liaison qui doivent figurer dans le calcul de  $d\mathfrak{E}_{l1}$  se composent :

1° D'une pression, de composantes  $\mathfrak{w}_x, \mathfrak{w}_y, \mathfrak{w}_z$ , appliquée en chaque point de la surface  $s_1$ ;

2° D'une pression  $\mathfrak{w}$ , normale à la surface  $S$  et dirigée vers l'intérieur du fluide 1, appliquée en chaque point de la surface  $S$ .

Si, comme nous l'avons fait au Chapitre II, nous désignons par  $N$  la normale à la surface  $S$  dirigée de 1 vers 2, nous aurons

$$(205) \quad d\mathfrak{E}_{l1} = - \int \mathfrak{w} [\cos(N, x) \delta x_1 + \cos(N, y) \delta y_1 + \cos(N, z) \delta z_1] dS \\ + \int (\mathfrak{w}_x \delta x_1 + \mathfrak{w}_y \delta y_1 + \mathfrak{w}_z \delta z_1) ds_1.$$

Le milieu auquel le corps 1 est soudé le long de la surface  $s_1$  peut être fluide;  $\mathfrak{w}_x, \mathfrak{w}_y, \mathfrak{w}_z$  sont alors donnés par les équations (71); il peut être solide;  $\mathfrak{w}_x, \mathfrak{w}_y, \mathfrak{w}_z$  sont alors donnés par les équations (87), qui ont même forme que les égalités (71). En toutes circonstances, l'égalité (205) peut s'écrire

$$(206) \quad d\mathfrak{E}_{l1} = - \int \mathfrak{w} [\cos(N, x) \delta x_1 + \cos(N, y) \delta y_1 + \cos(N, z) \delta z_1] dS \\ + \int (p_{x1} \delta x_1 + p_{y1} \delta y_1 + p_{z1} \delta z_1) ds_1 \\ + \int \Pi_1 [\cos(n_1, x) \delta x_1 + \cos(n_1, y) \delta y_1 + \cos(n_1, z) \delta z_1] ds_1,$$

$n_1$  étant la normale à la surface  $s_1$ , vers l'intérieur du corps 1.

Rien n'empêche de supposer que le milieu auquel le fluide 1 est soudé le long de la surface  $s_1$  ne soit la continuation du fluide 1 lui-même; la surface  $s_1$  sera une surface quelconque tracée à l'intérieur du fluide 1.

Soient  $\lambda$  une quantité constamment positive, variable d'une manière continue le long de la surface  $S$ , donnée une fois pour toutes, et  $\epsilon$  une quantité positive infiniment petite, la même en tout point de  $S$ . Par chaque point  $M$  de  $S$  élevons, vers l'intérieur du fluide 1, une normale  $Mm_1$  de longueur  $\delta = \epsilon\lambda$ . Prenons le lieu du point  $m_1$  pour surface  $s_1$ .

Si nous considérons le point  $M$  et le point correspondant  $m_1$ , nous pourrions écrire les égalités

$$ds_1 = dS,$$

$$\delta x_1(m_1) = \delta x_1(M_1), \quad \delta y_1(m_1) = \delta y_1(M_1), \quad \delta z_1(m_1) = \delta z_1(M_1),$$

$$\cos(n_1, x) = \cos(N, x), \quad \cos(n_1, y) = \cos(N, y), \quad \cos(n_1, z) = \cos(N, z).$$

En chacune de ces égalités sont négligées des quantités de l'ordre du produit de  $\epsilon$  par la grandeur écrite en l'un ou l'autre membre.

Lors donc que  $\epsilon$  tend vers 0,  $d\mathfrak{E}_1$  a pour limite

$$d\mathfrak{E}_1 = \int \left\{ \begin{aligned} & [p_{x1} + (\Pi_1 - \varpi) \cos(N, x)] \delta x_1 \\ & + [p_{y1} + (\Pi_1 - \varpi) \cos(N, y)] \delta y_1 \\ & + [p_{z1} + (\Pi_1 - \varpi) \cos(N, z)] \delta z_1 \end{aligned} \right\} dS.$$

Si nous tenons compte des égalités (56) et (57) et si nous observons que, dans ces égalités,

$$\cos(n_1, x) = -\cos(N, x), \quad \cos(n_1, y) = -\cos(N, y), \quad \cos(n_1, z) = -\cos(N, z),$$

nous trouvons que  $d\mathfrak{E}_1$  a pour limite, lorsque  $\epsilon$  tend vers 0,

$$(207) \quad d\mathfrak{E}_1 = - \int \left\{ \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) [(u_1 - u_2) \delta x_1 + (v_1 - v_2) \delta y_1 + (w_1 - w_2) \delta z_1] \right\} dS.$$

D'autre part, lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, chacune des quantités  $\delta U$ ,  $d\mathfrak{E}_e$ ,  $d\mathfrak{E}_i$  qui figurent dans l'égalité (204) tend vers 0 comme les produits  $\epsilon \delta x_1$ ,  $\epsilon \delta y_1$ ,  $\epsilon \delta z_1$ . D'où la conclusion suivante :

*En un fluide, on considère une couche infiniment mince qui confine à une partie de la surface limite; on suppose que, le long de cette surface, le fluide glisse avec viscosité et frottement sur les corps voisins. Lorsque l'épaisseur de cette couche tend vers 0, la quantité de chaleur qu'elle dégage en une modification virtuelle quelconque ne tend pas en général vers 0; cette quan-*

tité a pour limite :

$$(208) \quad dQ_1 = -\frac{1}{E} \int \left\{ \left( f + \frac{\Theta}{r'} \right) [(u_1 - u_2) \delta x_1 + (v_1 - v_2) \delta y_1 + (w_1 - w_2) \delta z_1] \right\} dS.$$

PAR DÉFINITION, cette quantité est la QUANTITÉ DE CHALEUR DÉGAGÉE PAR LA VISCOSITÉ ET LE FROTTEMENT EN LA PARTIE S DE LA SURFACE LIMITE DU FLUIDE 1.

La formule (208), que nous venons d'obtenir en supposant que le corps 1 soit un fluide, est un cas particulier d'une formule plus générale, indépendante de la nature du corps 1. Pour établir cette formule générale, nous imposerons aux indices 1 et 2 une permutation qui nous sera commode dans la suite. Nous désignerons par 2 le corps dont nous étudions le dégagement de chaleur  $dQ_2$ , par 1 le corps sur lequel il glisse le long de la surface S, par  $s_2$  la surface qui le soude à d'autres corps.  $dQ_2$  sera donnée par l'égalité

$$(204 \text{ bis}) \quad E dQ_2 = -E \delta U_2 + d\tilde{e}_{e_2} + d\tilde{e}_{j_2} + d\tilde{e}_{i_2}.$$

D'autre part, les équations du mouvement de ce corps 2 sont données par les principes généraux que nous avons posés ailleurs (1).

Soient :

$\delta_T \mathcal{F}_2$  la variation virtuelle du potentiel interne  $\mathcal{F}_2$ , prise en supposant toutes les températures invariables;

$d\tilde{e}_{v_2}$  le travail virtuel de la viscosité interne du corps 2, supposé dépourvu de frottement interne;

$d\tilde{e}_{w_2}$  le travail virtuel des viscosités de contact qui agissent le long de la surface terminale;

$d\tilde{e}_{\psi_2}$  le travail virtuel des frottements de contact le long de la même surface.

Les équations du mouvement du corps 2 sont condensées dans la formule

$$(209) \quad d\tilde{e}_{e_2} + d\tilde{e}_{i_2} - \delta_T \mathcal{F}_2 + d\tilde{e}_{j_2} + d\tilde{e}_{v_2} + d\tilde{e}_{w_2} + d\tilde{e}_{\psi_2} = 0.$$

Comparée à l'égalité (204 bis), cette égalité (209) donne

$$(210) \quad E dQ_2 = \delta_T \mathcal{F}_2 - E \delta U_2 - d\tilde{e}_{v_2} - d\tilde{e}_{w_2} - d\tilde{e}_{\psi_2}.$$

Supposons que le corps 2 se réduise à une couche infiniment mince, d'épaisseur  $\delta$ , qui confine à la surface S; les quantités  $\delta_T \mathcal{F}_2$ ,  $\delta U_2$ ,  $d\tilde{e}_{v_2}$  tendront vers zéro avec  $\epsilon$ ;

(1) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, Chapitre VI, § 1, équations (223) (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3<sup>e</sup> série, t. II, 1896 et Paris, A. Hermann, 1896).



comme le long de la surface  $s_2$  le corps 2 est soudé aux corps voisins, il n'y a le long de cette surface ni frottement de contact, ni viscosité de contact;  $(d\mathfrak{E}_{w_2} + d\mathfrak{E}_{\psi_2})$  est donc le travail virtuel des viscosités et frottements de contact qui agissent le long de la surface  $S$ ; cette somme est indépendante de  $\varepsilon$ ; en sorte que lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $dQ_2$  a pour limite

$$(211) \quad dQ_2 = -\frac{1}{E} (d\mathfrak{E}_{w_2} + d\mathfrak{E}_{\psi_2}).$$

*En un corps quelconque, on considère une couche infiniment mince qui confine à la surface limite; on suppose que, le long de cette surface, le corps glisse avec viscosité et frottement sur les corps voisins. Lorsque l'épaisseur de cette couche tend vers 0, la quantité de chaleur qu'elle dégage ne tend pas vers 0; elle a pour limite le quotient par l'équivalent mécanique de la chaleur du travail virtuel changé de signe du frottement de contact et de la viscosité de contact qui s'exercent sur le corps considéré, le long de la surface considérée.*

Les développements donnés au Chapitre II nous montrent que si le corps 1 est un fluide ou un solide isotrope, la valeur limite de  $dQ_2$  est

$$(208 \text{ bis}) \quad dQ_2 = -\frac{1}{E} \int \left\{ \left( f + \frac{\mathfrak{E}}{|r'|} \right) [(u_2 - u_1) \delta x_2 + (v_2 - v_1) \delta y_2 + (w_2 - w_1) \delta z_2] \right\} dS.$$

## § 2. — LA CONDITION SUPPLÉMENTAIRE EN UNE SURFACE LE LONG DE LAQUELLE DEUX CORPS GLISSENT L'UN SUR L'AUTRE.

Soit  $S$  une aire finie quelconque découpée en la surface par laquelle deux corps confinent l'un à l'autre et glissent l'un sur l'autre. A partir de cette aire, traçons, au sein des deux corps, les surfaces  $s_1$ ,  $s_2$ , infiniment voisines de  $S$ , qui ont été considérées au paragraphe précédent.

Dans le temps  $dt$ , la masse matérielle comprise entre les surfaces  $s_1$ ,  $s_2$  et formée des couches 1 et 2 dégage réellement une quantité de chaleur  $dQ$  dont la théorie de la conductibilité fournit l'expression :

$$dQ = dt \int k_1 \frac{\partial T}{\partial n_i} ds_1 + dt \int k_2 \frac{\partial T}{\partial n_i} ds_2,$$

$k_1$  étant le coefficient de conductibilité du corps 1,  $k_2$  le coefficient de conductibilité du corps 2, la normale  $n_i$  étant menée vers l'intérieur du corps 1 le long de la surface  $s_1$ , et vers l'intérieur du corps 2 le long de la surface  $s_2$ .

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, cette quantité de chaleur a pour limite

$$(212) \quad dQ = dt \int \left[ k_1 \left( \frac{\partial T}{\partial N} \right)_1 - k_2 \left( \frac{\partial T}{\partial N} \right)_2 \right] dS.$$

Mais cette limite peut s'obtenir d'une autre manière;  $dQ$  est égal, en effet, à la somme  $(dQ_1 + dQ_2)$  des quantités de chaleur réellement dégagées, dans le temps  $dt$ , par les couches 1 et 2; et les valeurs limites de  $dQ_1$  et  $dQ_2$  se tirent des égalités (208) et (208 bis) en y faisant

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= u_1 dt, & \delta y_1 &= v_1 dt, & \delta z_1 &= w_1 dt, \\ \delta x_2 &= u_2 dt, & \delta y_2 &= v_2 dt, & \delta z_2 &= w_2 dt, \end{aligned}$$

ce qui nous donne pour valeur de la *quantité de chaleur réellement dégagée, dans le temps  $dt$ , en une portion quelconque de la surface par laquelle deux corps glissent l'un sur l'autre, la valeur essentiellement positive*

$$\begin{aligned} (213) \quad dQ &= -\frac{dt}{E} \int \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2] dS \\ &= -\frac{dt}{E} \int (f r'^2 + \mathfrak{G} |r'|) dS. \end{aligned}$$

Les seconds membres des égalités (212) et (213) doivent être égaux entre eux, quelle que soit l'aire  $S$  découpée sur la surface de contact des deux corps; pour cela, il faut et il suffit *que l'on ait, en tout point de la surface le long de laquelle deux corps glissent l'un sur l'autre, et à tout instant, la relation*

$$(214) \quad k_1 \left( \frac{\partial T}{\partial N} \right)_1 - k_2 \left( \frac{\partial T}{\partial N} \right)_2 = \frac{1}{E} \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2] = 0$$

qui peut aussi s'écrire, en désignant par  $n_1, n_2$ , les deux demi-normales à la surface  $S$  dirigées l'une vers l'intérieur du corps 1, l'autre vers l'intérieur du corps 2,

$$(214 \text{ bis}) \quad k_1 \frac{\partial T}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial T}{\partial n_2} - \frac{1}{E} \left( f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2] = 0.$$

Dans le cas où les corps 1 et 2 sont soudés entre eux le long de la surface  $S$ , on doit, comme nous le savons, faire

$$f = 0, \quad \mathfrak{G} = 0.$$

L'égalité (213) devient alors

$$(215) \quad dQ = 0$$

et l'égalité (214 bis) se réduit à

$$(216) \quad k_1 \frac{\partial T}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial T}{\partial n_2} = 0.$$

Dans le cas où les deux corps en contact glissent l'un sur l'autre avec viscosité, mais sans frottement, nos diverses égalités prennent des formes que l'on obtient aisément en y faisant  $\mathfrak{G} = 0$ . Ces formes ont été données par G. Kirchhoff (1). Il importait de les étendre au cas où il y a frottement et de les déduire rigoureusement de nos définitions générales de la quantité de chaleur dégagée par un système.

## CHAPITRE V.

### ÉTUDE HISTORIQUE SUR LES CONDITIONS VÉRIFIÉES AUX LIMITES D'UN FLUIDE.

Les lois de la résistance qu'un fluide oppose au mouvement des solides qui y sont immergés, qu'il éprouve de la part des parois solides au long desquelles il coule avaient, de bonne heure, préoccupé les physiciens, sans que ceux-ci s'accordassent dans leurs opinions; Newton, Daniel Bernoulli, s'Gravesande, Chezy, l'abbé Bossut, Du Buat, avaient proposé, pour représenter ces lois, les formules les plus diverses (2).

Parmi ces physiciens, il en est un dont les recherches méritent d'arrêter un instant notre attention : c'est Du Buat (3).

Les expériences de Du Buat sur l'écoulement de l'eau dans les tuyaux l'amènent à supposer qu'une couche d'eau demeure adhérente à la paroi solide et ne prend

(1) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über die Theorie der Wärme*, herausgegeben von Dr. MAX PLANCK, XI<sup>e</sup> Vorlesung, § 4; Leipzig, 1894.

(2) On trouvera d'intéressants renseignements sur ces anciennes recherches dans le Mémoire de Girard sur le mouvement des fluides dans les tubes capillaires, Mémoire qui sera cité plus loin.

(3) DU BUAU, *Principes d'Hydraulique, vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du Gouvernement*, 2 vol. (1<sup>re</sup> édition, Paris, 1779. — 2<sup>e</sup> édition, Paris, 1786).

aucune part au mouvement qui entraîne le reste du fluide <sup>(1)</sup> (*loc. cit.*, 2<sup>e</sup> édition, t. I, p. 93). De même, lorsqu'un corps solide se ment dans un fluide, il entraîne « avec lui une certaine quantité du même fluide qui varie peu avec la différence des vitesses; de sorte que la masse en mouvement ne consiste pas seulement en la masse propre du corps, mais encore en celle du fluide entraîné, ce qui convient très bien avec ce que nous avons appelé *poupe et proue fluide* » (*loc. cit.*, t. II, III<sup>e</sup> Partie, Section I, Chap. VII, p. 234). L'étude de cet entraînement du fluide par un solide en mouvement apparaît à Du Buat comme un objet d'une extrême importance: « Il n'est pas de moyen plus propre, dit-il (*loc. cit.*, t. II, p. 229) pour déterminer la quantité du fluide qu'entraîne avec lui un corps plongé que de faire osciller le corps dans le fluide.... On connaît les expériences de Newton sur les oscillations des globes dans différents fluides: comme il n'avait pour objet que de déterminer directement la résistance il ne s'attacha qu'aux pertes des amplitudes, sans observer la durée des oscillations. »

De quelle manière devons-nous concevoir cet entraînement? Le fluide se sépare-t-il, par une surface précise, en deux parties, l'une qui, pour ainsi dire, perdrait sa fluidité et ferait corps avec le solide; l'autre, demeurée fluide et glissant sur la première comme glissait la masse fluide entière à la surface du solide, selon l'hypothèse admise avant Du Buat? Ou bien, au contraire, la vitesse du fluide, identique à celle du solide le long de leur commune frontière, varie-t-elle d'une manière continue lorsqu'on s'éloigne de cette surface?

Si l'on s'en tenait seulement aux passages que nous avons cités, on attribuerait sans doute à Du Buat la première opinion; mais il est moins aisé de la concilier avec d'autres passages de ses *Principes d'Hydraulique*.

La masse même, qu'il attribue au fluide entraîné, semble peu compatible avec l'hypothèse que les mouvements de cette masse sont rigoureusement solidaires des oscillations du solide. « On voit, dit-il (*loc. cit.*, t. II, III<sup>e</sup> Partie, Section I, Chap. VII), qu'en général, un globe, mû dans l'eau, entraîne avec lui, tant en avant que derrière, une portion du fluide dont le volume excède un peu la moitié du sien. »

<sup>(1)</sup> Cette supposition s'était déjà présentée incidemment à l'esprit de Daniel Bernoulli, comme propre à expliquer les divergences entre les principes de l'Hydraulique et les données de l'observation. « Non dubito, écrit-il <sup>(2)</sup>, quin hæc ad amissum experientiae essent responsura, si modo adhesio aquæ ad latera tubi motum non retardaret: puto tamen, eventum experimentorum talem esse posse, ut intelligenti, qui horum impedimentorum rationem habeat, satis ostendant propositionum veritatem. » Et plus loin <sup>(3)</sup>: Enormes has differentias maxima ex parte adhesioni aquæ ad latera tubi tribuo, quæ certe adhesio in hujusmodi casibus incredibilem exercere potest effectum. »

<sup>(2)</sup> DANIELE BERNOLLI, *Hydrodynamica*. Sectio tertia, § 27, p. 50. — Argentorati, anno MDCCXXXVIII.

<sup>(3)</sup> *Ibid.*, ad. § 27, p. 59.

d'unités adopté, comme Girard devait le reconnaître avec bonne grâce quelques années plus tard <sup>(1)</sup>.

Dissipant cette erreur, de Prony, dans ses *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*, reprend la formule primitive de Coulomb et s'attache à déterminer la valeur des coefficients *a* et *b*.

De Prony admet d'ailleurs, comme Du Buat, dont il s'inspire, qu'une masse fluide notable demeure adhérente aux parois d'un canal où coule un liquide; il croit cette couche adhérente assez épaisse pour que ni la nature de la paroi, ni les petites aspérités qu'elle présente, n'aient d'influence sur le mouvement du liquide. « Lorsque le fluide coule dans un tuyau ou sur un lit susceptible d'être mouillé, une lame ou couche du fluide reste adhérente à la matière qui compose ce tuyau ou dans laquelle ce lit est creusé; cette couche peut ainsi être regardée comme la véritable paroi qui renferme la masse fluide en mouvement. »

En 1816, Girard revint <sup>(2)</sup> à l'étude de la résistance que les parois solides opposent à l'écoulement des fluides; il aborda cette étude au double point de vue théorique et expérimental. Il demeure attaché aux lois posées par Coulomb, dont le Mémoire « contient les principes qui doivent conduire à la solution de cette question » (*loc. cit.*, p. 253).

Ces principes, toutefois, il les précise et, en les précisant, il les altère de manière à les rapprocher des idées de Du Buat et de Prony. Coulomb, en un passage que nous avons cité, admettait qu'un solide et un liquide en mouvement relatif adhèrent le long de la surface de contact, puis que la vitesse varie graduellement, à partir de cette surface de contact, lorsqu'on pénètre au sein du liquide. Pour Girard, une gaine fluide très mince adhère à la surface du solide; une surface de discontinuité sépare cette gaine du reste du liquide et la vitesse qui figure dans ses formules, c'est la vitesse relative des deux masses fluides que sépare cette surface : « Par l'effet, dit-il (*loc. cit.*, p. 254), de l'adhérence du fluide aux parois du canal qui le contient, il arrive qu'une couche très mince de ce fluide reste attachée à ces parois, de sorte que le courant s'établit en glissant sur cette couche. »

Cette couche très mince qui adhère au solide oppose au mouvement du reste du fluide une résistance *au* proportionnelle à leur vitesse relative (*loc. cit.*, p. 255); cette résistance est donc attribuable, non aux actions du solide sur le fluide, mais aux actions mutuelles des diverses parties du fluide. Elle existerait seule si la paroi solide était parfaitement polie; mais la paroi offre une multitude

<sup>(1)</sup> GIRARD, *Mémoire sur le mouvement des fluides*, etc. (voir ci-dessous), p. 256.

<sup>(2)</sup> *Mémoire sur le mouvement des fluides dans les tubes capillaires et l'influence de la température sur ce mouvement*, par M. GIRARD. Lu à l'Académie, le 30 avril et le 6 mai 1816 (*Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, années 1813, 1814 et 1815).

d'aspérités qu'épouse fidèlement la couche adhérente et qui se reproduisent à la surface par laquelle cette couche confine au reste du fluide; c'est à ces aspérités qu'il faut attribuer la présence, dans l'expression de la résistance, d'un terme  $bu^2$  proportionnel au carré de la vitesse  $u$  (*loc. cit.*, p. 255). Girard, on le voit, suppose à la gaine liquide adhérente moins d'épaisseur que ne lui en attribuaient Du Buat et de Prony.

Les expériences effectuées par Girard ne s'accordent guère avec les fondements de sa théorie; la valeur du coefficient  $\alpha$ , au lieu d'être constante pour un fluide donné, dépend du diamètre du tube par lequel le liquide s'écoule (*loc. cit.*, p. 297 et p. 328). Girard, il est vrai, ne s'émeut guère de cette contradiction; bien plus, il lui semble (*loc. cit.*, p. 328) que « l'existence de cette couche fluide (immobile, qui tapisse intérieurement le tuyau), par laquelle nous avons expliqué les phénomènes précédents, se trouve démontrée par celui qui nous occupe actuellement ». D'ailleurs, pour rétablir l'accord entre sa théorie et les faits d'expérience, il n'hésite pas à supposer que l'épaisseur de la couche adhérente dépend de la courbure de la paroi.

Les hypothèses touchant les actions moléculaires qui ont fourni à Navier <sup>(1)</sup> les formules relatives à la viscosité intérieure des fluides lui fournissent également la théorie de la résistance qu'une paroi solide oppose à l'écoulement d'un fluide.

Pour Navier, le fluide n'est pas adhérent au solide; au contact d'une paroi immobile, le fluide a une vitesse dont les composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , différentes de 0, vérifient seulement la condition (*loc. cit.*, p. 415)

$$u \cos(n_i, x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, z) = 0.$$

Le travail virtuel des actions du solide sur la couche fluide contiguë a pour valeur (*loc. cit.*, p. 411)

$$-\int E(u \delta x + v \delta y + w \delta z) dS,$$

$dS$  étant un élément de la surface de contact et  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  les composantes du déplacement virtuel de la masse liquide qui confine à cet élément.  $E$  est un coefficient positif qui dépend seulement de la nature du liquide et du solide et de leur commune température.

Cette expression du travail de la viscosité de contact rentre comme cas particulier dans notre formule (48), à condition d'y réduire notre quantité  $f$  à  $-E$ .

<sup>(1)</sup> NAVIER, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, lu à l'Académie royale des Sciences, le 18 Mars 1822 (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, année 1823, p. 389). On trouve un exposé des formules de Navier dans RESAL, *Traité de Mécanique générale*, t. II, p. 252; 1874.

La théorie proposée par Navier rentre donc comme cas particulier dans celle que nous avons exposée, à la condition de faire, en celle-ci,

$$f = -E, \quad \epsilon = 0.$$

Et, en effet, si l'on substitue ces valeurs dans les conditions (76), on obtient les équations qui doivent, selon Navier, être vérifiées en tout point de la surface de contact du solide et du liquide (*loc. cit.*, p. 415).

Ces conditions, Navier en fait usage pour traiter *de l'écoulement d'un fluide par un tuyau rectiligne dont la section est rectangulaire* (*loc. cit.*, p. 417), puis *de l'écoulement d'un fluide par un tuyau rectiligne dont la section est circulaire* (*loc. cit.*, p. 422). Les formules qu'il donne pour résoudre ce problème sont, au fond, identiques à celles que Girard avait déduites de sa théorie.

Ce rapprochement entre les conséquences de la théorie de Girard et les conséquences de la théorie de Navier ne doit pas nous surprendre; distinctes par une de leurs hypothèses fondamentales, la théorie de Girard et la théorie de Navier ne tardent guère à se rejoindre; pour celui-ci, c'est sur la paroi solide même que glisse le liquide; pour celui-là, c'est sur une mince couche fluide adhérente au liquide; mais, pour l'un comme pour l'autre, une surface de discontinuité sépare les masses mobiles des masses immobiles et les premières retardent les secondes par une viscosité à laquelle les deux physiciens imposent les mêmes lois.

La contradiction que les formules de Girard rencontrent dans ses propres expériences s'oppose donc également à l'adoption des formules de Navier.

En 1829, Poisson compose un Mémoire <sup>(1)</sup>, capital pour le développement de la physique moléculaire, qui contient une théorie fort originale du mouvement des fluides visqueux; les hypothèses qu'il formule touchant l'action d'une paroi solide sur un fluide en mouvement ont d'étroites relations avec les suppositions que Girard avait émises.

« Si un fluide, dit-il (*loc. cit.*, p. 94), est en contact avec un corps solide susceptible d'agir sur ses molécules, cette action produira une compression particulière qui peut se transmettre de proche en proche, jusqu'à une distance extrêmement petite, mais sensible, de la surface du solide, quoique l'action immédiate de ce corps n'ait lieu qu'à une distance insensible. Il se peut que, dans l'épaisseur de cette couche ainsi comprimée, le fluide perde sa fluidité, ou, autrement dit, il est possible que ses molécules soient assez rapprochées les unes des autres pour que leur forme influe sur leur action mutuelle, comme dans les corps solides. Dans cette hypothèse, la contraction linéaire et, par suite, la pression moléculaire, n'y seront plus égales en tout sens autour de chaque

---

<sup>(1)</sup> *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, par S.-D. Poisson, lu à l'Académie des Sciences, 11 octobre 1829 (*Journal de l'École Polytechnique*, XX<sup>e</sup> cahier, t. XIII, 1831, p. 1).

point; et c'est sans doute ce qui a lieu dans la couche extrêmement mince qui s'attache à un corps mouillé par un liquide et ne coule plus le long de sa surface; ce qui est un effet distinct de l'adhésion apparente, due à la même cause que les phénomènes de la capillarité. »

Comme Girard, Poisson admet qu'une véritable surface de discontinuité sépare cette couche immobile, adhérente à la paroi, de la masse fluide mobile :

« Nous avons déjà remarqué (*loc. cit.*, p. 161) qu'il est possible qu'une couche très mince du fluide devienne adhérente à cette paroi et perde sa fluidité; dans ce cas, nous regarderons cette couche comme faisant partie de la paroi qui aura pour surface celle de cette même couche où se termine le fluide qui sera resté mobile. »

L'accord entre les vues de Poisson et celles de Girard, que nous venons de constater dans les hypothèses fondamentales, se retrouve dans leurs conséquences : celles-ci, dès lors, s'accordent également avec les formules de Navier. Les conditions vérifiées à la surface de contact du solide et du fluide (*loc. cit.*, p. 169) sont ce que deviennent nos égalités (76) si l'on y remplace  $\phi$  par 0 et  $f$  par un coefficient  $\mu$  qui dépend « de la nature du fluide et de celle de la paroi. Il sera constant dans le cas d'un fluide incompressible et homogène qui aura partout la même température. S'il s'agit d'un fluide aériforme, il pourra dépendre de la compression variable du fluide ».

Si les suppositions de Poisson, dans le Mémoire que nous venons de citer, s'accordent très exactement avec celles de Girard, elles sont au contraire pleinement conformes à celles de Navier dans le Mémoire que Poisson consacre à la théorie du pendule (<sup>1</sup>). Les vitesses des molécules adjacentes au solide ne sont plus supposées identiques à celles du solide; le fluide peut glisser à la surface du solide; il est assujéti seulement à cette condition : « Les vitesses des molécules adjacentes à ce corps sont constamment les mêmes, dans le sens normal, que celles des points correspondants de sa surface. » Mais, en glissant à la surface du solide, le fluide, par son frottement, produit une action tangentielle proportionnelle à la vitesse relative des deux corps en contact.

Ces principes sont bien ceux qu'admet Navier; mais, par une singulière inconséquence, Poisson omet de tenir compte, dans ses équations, de la viscosité interne du fluide; il aurait dû, dès lors, en vertu même de ses hypothèses, admettre que le fluide demeure adhérent au solide tout le long de leur commune surface.

L'idée, émise par Coulomb, selon laquelle le fluide se meut avec une vitesse exactement égale, le long des parois, à celle du solide qu'il baigne, et graduel-

---

(<sup>1</sup>) S.-D. POISSON, *Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XI, 1832, p. 521).



lement variable avec la distance à ces parois, semble donc généralement abandonnée; Girard, Navier, Poisson s'accordent à admettre l'existence d'une surface au travers de laquelle la vitesse subit une brusque variation; leurs opinions divergent seulement touchant le siège de cette surface. Nous retrouvons toutefois, en 1839, l'opinion de Coulomb dans un travail, d'ailleurs médiocre, de Hagen <sup>(1)</sup>; lorsqu'un liquide coule dans un tube étroit, Hagen admet sans discussion (*loc. cit.*, p. 433) que la vitesse d'écoulement, nulle à la paroi, est, en chaque point, proportionnelle à la distance de ce point à la paroi..

L'opinion émise par Coulomb et abandonnée par la plupart de ses successeurs, allait trouver en Stokes un partisan convaincu; à l'appui de cette opinion, Stokes allait invoquer un argument nouveau, qui sera repris ensuite par divers théoriciens. Voici sous quelle forme il présente cet argument <sup>(2)</sup> :

Au sein d'un fluide visqueux en mouvement (*Papers*, Vol. I, p. 96) imaginons une surface et supposons qu'au voisinage de cette surface, les dérivées partielles des composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de la vitesse, soient extrêmement grandes; les actions tangentiellles, dues à la viscosité, seront aussi extrêmement grandes; elles produiront une rapide atténuation de la vitesse relative des parties voisines. Passons à la limite et supposons qu'à un instant  $t$ , les composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de la vitesse soient discontinues le long d'une certaine surface; à cet instant, les actions tangentiellles seraient infinies le long de cette surface; elles détruiraient immédiatement la vitesse relative des deux masses fluides qui confinent l'une à l'autre le long de cette surface; on ne peut donc trouver, au sein d'un fluide visqueux en mouvement, de surfaces le long desquelles les composantes de la vitesse soient discontinues. Raisonnant par analogie, il est naturel d'admettre que les actions, au contact d'un fluide et d'un solide qu'il baigne, sont semblables aux actions qu'exercent l'une sur l'autre deux masses fluides contiguës; que, par conséquent, la vitesse ne peut être discontinue le long d'une semblable surface. Par là, on est conduit à admettre que le fluide adhère au solide le long de leur commune frontière.

Le raisonnement de Stokes est une sorte d'esquisse des considérations que nous avons développées précédemment (II<sup>e</sup> Partie, Chap. I); mais la comparaison de ce que nous avons écrit avec ce raisonnement trop sommaire montre que ce dernier n'est pas entièrement exact. Il est bien vrai qu'une surface au passage de

<sup>(1)</sup> HAGEN, *Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren* (Poggendorff's Annalen, Bd. XLVI, 1839, p. 423).

<sup>(2)</sup> P. G. STOKES, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids*, lu le 14 avril 1845 à la *Philosophical Society* de Cambridge. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. VIII, p. 385. — *Mathematical and physical Papers*, Vol. I, p. 75.

laquelle les composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de la vitesse varieraient d'une manière discontinue ne peut persister pendant un temps fini au sein d'un fluide visqueux; mais il n'est pas exact que les actions de viscosité donnent, au long d'une telle surface, des résultantes infinies, et le raisonnement de Stokes, suivi rigoureusement, aurait pour conséquence de justifier l'opinion de Navier, bien loin de la réfuter.

D'ailleurs, en dépit de ces considérations, qui lui semblent démontrer l'adhérence du fluide au solide et la continuité du mouvement au sein du fluide, Stokes hésite à adopter cette opinion; car, en la suivant, il a étudié l'écoulement d'un liquide dans un tuyau et il a trouvé une formule qui ne s'accorde pas avec les expériences de l'abbé Bossut et de Du Buat.

Il tente alors de revenir à l'opinion de Navier (qu'il désigne sous le nom d'*opinion de Poisson*); mais, dans cette voie, il rencontre de nouvelles difficultés; selon les expériences de Du Buat, une couche liquide reste adhérente aux parois du tuyau au sein duquel coule un fluide; il n'est possible de mettre cette observation d'accord avec les formules de Navier qu'en supposant infini le coefficient  $E$ , et l'on est ainsi ramené à la précédente opinion.

Cette hésitation entre les diverses suppositions émises par Coulomb, par Girard, par Navier, par Poisson, se retrouve dans le *Rapport* <sup>(1)</sup> écrit par Stokes, en 1846.

Peut-être les conditions vérifiées au contact d'un solide et d'un liquide changent-elles, selon que le liquide *mouille* le solide, comme l'eau mouille le verre, ou que le liquide *ne mouille pas* le solide, comme il arrive dans le cas du mercure et du verre.

Les idées de Stokes touchant le problème qui nous occupe se fixent, en 1850, dans son célèbre travail : *De l'effet du frottement intérieur des fluides sur le mouvement des pendules* <sup>(2)</sup>. Il a adopté définitivement l'hypothèse de Coulomb. Les raisons qui déterminent son choix sont, sous une forme plus explicite, celles qu'il avait déjà indiquées en 1845; voici en quels termes il les présente (*Collection de Mémoires*, t. V, p. 292) :

» Pour que le fluide, immédiatement en contact avec un solide, pût couler sur lui avec une vitesse finie, il faudrait que le solide exerçât sur le fluide un frotte-

(1) P. G. STOKES, *Report on recent researches on Hydrodynamics* (Report of the British Association for 1846, Part. I, p. 1. — *Mathematical and physical Papers*, Vol. I, p. 157).

(2) P. G. STOKES, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, lu à la *Philosophical Society* de Cambridge, le 9 décembre 1850 (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. IX, Part. II, p. 8. — *Philosophical Magazine*, Vol. I, 1851, p. 337. — *Collection de Mémoires relatifs à la Physique*, publiés par la Société française de Physique, t. V, 1891, p. 277. — *Mathematical and physical Papers* Vol. III, p. 1).

ment infiniment plus faible que celui que le fluide exerce sur lui-même. Car, concevons la couche élémentaire de fluide comprise entre la surface du solide et une surface parallèle à la surface  $h$ , et ne considérons que la portion de cette couche qui correspond à une portion élémentaire  $dS$  de la surface du solide. Il doit y avoir équilibre entre les forces qui agissent sur l'élément fluide et les forces effectives, prises en sens contraire <sup>(1)</sup>. Concevons maintenant que  $h$  s'évanouisse par rapport aux dimensions linéaires de  $dS$ , et que, finalement,  $dS$  s'évanouisse également. Il est évident que les conditions d'équilibre se réduisent finalement à celle-ci, que la pression oblique que l'élément fluide éprouve du côté du solide doit être égale et opposée à la pression qu'il éprouve du côté du fluide. Or, si le fluide pouvait couler le long du solide avec une vitesse finie, il s'ensuivrait que la pression tangentielle, mise en jeu par le glissement continu du fluide sur lui-même, ne serait pas même contrebalancée par le glissement rude et inégal du fluide sur le solide. Comme cela paraît *a priori* excessivement improbable, il semble raisonnable d'examiner en premier lieu les conséquences de la supposition qu'il n'y a pas de pareil glissement du fluide sur le solide, d'autant mieux que les difficultés mathématiques du problème seront ainsi matériellement diminuées. Je prendrai donc, comme condition devant être satisfaite aux limites du fluide, que la vitesse d'une particule fluide doit être égale, en grandeur et en direction, à celle de la particule solide avec laquelle elle est en contact. Les résultats déduits de cette hypothèse montrent, en réalité, l'accord le plus satisfaisant avec l'observation. »

En admettant qu'un liquide adhère aux parois des tuyaux dans lesquels il coule et en étudiant le régime permanent qui s'établit dans ces tuyaux, Stokes avait obtenu des résultats qui ne s'accordaient pas avec les observations de Bossut et de Du Buat; ce désaccord l'avait fait hésiter sur la légitimité de son hypothèse.

Cette hésitation lui eût été évitée, s'il eût connu les expériences poursuivies à la même époque par Poiseuille; le résultat du calcul eût été pleinement conforme aux données de l'observation.

L'étude de l'écoulement des liquides dans les tubes de très petit diamètre apparaît comme particulièrement propre à contrôler les hypothèses qui pourraient être faites, touchant la résistance que les parois opposent à cet écoulement. D'autre part, cette étude intéresse à un haut degré le physiologiste qui veut analyser les phénomènes de la circulation capillaire. Ce fut surtout cette seconde raison qui porta Poiseuille <sup>(2)</sup> à reprendre cette étude au point de vue expérimental et à soumettre à l'observation des tubes beaucoup plus étroits que les tubes

---

<sup>(1)</sup> Par cette dernière expression, Stokes entend les *forces d'inertie*.

<sup>(2)</sup> POISEUILLE, *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de petit diamètre* (*Mémoires des savants étrangers*, t. IX, 1846, p. 433).

Grâce à ce changement apporté aux conditions aux limites, l'analyse de Navier fournit sans peine à Hagenbach les lois mêmes que Poiseuille avait tirées de l'expérience.

Peu de temps après, et sans connaître le travail de Hagenbach, Émile Mathieu<sup>(1)</sup> reprit, avec le même succès, une analyse semblable. « Quand un liquide coule dans un tube capillaire, dit-il, il existe une couche de liquide adhérente au tube...; cette adhérence tient à la force de cohésion du liquide et du verre, ou plutôt au frottement qui est proportionnel à cette force. Ainsi, la condition à la surface est que la vitesse du liquide soit nulle sur la paroi. »

Plus tard, par des méthodes analogues, le même sujet fut repris par M. Boussinesq<sup>(2)</sup>; en modifiant la condition aux limites admise par Navier, M. Boussinesq justifiait cette modification par des raisons semblables à celles qu'avaient invoquées Stokes et Hagenbach.

Bien que très général, le consentement à l'opinion de Coulomb ne fut cependant pas universel; certains hydrauliciens, et non des moindres, tinrent pour les hypothèses de Girard et de Navier; parmi ceux-ci, il convient de citer Darcy<sup>(3)</sup>.

Darcy n'ignore pas les considérations par lesquelles, depuis Prony, on tente de prouver qu'un fluide ne peut couler le long d'une paroi solide avec une vitesse finie; il sait qu'en supposant du même ordre de grandeur les actions mutuelles des diverses parties du fluide et les actions du solide sur le fluide, on prétend démontrer qu'un tel glissement engendrerait un frottement infini; mais il se range à l'opinion que Dupuit avait émise dans ses *Études sur le mouvement des eaux courantes*, et, sans discuter la rigueur du raisonnement, il révoque en doute l'hypothèse même qui lui sert de fondement. « On voit par ce qui précède, dit-il (*loc. cit.*, p. 309), qu'il suffit d'une vitesse relative infiniment petite pour faire naître, dans les couches fluides en contact, une résistance comparable à celle qui pourrait être engendrée par une vitesse finie du liquide glissant sur une paroi solide. M. Dupuit a donc pu prétendre que de Prony ne paraît pas avoir exprimé une idée précise lorsqu'il a dit : « Cette cohésion des molécules fluides entre elles, et celle des mêmes molécules à la matière dont le tuyau est formé ou dans laquelle le tuyau est creusé, doivent être, en général, représentées par des valeurs différentes, mais comparables ou du même ordre les unes par rapport aux autres. »

« L'adhérence à la paroi, en effet, peut être expérimentée sous une vitesse finie

(1) ÉMILE MATHIEU, *Sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petit diamètre* (*Comptes rendus*, t. LVII, 1863, p. 320. — *Cours de Physique mathématique*, p. 66. Paris, 1873).

(2) BOUSSINESQ, *Théorie des expériences de M. Poiseuille sur l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires* (*Comptes rendus*, t. LXV, 1867, p. 46).

(3) DARCY, *Recherches expérimentales sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux* (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XV, 1858, p. 141).

quelconque, tandis que ce qu'on appelle la *cohésion* ne peut l'être que sous l'influence d'une vitesse relative infiniment petite; car, de quelque manière qu'on fasse l'expérience, ajoute justement M. Dupuit, *la cohésion du liquide sera toujours assez forte pour que la vitesse relative des deux surfaces soit sensiblement nulle* ».

« Ces deux forces de l'adhérence et de la cohésion sont, on le voit, d'un ordre différent et sans mesure commune. »

De ce passage une conclusion semble se dégager nettement : Le liquide peut, comme le voulait Navier, glisser avec une vitesse finie à la surface d'une paroi solide; mais il ne peut se produire, entre deux masses fluides, une de ces surfaces de discontinuité dont Girard admettait l'existence.

Cette conclusion n'est pas, cependant, celle qu'adopte Darcy. S'il admet que, dans certains cas exceptionnels, le liquide glisse à la surface même du solide, il pense que, le plus souvent, l'écoulement a lieu selon le mode que Girard a imaginé. Voici, en effet, quelques-unes des propositions par lesquelles Darcy résume ses recherches (*loc. cit.*, p. 347) :

» Il résulte des expériences faites :

» 1° Que, même dans un tuyau *verticalement placé* et à raison de l'attraction de ses parois, une couche liquide leur reste adhérente.

» 2° Que l'épaisseur de cette couche est beaucoup trop faible pour faire disparaître les aspérités de la paroi; que, d'ailleurs, elle doit présenter une épaisseur sensiblement constante et, par conséquent, offrir à sa surface les mêmes reliefs que la paroi elle-même.

» Sans doute, dans un courant, il ne peut y avoir entre les vitesses de deux filets contigus qu'une différence insensible; mais il ne saurait en être ainsi lorsqu'il s'agit de la couche adhérente; elle est, pour ainsi dire, passée à l'état d'*émail*, d'enduit aqueux de la paroi. »

Cette couche tend à retarder le mouvement du liquide qu'elle enserme :

» Si donc, d'une part, l'attraction des parois doit être considérée comme une des causes retardatrices du mouvement, on doit reconnaître, d'autre part, que cette cause agit vraisemblablement en grande partie par l'intermédiaire de la cohésion du fluide que la surface extérieure du cylindre mobile doit surmonter.

» Ainsi le mode d'agir de l'attraction des parois semblerait pouvoir se résumer ainsi :

» Force nécessaire pour vaincre l'attraction des parois, dans les parties où le liquide viendrait à s'en détacher, et force nécessaire pour surmonter la cohésion quand le cylindre liquide passe sur l'enduit aqueux.

» Enfin, les aspérités de la surface qui viennent modifier brusquement le mouvement et la direction des filets fluides forment, évidemment, une autre cause retardatrice. »

Une inconséquence assez étrange semble donc faire le fond des considérations développées par Darcy touchant l'action des parois sur une masse fluide en mouvement.

C'est aux hypothèses de Navier que revient M. Oskar Emil Meyer <sup>(1)</sup>.

Reprenant des expériences analogues à celles de Coulomb, M. Oskar Emil Meyer fait osciller un disque métallique au sein d'une masse d'eau que recouvre une couche d'huile; la face supérieure du disque est amenée tout près de la surface de séparation entre l'eau et l'huile.

Conformément à l'opinion de Coulomb, M. O.-E. Meyer admet (*Diss.*, p. 6; *Pogg. Ann.*, p. 61) que l'eau adhère au disque métallique : *Discum fluido circumfuso tanto modo humectari pono, ut stratum fluidi disco vicinum eadem gaudeat celeritate qua ipse discus*. Mais il suppose que les deux liquides glissent l'un sur l'autre le long de leur surface de contact; ce glissement engendrerait une résistance soumise à des lois semblables de tout point à celles que Navier imposait au frottement d'un liquide sur un solide. Il semble par là, que l'opinion de M. O.-E. Meyer s'accorderait aisément avec l'hypothèse de Girard et de Darcy; mais ce n'est là qu'une apparence dissipée par la lecture des écrits où, peu après, M. O.-E. Meyer développe plus explicitement sa pensée.

Dans son Mémoire inséré aux *Annales de Poggendorff*, tout en admettant en général l'adhérence du liquide au solide, M. O.-E. Meyer écrit (*Pogg. Ann.*; p. 68) quelques lignes où il déclare que les lois vérifiées au contact d'un solide et d'un liquide sont tout à fait analogues à celles qui sont vérifiées au contact de deux liquides; il les suppose donc, en ce passage, données par les formules de Navier. De plus, il écarte (*ibid.*, p. 69) l'objection présentée par Stokes contre ces formules; avec Dupuit et avec Darcy, il admet ce principe : Les lois de la viscosité interne d'un fluide sont d'une tout autre nature que les lois dont dépend la viscosité au contact de deux substances différentes.

Dans son travail publié au *Journal de Borchardt*, M. O.-E. Meyer s'exprime plus explicitement encore; il admet que les conditions vérifiées à la surface de contact de deux fluides sont données par les équations de Navier (*loc. cit.*, p. 238); qu'il en est de même des conditions vérifiées à la surface de contact d'un liquide et d'un solide (*ibid.*, p. 239); mais que, dans le cas où le solide est mouillé par le fluide, le coefficient E est infini, en sorte que la vitesse relative du solide et du fluide tombe à 0.

---

(1) OTTOCARIUS ÆMILIUS MEYER, *De mutua duorum fluidorum frictione* : Dissertatio inauguralis; Regimonti Prussorum (Königsberg), anno MDCCCLX. — OSKAR EMIL MEYER, *Ueber die Reibung der Flüssigkeiten* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, Bd. CXIII, p. 55; 1861). — *Ueber die Reibung der Flüssigkeiten; theoretischer Theil* (*Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. LIX, p. 229; 1861).

qu'elle diffère de 0, il est aussi sûr et plus simple de la supposer rigoureusement égale à 0 (*Scientific papers*, vol. II, p. 9).

Comme Helmholtz et von Piotrowski, Stefan <sup>(1)</sup> admet qu'un liquide peut glisser sur une surface solide; il applique, en particulier, cette hypothèse au glissement du mercure sur le verre qui, selon lui, suit les lois tracées par Navier. D'ailleurs, dans ce cas, l'hypothèse semblait fort plausible; car les expériences de Poiseuille lui-même avaient prouvé que les lois de l'écoulement d'un liquide dans un tube capillaire, découvertes par ce physicien, ne s'appliquaient pas à l'écoulement du mercure dans le verre.

Mais, chose remarquable, cette exception n'était qu'apparente et due à des observations incorrectes; en 1870, M. Emil Warburg <sup>(2)</sup> reprit l'étude de l'écoulement du mercure dans des tubes de verre capillaires; contrairement à son attente, il trouva que cet écoulement suivait les célèbres lois de Poiseuille; il fallait nécessairement conclure de cette observation que le mercure adhéraît au verre (*loc. cit.*, p. 370). Cette découverte expérimentale paraît à M. Warburg (*loc. cit.*, p. 379) s'accorder pleinement avec le raisonnement de Stokes, selon lequel le glissement d'un liquide sur un solide est impossible si l'on admet que le frottement du solide sur le fluide dépend de lois analogues à celles qui régissent le frottement mutuel de deux couches fluides.

Quelques années plus tard, l'observation de M. E. Warburg était confirmée successivement par M. E. Villari <sup>(3)</sup> et par M. Syn. Koch <sup>(4)</sup>; ces deux auteurs reconnurent que le mercure, coulant dans de très fins tubes de verre, suivait les lois de Poiseuille.

Les hypothèses formulées par Navier touchant le glissement des liquides sur les solides, un moment remises en honneur par les recherches de Helmholtz et de von Piotrowski, se trouvaient de nouveau rejetées en suspicion par ces observations qui ramenaient l'attention vers l'hypothèse de Coulomb.

Une tendance analogue se dégageait des importantes recherches expérimentales, historiques et critiques poursuivies par M. Couette <sup>(5)</sup>. En précisant par

<sup>(1)</sup> STEFAN, *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der Akademie der Wissenschaften zu Wien*, Bd. XLVI, 1862.

<sup>(2)</sup> EMIL WARBURG, *Ueber den Ausfluss des Quecksilbers aus gläsernen Capillarröhren* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. CXL, 1870, p. 367).

<sup>(3)</sup> E. VILLARI (*Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 3<sup>e</sup> série, t. VI, 1876, p. 1).

<sup>(4)</sup> SYN. KOCH, *Ueber die Abhängigkeit der Reibungsconstante des Quecksilbers von der Temperatur* (*Wiedemann's Annalen*, Bd. XIV, 1881, p. 1).

<sup>(5)</sup> M. COUETTE, *La viscosité des liquides* (*Bulletin des Sciences Physiques de la Faculté des Sciences de Paris*, 1<sup>re</sup> année, Paris, 1888-1889; pp. 49, 123, 201, 262). — *Études sur le frottement des liquides* (*Thèse de Paris*, 30 mai 1890, et *Annales de Chimie et de Physique*, 6<sup>e</sup> série, t. XXI, p. 433; 1890).

solution préconisée par Du Buat, par de Prony, par Girard, par Poisson, par Darcy. Il ne peut pas se faire qu'une couche fluide demeure adhérente au solide et que le reste du fluide glisse avec une vitesse finie sur cette couche. Les raisonnements exposés au Chapitre I de la II<sup>e</sup> Partie de ces *Recherches* nous ont démontré qu'au sein d'un fluide visqueux, aucune surface ne peut être, pour les composantes de la vitesse, une surface de discontinuité <sup>(1)</sup>.

Les composantes de la vitesse varient donc d'une manière continue d'un point à l'autre du fluide; par là, le doute se trouve restreint et nous ne pouvons plus hésiter qu'entre l'hypothèse de Coulomb et l'hypothèse de Navier.

Comme nous l'avons fait remarquer, l'hypothèse de Navier est impliquée, comme cas particulier, dans notre théorie. Pour retrouver les formules de Navier, il nous suffit d'admettre que le coefficient du frottement de contact  $\phi$  est identiquement nul et que le coefficient de la viscosité de contact  $f$  ne dépend pas de la vitesse relative  $v'$ .

L'hypothèse de Coulomb admet que, pour deux corps différents, dont l'un au moins est fluide, la vitesse relative est nulle le long de la surface de contact. Si les fluides sont dénués de viscosité intrinsèque, ce n'est point là une hypothèse nouvelle, mais une conséquence des principes posés par Navier.

Dans le cas, au contraire, où les fluides étudiés sont des fluides visqueux, l'hypothèse de Coulomb se présentait jusqu'ici comme une hypothèse première que rien ne reliait aux principes généraux de la Mécanique. Ce n'était pas, en effet, relier cette hypothèse aux principes de la Mécanique de remarquer, avec F.-E. Neumann, Helmholtz, M. O.-E. Meyer et tant d'autres, que les formules de Navier donnent cette hypothèse à titre de loi limite lorsqu'on y fait croître au delà de toute limite le coefficient  $f$  de la viscosité de contact; c'est proprement remarquer que lorsque la théorie de Navier perd tout sens, on est contraint d'adopter l'hypothèse de Coulomb; ou mieux, c'est faire la remarque suivante : Lorsque  $f$  prend de grandes valeurs sans que  $\mu$  dépasse certaines limites, les composantes de la vitesse relative deviennent très petites, ce qui assure une adhérence approchée, mais non pas une adhérence rigoureuse des deux corps.

La théorie que nous avons exposée permet de prévoir des cas où un fluide adhérera forcément et rigoureusement aux corps solides qu'il baigne; l'hypothèse

---

(1) Récemment, M. Hadamard <sup>(\*)</sup> a montré que cette proposition devait être admise même pour les fluides parfaits. Des surfaces le long desquelles deux parties distinctes d'un même fluide glisseraient l'une sur l'autre pourraient persister, une fois nées; mais il est impossible qu'elles naissent à aucun instant.

(\*) J. HADAMARD, *Sur les glissements dans les fluides* (*Comptes rendus*, 2 février et 2 mars 1903, t. CXXXVI, p. 299 et 545).



de Coulomb est ainsi reliée aux principes généraux de l'Énergétique. Mais, en outre, elle montre qu'un même fluide et un même solide pourront, selon les circonstances du mouvement, adhérer l'un à l'autre ou glisser l'un sur l'autre; cette conclusion est conforme à l'opinion émise par certains hydrauliciens et notamment par Darcy dans un passage que nous avons cité.







## TABLE DES MATIÈRES (FASCICULE N° 2, 1905).

- Théorie des formes à coefficients entiers décomposables en facteurs linéaires;** par M. X. STOLFF.....  
**Exposé de la méthode de M. C. Glasenapp pour la réduction des observations des éclipses des satellites de J.**  
 par M. Nicolas STOVANOFF.....  
**Recherches sur l'Hydrodynamique, IV<sup>e</sup> Partie;** par M. P. DUHEM (*suite et fin*).....

**LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6<sup>e</sup>).**

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

**DARBOUX (G.),** Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences.  
 — **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparément (ŒUVRE COMPLÈTE):

- I<sup>re</sup> PARTIE : *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima;* 1887..... 15 fr.  
 II<sup>e</sup> PARTIE : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces;* 1889..... 15 fr.  
 III<sup>e</sup> PARTIE : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Invariants différentiels. Déformation des surfaces;* 1894..... 15 fr.  
 IV<sup>e</sup> PARTIE : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique;* 1896..... 15 fr.

**DARBOUX (Gaston),** Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences et Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris.  
 — **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.** Deux volumes grand in-8, se vendant séparément:

- TOME I : Volume de iv-338 pages avec figures; 1898..... 10 fr.  
 TOME II..... (En préparation.)

**GÉRARD (Eric),** Directeur de l'Institut électrotechnique Montefiore, annexé à l'Université de Liège. — **Leçons sur l'Électricité,** professées à l'Institut électrotechnique. 6<sup>e</sup> édition. 2 volumes grand in-8, se vendant séparément:

- TOME I : *Théorie de l'Électricité et du Magnétisme. Électrométrie. Théorie et construction des générateurs et des transformateurs électriques.* Avec 388 figures; 1900..... 12 fr.  
 TOME II : *Canalisation et distribution de l'énergie électrique. Applications de l'Électricité à la Téléphonie, à la Télégraphie, à la production et à la transmission de la puissance motrice, à la traction, à l'éclairage, à la Métallurgie et à la Chimie industrielle.* Avec 387 figures; 1900..... 12 fr.

**GÉRARD (Eric),** Directeur de l'Institut électrotechnique Montefiore, Ingénieur principal des Télégraphes, Professeur à l'Université de Liège. — **Mesures électriques.** Leçons professées à l'Institut électrotechnique Montefiore, annexé à l'Université de Liège. Grand in-8 de 450 pages, avec 198 figures. Cartonné, toile anglaise; 1896..... 12 fr.

**GOUSAT (Edouard),** Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse mathématique.**

- TOME I. *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développement en séries. Applications géométriques.* Grand in-8 de vi-620 pages, avec 52 figures; 1902..... 20 fr.  
 TOME II. *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments du calcul des variations.*..... (En préparation.)

**HALPHEN (G.-H.),** Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

- I<sup>re</sup> PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs applications en série;* 1886.....  
 II<sup>e</sup> PARTIE : *Application de la Mécanique à la Physique, à la Géométrie et au Calcul intégral;* 1888.....  
 III<sup>e</sup> PARTIE : *Fragment (Quelques applications à l'Algèbre, à l'équation du 5<sup>e</sup> degré. Quelques applications aux nombres. Questions diverses.)* Publié par la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1888.....

**HUMBERT (G.),** Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse** professé à l'École Polytechnique, se vendant séparément.

- TOME I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral géométriques,* avec figures; 1902.....  
 TOME II : *Complément de la théorie des intégrales définies. Fonctions d'une variable imaginaire. Fonctions et applications. Équations différentielles.*

**LAURENT (H.),** Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Traité d'Algèbre,** à l'usage des candidats aux Écoles de l'État et mis en harmonie avec les derniers programmes, par un ancien élève de l'École Polytechnique. 4 volumes in-8.

- I<sup>re</sup> PARTIE. — *Algèbre élémentaire,* à l'usage des Classes élémentaires. 5<sup>e</sup> édition; 1897.....  
 II<sup>e</sup> PARTIE. — *Analyse algébrique,* à l'usage des Classes spéciales. 5<sup>e</sup> édition; 1894.....  
 III<sup>e</sup> PARTIE. — *Théorie des équations,* à l'usage des Classes spéciales. 5<sup>e</sup> édition; 1894.....  
 IV<sup>e</sup> PARTIE. — **COMPLÈMENT : Théorie des polynômes à variables;** 1895.....

**ROUCHÉ (Eugène),** Membre de l'Institut, Professeur au Collège des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique. — **LEVEY (Lucien),** Répétiteur d'Analyse et Examinateur à l'École Polytechnique. — **Analyse infinitésimale à l'usage des candidats.** 2 volumes grand in-8 se vendant séparément:

- TOME I : *Calcul différentiel. Dérivées et différentielles de variables. Séries. Formules de Taylor. Courbes planes. Surfaces. Congruences. Complexes. Lignes tracées sur les surfaces.* Volume grand in-8 de viii-557 pages, avec 45 figures; 1903.....  
 TOME II : *Calcul intégral. Intégrales indéfinies et définies. Fonctions elliptiques. Équations différentielles et aux dérivées partielles. Calcul des variations.* Volume grand in-8 de vii-648 pages; 1903.....

# ANNALES

DE LA

## FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,  
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1903.

---

PARIS.

GAUTHIER-VILLARS,

IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE.

ED. PRIVAT,

IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

1903

(Ce Recueil paraît chaque trimestre.)

**Troisième fascicule.**



11271

11271

11271

11271

11271

11271

11271

11271

11271

11271

11271

11271

11271

11271

---

SUR LES

COURBES DE TRACTION DU CAOUTCHOUC VULCANISÉ,

PAR MM. H. BOUASSE ET Z. CARRIÈRE.

---

Nous devons préciser le but que nous avons poursuivi en étudiant le caoutchouc. Il ne peut entrer dans notre esprit d'étudier toutes les espèces de caoutchouc. Leur nombre est indéfini; elles peuvent différer par l'arbre qui fournit la gomme et le mode d'extraction, par la quantité de soufre introduit et par le procédé de vulcanisation. Nous serions d'abord amenés à caractériser ces espèces par des constantes, et c'est justement l'existence de ces constantes que nous discuterons et que l'expérience nous montrera de plus en plus douteuse.

Il ne nous est pas possible d'étudier *en général* les propriétés du caoutchouc, sans passer en revue les espèces et sans retomber, par conséquent, dans les difficultés précédentes. Nous nous limiterons donc à étudier *un échantillon de caoutchouc*, il est plus que probable que les autres caoutchoucs présenteraient qualitativement les mêmes phénomènes; mais ce n'est pas sûr, et d'ailleurs assez indifférent pour le but que nous poursuivons.

Nous considérons ce caoutchouc comme le substratum de certaines lois, comme possédant certaines propriétés caractéristiques que nous nous proposons de classer. Nous l'avons choisi, après un grand nombre de physiciens, comme sujet d'étude, parce que ces propriétés sont chez lui extraordinairement grossières et comme caricaturales; mais elles se retrouvent dans bien des corps à un moindre degré; et l'on peut espérer que des phénomènes, débrouillés dans ce cas extrême, pourront être plus facilement classés dans d'autres cas où ils ne sont plus aussi nettement tranchés.

Notre échantillon de caoutchouc a été fourni par une des premières usines de France comme ne contenant que de la gomme et du soufre: nous le possédons sous forme de cordes de 4<sup>mm</sup> de diamètre et nous en avons utilisé plusieurs kilogrammes. Sa densité est 0,985; sa surface est grise et contient un excès de soufre pulvérulent. Nous n'avons pas cherché à savoir d'où provenait la gomme .... par quel procédé on l'avait vulcanisée .... Nous n'aurions eu que de vaines précisions, sans intérêt, du moment que nous ne pouvions pas assister à toute la série des manipulations.

La plus élémentaire discrétion empêche de demander à un industriel de révéler ses secrets de fabrication, et ensuite de les publier, à *supposer qu'il les communique*. Si d'ailleurs on veut bien se mettre à notre point de vue, on comprendra que nous ne regrettons que médiocrement de n'avoir pu satisfaire notre curiosité.

Nous ne voulons pas donner comme résultat de notre travail que tel caoutchouc de telle origine, après telle préparation dans telles conditions, présente telles propriétés. Nous voulons conclure qu'il est possible de rencontrer des corps, *peu importe leur nom et leur composition*, qui présentent certains phénomènes que nous étudions et classons. Il y a des chances pour qu'on reproduise ces phénomènes en utilisant du caoutchouc; mais admettons, par impossible, que l'échantillon que nous avons étudié soit seul au monde à les présenter, ils n'en perdraient pas leur intérêt. Et, à supposer bien entendu que nos observations soient correctes, une théorie n'aurait pas le droit de les négliger.

Nous savons que de telles opinions sont encore considérées comme paradoxales : ce n'est pas une raison pour qu'elles soient erronées. Il peut sembler bizarre d'étudier un corps qui présente de si nombreuses et de si importantes applications, comme le substratum de certaines lois curieuses : mais chacun a son rôle dans la Science : il faut bien que quelques-uns s'occupent des phénomènes indépendamment de leur utilité.

#### APPAREIL POUR DÉCRIRE LES COURBES DE TRACTION.

La figure 1 représente schématiquement l'appareil que nous avons employé pour décrire les courbes de traction. Suivant un principe auquel on doit toujours se conformer, les charges sont imposées d'une manière continue et les longueurs sont observées par une méthode qui permet de les déterminer à tout instant.

Le principe de la mise en charge est le déroulement ou l'enroulement d'une chaînette de cuivre pesant à peu près exactement 50<sup>g</sup> par mètre. Elle est contenue dans le vase V, passe sur un cylindre de bois R, de 20<sup>cm</sup> de diamètre, glisse sur une gouttière *cb* et tombe dans le cornet du clinquant E. On peut, par des procédés mécaniques appropriés et qu'il est inutile de décrire, donner au cylindre R des mouvements de rotation uniformes dans un sens ou dans l'autre, changer instantanément ce sens, ou arrêter brusquement. Par un entraînement direct par poulies, ou en utilisant un entraînement par vis tangente et friction, on peut obtenir la mise en charge de 1<sup>m</sup> de chaîne en un nombre de secondes variant de 5 à 120. Tous les mètres, la chaîne porte un anneau de fil rouge.

On observe avec une lunette le passage de ces fils, et simultanément, dans la même lunette, on lit la position d'une règle en bois mince DC qui est suspendue à la corde de caoutchouc étudié : la longueur de la corde en expérience est ainsi

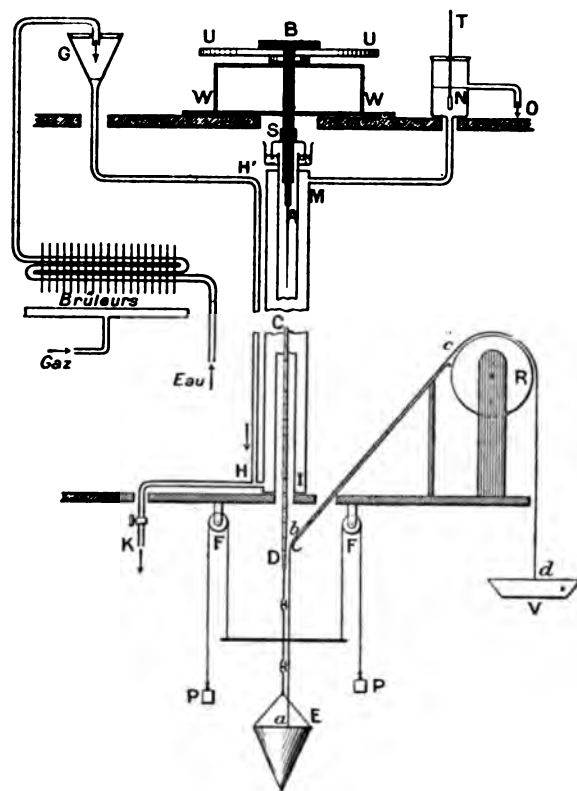


connue à  $\frac{1}{10}$  de millimètre près, approximation généralement plus que suffisante.

Le cornet E est équilibré par des contrepoids P rattachés par des fils passant sur des poulies d'aluminium très légères et très mobiles FF.

Après des efforts infructueux pour trouver un mode d'attache parfaitement correct, nous avons dû nous résigner à pincer les extrémités de la corde de caout-

Fig. 1.



chouc dans des pinces de bijoutier. Le serrage doit être considérable lorsqu'on veut pouvoir allonger de 6 ou 7 fois la longueur initiale sans que la corde échappe. Mais l'expérience montre qu'une fois desserrée la corde reprend bien son diamètre primitif et ne semble pas avoir souffert. Une des pinces (non représentées) est invariablement fixée à la pièce BA qui entre à frottement doux dans le tube servant d'axe au disque gradué UU. L'autre pince est reliée par un crochet à la règle CD. Pour mettre la corde en expérience, on la fixe à ses pinces, on introduit le tout par en haut après avoir accroché la règle. On peut aisément régler cette dernière en azimut grâce au disque UU. Nous avons d'ailleurs installé l'appareil comme il vient d'être dit, en vue d'expériences sur la torsion.

La pince et la règle que supporte toujours le caoutchouc pèsent ensemble  $61^g$  : nous désignerons cette charge par  $P_0$ .

Nous avons effectué des expériences à des températures autres que la température ordinaire.

Il est très difficile de maintenir à une température constante, même grossièrement, l'eau renfermée dans une enceinte de  $1^m,40$  de hauteur : il est à peu près impossible d'agiter, tant à cause des difficultés mécaniques à vaincre, qu'à cause des trépidations qui résulteraient de cette agitation.

D'ailleurs, le refroidissement et le réchauffement demanderaient un temps considérable. Nos expériences sont basées sur un principe tout différent.

La corde est entourée d'un tube de laiton de  $0^m,04$  de diamètre : un autre tube de  $0^m,06$  de diamètre coaxial au premier, forme avec lui une enceinte dans laquelle on fait circuler un courant d'eau chaude ou froide. L'eau arrive à la partie inférieure de l'enceinte par le tube GH et sort par le tube MN. Un robinet K permet la vidange : le trop plein s'écoule en O et est amené dans les égouts. La température de l'eau est prise par le thermomètre T. L'ensemble du tube HH' et des tubes concentriques formant l'enceinte est entouré d'une couche de corde d'amiante pour éviter un trop grand rayonnement extérieur.

Une chicane S, formée d'une gouttière circulaire remplie d'huile et d'un chapeau glissant à frottement sur l'axe du disque UU, empêche un courant d'air froid de s'établir autour du caoutchouc, sans gêner les mouvements de rotation.

Reste à chauffer l'eau qu'on enverra dans l'enceinte. Nous avons utilisé des appareils du commerce, robustes et bon marché, que l'on emploie aujourd'hui couramment. Avec un débit de plus de  $1^l$  à la minute, ils échauffent l'eau d'une quarantaine de degrés : en en mettant deux en série, nous avons obtenu un débit de plus de  $1^l$  par minute, avec un échauffement de  $70^{\circ}$  à  $80^{\circ}$ . Ils se composent essentiellement d'un tube de cuivre deux fois replié sur lui-même et entouré d'aillettes en cuivre : une rampe de brûleurs chauffe le tout. L'encombrement de ces appareils est très petit : ils sont longs d'une trentaine de centimètres : les ailettes ont  $0^m,07$  de diamètre. Pour que la température soit constante à  $1^{\circ}$  près, il faut régler la pression d'arrivée du gaz : on fait varier la température en modifiant le débit.

Les cordes employées ont généralement de  $0^m,15$  à  $0^m,30$  de longueur. Sans sortir du tube, elles s'allongent d'un peu plus de  $1^m$ . Le caoutchouc pouvant prendre jusqu'à 7 à 8 fois sa longueur primitive, dans quelques cas particuliers la corde a comme longueur initiale une douzaine de centimètres. Il y a avantage, tant au point de vue de la précision que de la définition des déformations subies, à prendre cette longueur aussi grande que possible.

On s'aperçoit immédiatement, rien qu'à regarder la corde d'un même paquet, que le diamètre n'est pas constant : cette circonstance augmente beaucoup la

difficulté des comparaisons numériques, d'autant plus que l'homogénéité de la matière à la surface et au centre est très imparfaite. Les expériences devant être le plus souvent exécutées sur des bouts différents pour avoir un sens, ce n'est que par leur répétition que l'on parvient à assurer certaines conclusions.

*Notations.* — Nous appellerons  $L_0$  la longueur initiale de la corde,  $L$  sa longueur actuelle. Nous poserons  $\Lambda = L : L_0$ .

Les charges seront données en mètres de chaîne : dire qu'un cycle est de  $n\pi$  signifiera que la variation de charge est de  $n$  fois le poids  $\pi$  de 1<sup>m</sup> de chaîne, soit sensiblement 50  $n$ -grammes.

La charge étant prise comme variable, nous appellerons amplitude  $l$  d'un cycle la différence entre les longueurs initiale et finale, avant et après l'imposition de la charge.

Toutes les courbes sont construites en portant les longueurs en abscisses et les charges en ordonnées.

A moins d'indications contraires, la charge croît proportionnellement au temps à raison de 1<sup>m</sup> en 27 secondes, soit approximativement 100<sup>e</sup> en 54 secondes.

Les longueurs  $L_0$ ,  $L$ ,  $l$  sont toujours données en dixièmes de millimètre.

Nous appelons  $T_0$  et  $T_1$  les temps écoulés à charge constante aux extrémités des cycles.

*Historique.* — L'historique de la question sera très bref, non que le nombre des gens qui ont tiré sur du caoutchouc ne soit considérable; mais ils se sont placés à un point de vue qui n'est pas le nôtre.

Le premier Mémoire qu'il vaille la peine de citer est celui de Villari (*Pogg. Ann.*, t. CXLIII, 1871).

L'auteur trace la courbe de traction du caoutchouc, mais, *comme tous ceux qui l'ont suivi*, les charges sont installées à la main, sans précautions spéciales. Il trouve un point d'inflexion.

Sa principale préoccupation est de calculer le module d'élasticité pour lequel il donne une définition inadmissible, à supposer qu'il ait la prétention d'exprimer par ce module un paramètre, constant ou variable peu importe, mais caractéristique de la longueur ou de la charge actuelle d'un caoutchouc donné. Nous reviendrons là-dessus dans un prochain Mémoire.

Imbert (*Thèse de Marseille*, 1880) allonge des lames de caoutchouc; sa technique n'est pas meilleure que celle de Villari. Il retrouve le point d'inflexion. Nous ne discuterons pas ici les conséquences qu'il tire de ses expériences.

Cantoue (*R. Istituto lombardo*, t. XXXI, 1898) décrit des cycles selon une technique tout aussi rudimentaire : il semble encore que son objectif principal soit le calcul du module d'élasticité.

Ainsi la forme générale des courbes de traction du caoutchouc est connue depuis longtemps; la technique a toujours été défectueuse.

On a mêlé à l'étude de ces courbes des considérations sur le module d'élasticité dont le moindre défaut est de ne pas avoir de sens, comme il ressortira à l'évidence du présent travail. Quand on se sera rendu compte de la variabilité extraordinaire des courbes avec la technique, on se demandera comment il a pu venir à l'idée de calculer le module d'élasticité d'après les propriétés de ces courbes.

Enfin, personne n'a étudié systématiquement comment les cycles se fixaient, comment la température intervenait sur cette fixation, ..., questions qui font l'objet principal de notre Mémoire.

#### RÉSULTAT DES EXPÉRIENCES.

1. *Allongement permanent.* — Nous avons cherché tout d'abord à nous rendre compte des charges que les cordes supportent et des allongements permanents qui peuvent en résulter. Les cordes se rompent toujours aux points d'attache. Les pinces fixent assez correctement la partie utilisée, mais diminuent la charge de rupture. En prenant le caoutchouc doublé dans un nœud coulant qui se serre automatiquement à mesure que la tension croît, on augmente la charge de rupture, mais la partie utilisée se trouve assez mal déterminée. On tourne cette difficulté en mesurant les allongements entre deux repères tracés à l'encre sur la surface du caoutchouc. Nous n'avons pas pu employer généralement cette technique, parce qu'elle exige deux expérimentateurs, est plus compliquée que celle que nous avons précédemment exposée et ne peut pas être employée quand on veut élever la température du caoutchouc. D'ailleurs les courbes obtenues avec l'une ou l'autre technique ne diffèrent pas sensiblement.

Chaque expérience est faite sur un caoutchouc différent :

*Première série :* la charge est maintenue 24 heures.

Charges.	200 $\kappa$ .	500 $\kappa$ .	1000 $\kappa$ .	1500 $\kappa$ .
$\Lambda_1$ .....	1,268	2,600	4,744	6,624
$\Lambda_2$ .....	1,012	1,016	1,036	1,044
$\Lambda_3$ .....	1,008	1,012	1,020	1,030

$\Lambda_1$  est la longueur un peu avant la décharge;  $\Lambda_2$  est la longueur 10 minutes après la décharge;  $\Lambda_3$  24 heures après, et  $\Lambda_4$  7 jours après :

*Deuxième série :* la charge est maintenue 2 jours.

Charges.	200 $\kappa$ .	500 $\kappa$ .	1000 $\kappa$ .	1500 $\kappa$ .
$\Lambda_1$ .....	1,332	3,100	5,544	7,184
$\Lambda_2$ .....	1,028	1,068	1,104	1,112
$\Lambda_3$ .....	1,012	1,030	1,056	1,068
$\Lambda_4$ .....	1,008	1,018	1,044	1,056

*Troisième série : la charge est maintenue 10 jours.*

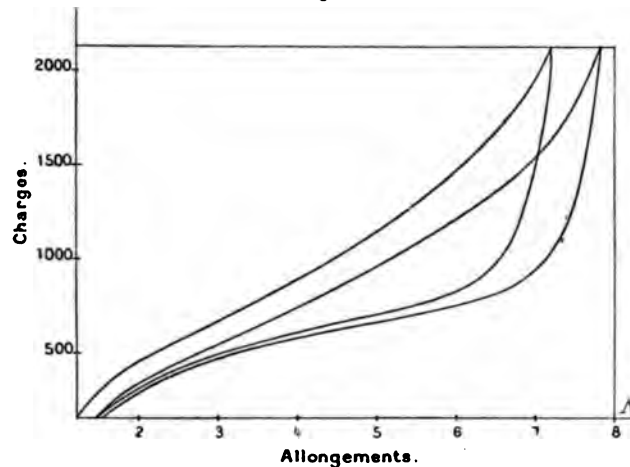
Charges.	200g.	500g.	1000g.	1500g.
$\Lambda_1$ .....	1,310	2,912	5,804	7,258
$\Lambda_2$ .....	1,036	1,104	1,160	1,160
$\Lambda_3$ .....	1,020	1,052	1,092	1,108

Ces expériences montrent que l'allongement, que l'on est tenté d'appeler permanent, croît avec la charge et avec la durée d'application : mais la question est de savoir s'il ne diminue presque indéfiniment en maintenant le fil assez longtemps sous charge nulle.

La corde de 4<sup>mm</sup> que nous avons employée (pure gomme et soufre) supporte encore des charges plus considérables; nous sommes parvenus à lui faire subir, pendant quelques minutes, 2700g, qui produisaient une longueur  $\Lambda = 8,2$ .

2. *Courbe de charge et de décharge continuées jusqu'aux plus fortes charges.* — Nous avons tracé, d'après la technique précédente, quelques courbes de charge et de décharge. La figure 2 représente deux parcours complets entre  $3\pi$

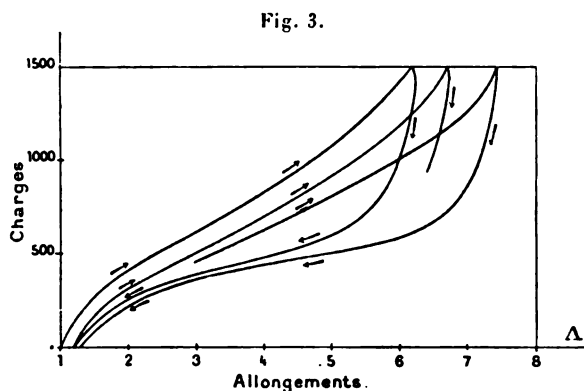
Fig. 2.



et  $43\pi$ , soit sensiblement entre 150g et 2150g. L'allure de ces courbes est tout à fait caractéristique.

On remarquera à quel point elles se relèvent pour les fortes charges. Le rapport des valeurs maxima et minima des allongements qui correspondent à un même accroissement de charge atteint 6 sur la courbe de charge du second cycle. Au début de la courbe de décharge, il y a encore allongement pour le premier cycle; la courbe est sensiblement verticale pour le second.

3. *Mode de fixation des cycles de traction d'amplitude constante.* — Cycles de  $30\pi$ , parcourus sans arrêt aux extrémités  $T_0 = T_1 = 0$ . On trace 8 courbes



complètes. La figure 3 représente la première, une partie de la seconde et une partie de la huitième.

*Amplitudes.* —  $\Lambda_0 = 1$  au début du premier cycle. Voici les  $\Lambda_1$  aux extrémités des divers cycles et les  $\Lambda_0$  de retour :

$\Lambda_1$ .....	6,16	6,68	6,90	7,04	7,17	7,27	7,36	7,43
Différences.	52	22	14	13	10	9	7	
$\Lambda_0$ .....	1,20	1,23	1,25	1,25	1,28	1,28	1,28	1,28

L'amplitude des cycles croît d'abord beaucoup, puis de moins en moins et tend vers une limite.

Elle n'est pratiquement atteinte qu'après le huitième cycle. Ce résultat rentre dans la propriété générale d'accommodation. On remarquera que la limite inférieure est à peu près immédiatement atteinte et que le cycle ne s'allonge que par un déplacement de son extrémité supérieure. La charge de  $30\pi$  est considérable pour la corde employée et l'allonge de plus de six fois sa longueur initiale.

*Inclinaison au début de la courbe de charge.* —  $L_0 = 1470$ . On donne ci-dessous l'allongement pour les deux premiers mètres de chaîne :

173	214	222	236	239	230	250	266
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

A mesure que le numéro d'ordre du cycle croît, la courbe est au début de plus en plus inclinée.

*Tangente d'inflexion sur la courbe d'aller.* — Elle a lieu pour  $10\pi$  environ. L'allongement est alors par mètre, pour les cycles successifs,

351	390	403	410	416	422	424	428
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

La tangente d'inflexion est de plus en plus inclinée.

*Inclinaison à la fin de la courbe de charge.* — Voici les allongements pour les deux derniers mètres :

319    246    225    223    221    222    221    214

Ainsi, bien que l'amplitude croisse à mesure que le numéro d'ordre du cycle augmente, la corde est de moins en moins déformable pour les charges finales. Ce fait est d'accord avec le suivant.

*Inclinaison du début de la courbe de décharge.* — Si l'on maintient la charge constante à partir d'un point quelconque de la courbe de charge, il y a un allongement dont la vitesse, d'abord très grande, diminue rapidement. Si, au lieu de maintenir la charge constante, nous la diminuons, il y a simultanément une tendance à l'allongement, du fait que la longueur actuelle ne correspond pas d'une manière stable à la charge actuelle, et une tendance au raccourcissement du fait que la charge diminue. La première tendance l'emporte toujours au voisinage de l'extrémité du cycle : mais l'allongement peut cesser presque immédiatement. On n'observe que l'effet total produit par la décharge de  $\pi$ .

Pour le premier et le deuxième cycle, il y a allongement très net quand on décharge de  $\pi$ ; pour le troisième, le fil a la même longueur à l'extrémité de la courbe de charge et après décharge de  $\pi$ ; au delà du sixième, il y a raccourcissement sensible.

*Tangente d'inflexion sur les courbes de décharge.* — L'inflexion a lieu pour une charge égale à  $9\pi$  : le raccourcissement est, par mètre de chaîne :

822    1012    1015    1055    1115    1093    1124    1137

La tangente d'inflexion est de plus en plus inclinée.

*Inclinaison à la fin de la courbe de décharge.* — Voici les raccourcissements pour les deux derniers mètres de chaîne :

342    360    352    370    410    376    381    385

La variation de l'inclinaison de retour est faible.

Enfin, voici, pour fixer les idées, le premier cycle complet : on donne les allongements produits par l'adjonction de  $2\pi$  :

Courbe de charge.....	{	173	257	382	558	694	736	733	673
	{	624	582	535	507	444	377	319	
Courbe de décharge.....	{	94	83	78	99	124	162	228	370
	{	734	1156	1644	1182	718	472	342	

Fac. de T., 2<sup>e</sup> S., V.

Pour le caoutchouc, la déformation permanente est relativement faible. Il ne faut pas se laisser tromper par la grandeur des  $\Lambda_0$  : ils indiquent un allongement du quart de la longueur, mais cet allongement est loin d'être tout entier permanent. En abandonnant la corde longtemps sous charge nulle, elle n'aurait conservé qu'un allongement permanent très inférieur à  $\frac{1}{10}$  (voir n° 1).

L'expérience précédente montre à quel point les parcours réagissent les uns sur les autres; donc il y a une transformation interne plus ou moins permanente du caoutchouc qui résulte de la déformation.

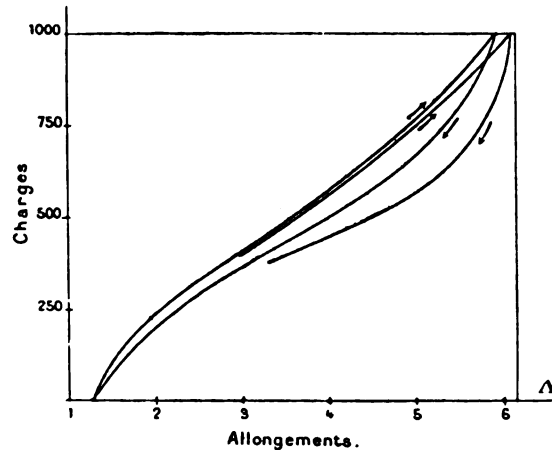
4. *Cycles fixés. Influence de la vitesse de charge et de décharge.* — Les expériences sont croisées sur un même fil : la vitesse est constante dans chaque série et variable d'une série à l'autre. Les cycles sont de  $20\pi$ ; la vitesse  $V$  est de 1<sup>m</sup> en 4<sup>s</sup>, 5; la vitesse  $v$  est de 1<sup>m</sup> en 68<sup>s</sup>.  $T_0 = T_1 = 0$ .

Voici les amplitudes successives mesurées sur la courbe de charge :

V.....	7980	8080	8175	8250	8290
v.....	8678	8791			
V.....	8709	8630	8660	8660	
v.....	9031	9067			
V.....	8935				

Prenons comme abscisses les numéros d'ordre des cycles et comme ordonnées les amplitudes. Tous les points  $v$  sont sur une courbe, tous les points  $V$  sur une courbe plus basse. Exception faite pour les cycles d'amplitude 8709 et 8935 qui sont les premiers des séries  $V$  : les points correspondants sont trop hauts. La distance des courbes est 300 en moyenne. Donc, toutes choses égales d'ailleurs, l'amplitude diminue quand la vitesse croît.

Fig. 4.



La forme des cycles est également modifiée : la figure 4 représente à droite un



cycle à vitesse  $V$ ; à gauche, un cycle à vitesse  $v$ . L'épaisseur du dernier cycle est beaucoup plus petite que l'épaisseur du premier. Par exemple, pour le cycle ( $V$ ) d'amplitude 8290, la différence maxima des abscisses (allongements) qui correspondent à une même ordonnée (à une même charge) est 850; pour le cycle ( $V$ ) d'amplitude 8660, elle est 840. Pour les cycles ( $v$ ) d'amplitudes 8791 et 9067, elle est au contraire 1746 et 1831. La différence entre les cycles porte principalement sur les courbes de retour.

Voici, pour fixer les idées, les courbes qui correspondent au cycle ( $V$ ) d'amplitude 8660 et au cycle ( $v$ ) d'amplitude 9067.  $L_0 = 1870$ , on donne les allongements produits par l'adjonction de  $2\pi$ :

$V.$	Charge.....	370	650	940	1140	1190	1110	1090	860	760	640
	Décharge.....	310	440	680	990	1190	1380	1230	1090	780	570
$v.$	Charge....	421	688	972	1218	1208	1121	1010	900	800	729
	Décharge.....	118	302	442	770	1325	1819	1769	1187	850	528

5. *Fixation des cycles : d'une série à l'autre on prend  $T_0$  comme variable.*

— On fixe des cycles de  $15\pi$  sans arrêt au bout ( $T_1 = 0$ ), mais avec un arrêt  $T_0$  variable avec le fil. On appelle 1000 l'allongement sur la première courbe de charge; on donne les raccourcissements et les allongements pour les autres parcours en fonction de celui-là. Voici le résultat des expériences :

$T_0 = 0$ .....	Allongements.....	1000	1017	1028	1039	1043
	Raccourcissements..	970	1010	1027	1038	1043
$T_0 = 30$ minutes.	Allongements.....	1000	1023	1036	1044	1051
	Raccourcissements..	968	1011	1023	1035	1039
$T_0 = 1$ heure...	Allongements.....	1000	1025	1037	1043	1051
	Raccourcissements..	969	1011	1023	1028	1037
$T_0 = 24$ heures..	Allongements.....	1000	1020	1032	1039	1046
	Raccourcissements..	968	1004	1016	1025	1033

Voici maintenant les moyennes des parcours aller et des parcours retour :

$T_0 = 0$ .....	985	1014	1028	1039	1043
$T_0 = 30$ minutes.....	984	1017	1030	1040	1045
$T_0 = 1$ heure.....	985	1018	1030	1035	1044
$T_0 = 24$ heures.....	984	1012	1024	1032	1040

Ces moyennes sont à peu près les mêmes pour tous les fils. Ce résultat fort remarquable prouve à quel point la transformation qui résulte d'un parcours est stable, et à quel point aussi le fait que le fil a supporté une fois une certaine charge n'amène pas un état déterminé de la matière, la transformation continuant à se produire, à mesure que croît le nombre des parcours, quel que soit l'intervalle qui les sépare.

6. *Cycles fixés.* On laisse le fil se reposer un certain temps sous charge nulle; on fixe à nouveau le même système de cycles. — Voici le résultat des expériences pour deux fils et des cycles de  $15\pi$  et de  $8\pi$ .

*Cycles de  $15\pi$ .* — Ils sont parcourus sans arrêt aux extrémités du cycle. Après quatre parcours, on laisse se reposer le fil sous charge nulle, en le retirant de l'appareil. On recommence la fixation au bout d'un temps T. Le Tableau suivant donne l'allongement sur la courbe de charge et le raccourcissement sur la courbe de décharge, par rapport à l'allongement sur la courbe de charge du premier cycle de la première série que nous appelons 1000 :

		Charge.....	1000	1015	1029	103
		Décharge.....	962	1009	1027	1038
T = 1 jour..	{	Charge.....	1040	1035	1042	1047
		Décharge.....	1014	1033	1039	1046
T = 11 jours.	{	Charge.....	1053	1048	1060	1062
		Décharge.....	1026	1045	1059	1062
T = 8 jours.	{	Charge.....	1075	1066	1074	1077
		Décharge.....	1051	1064	1072	1075

La fixation se traduit par la tendance à l'égalité des allongements sur la courbe de charge et des raccourcissements sur la courbe de décharge. La transformation de la matière se continue même lorsque le caoutchouc a subi seize parcours. On peut se demander ce que serait devenu l'allongement si les seize parcours avaient été faits d'affilée : il semble bien qu'il ne différerait pas beaucoup de celui que l'on a obtenu en espaçant les séries. Assurément, la moyenne des allongements de charge et de décharge pour le premier parcours de chaque série est plus petite que la même moyenne pour le dernier parcours de la série précédente;  $1027 < 1038$ ,  $1040 < 1046$ ,  $1063 < 1075$ . Mais, outre que ces différences sont petites, les courbes qui représentent ces moyennes en fonction du numéro d'ordre du parcours sont assez rapidement montantes au début de chacune des séries, et faiblement à la fin.

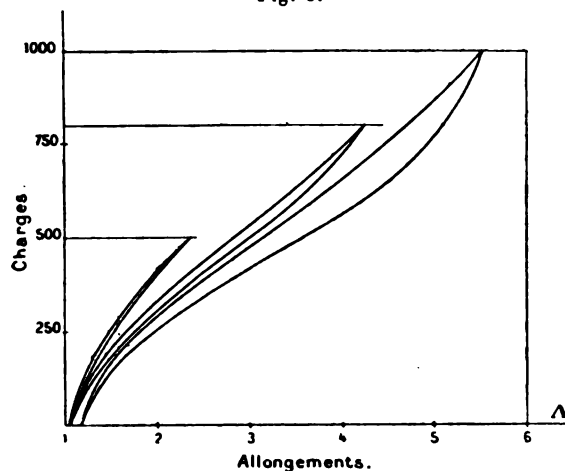
*Cycles de  $8\pi$ .* — Même technique :

		Charge.....	1000	997	1011	1015
		Décharge.....	951	992	1007	1011
T = 1 jour..	{	Charge.....	1041	1023	1026	1031
		Décharge.....	999	1013	1024	1026
T = 11 jours.	{	Charge.....	1040	1035	1038	1045
		Décharge.....	1000	1026	1036	1043
T = 8 jours.	{	Charge.....	1051	1035	1046	1048
		Décharge.....	1010	1031	1044	1046

Mêmes conclusions.

7. *Cycles fixés, d'amplitudes variables, ayant une extrémité commune. Cycles décrits entre 0 et  $n\pi$ .* — Nous allons d'abord fixer les cycles sur des fils différents qui n'ont pas antérieurement servi. La figure 5 montre le résultat de

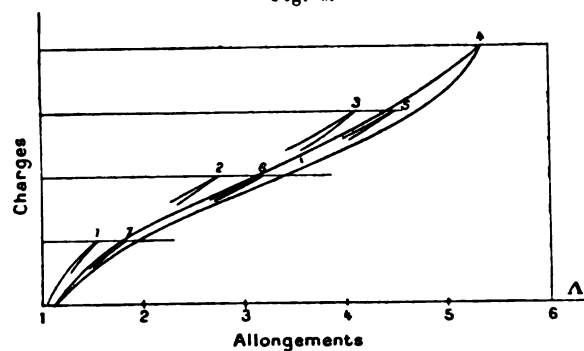
Fig. 5.



l'expérience. Les cordes ne sont jamais absolument comparables, mais les différences sont si grandes qu'on ne peut pas les imputer aux inégalités inévitables. Quand on fixe un parcours étendu, les parties du cycle qui correspondent aux faibles charges se trouvent notablement plus voisines de l'horizontalité que les parties correspondantes des petits cycles. Cependant, les déformations permanentes restent toujours faibles.

Le résultat est plus intéressant quand les cycles sont fixés sur la même corde, parce qu'on peut faire plus sûrement les comparaisons numériques (fig. 6).

Fig. 6.



On a fixé successivement sur une corde neuve des cycles de  $5\pi$ ,  $10\pi$ ,  $15\pi$ ,  $20\pi$ ,  $15\pi$ ,  $10\pi$ ,  $5\pi$ . On n'a tracé sur la figure que le cycle  $20\pi$  en entier, et l'on

s'est contenté des extrémités des autres pour éviter un encombrement de lignes inutiles.

Comme il est à peu près certain qu'un petit cycle fixé n'influe pas sensiblement sur la forme fixée d'un grand cycle décrit postérieurement, les cycles 1, 2, 3, 4 se disposent dans la figure 5 comme ils le faisaient pour des cordes différentes dans la figure 4. Mais il n'en est plus de même des cycles 5, 6, 7. L'influence du grand allongement et de la transformation qui en résulte se fait sentir : les parcours sont beaucoup plus inclinés.

Voici les amplitudes pour les divers cycles et leurs différences :

	Cycles de			
	5 $\pi$ .	10 $\pi$ .	15 $\pi$ .	20 $\pi$ .
Croissants.....	789	2623	4739	6711
Décroissants.....	1055	3176	5238	
Différences.....	334	447	501	

Si la différence absolue des amplitudes est plus grande pour les cycles de 15  $\pi$  que pour ceux de 5  $\pi$ , la différence relative est, au contraire, plus grande pour ces derniers.

Les cycles 5, 6, 7 sont plus voisins de l'horizontalité que les cycles correspondants 3, 2, 1; mais ils sont aussi plus minces; voici les différences maxima des abscisses correspondant à une même charge :

	Cycles de			
	5 $\pi$ .	10 $\pi$ .	15 $\pi$ .	20 $\pi$ .
Croissants.....	61	167	286	533
Décroissants.....	61	148	236	

8. *Cycles fixés d'amplitude variable, ayant une extrémité commune, décrits entre 20  $\pi$  et  $n\pi$ .* — On va d'une traite à la charge de 20  $\pi$  et l'on fixe des parcours entre cette charge et les charges 15  $\pi$ , 10  $\pi$ , 5  $\pi$  et 0. Chaque expérience est faite sur une corde neuve.

$L_0 = 1870$  pour tous les fils. Voici leurs longueurs aux divers passages par la charge 20  $\pi$ , c'est-à-dire aux extrémités des quatre cycles qui ont été décrits. On donne de plus la différence des longueurs pour le premier et le quatrième passage :

Cycle 20-0.	7367	7911	8131	8266	899
Cycle 20-5.	7474	7960	8132	8251	778
Cycle 20-10.	7171	7330	7411	7475	304
Cycle 20-15.	7402	7557	7637	7688	286

Si les cordes étaient identiques, les nombres de la première colonne seraient égaux; ils diffèrent peu.

Ce Tableau montre que les cycles se fixent inégalement vite et d'autant plus vite qu'ils sont plus petits : la limite à laquelle tend la longueur est elle-même d'autant plus petite que le cycle est plus petit. Il ne faut pas oublier que le petit cycle correspond tout entier aux charges les plus grandes. Il était naturel que le cycle 0-5 se fixât plus vite que le cycle 0-20; il l'est beaucoup moins que le cycle 15-20 se fixe plus vite que le cycle 0-20. On aurait pu croire qu'en revenant aux faibles charges le fil se reposerait et retournerait aux grandes avec un allongement moins augmenté.

Nous trouvons ici un premier exemple d'un fait général qui se présentera sous bien des formes. Une variation de la charge facilite toujours l'allongement. Nous verrons qu'en un temps donné la corde peut s'allonger moins sous une charge constante égale à  $n\pi$  que sous une charge variable entre 0 et  $n\pi$  (comparer au n° 1 du Mémoire *Sur la réactivité du caoutchouc*).

Comparons maintenant les inclinaisons moyennes des parties correspondantes des cycles : on donne dans le Tableau suivant la moyenne des allongements sur les courbes de charge et de décharge des cycles fixés, entre  $20\pi$ ,  $15\pi$ ,  $10\pi$  et  $5\pi$  :

Allongement moyen entre	Cycle 20-0.	Cycle 20-5.	Cycle 20-10.	Cycle 20-15.
20-15.....	1507	1461	1229	984
15-10.....	2486	2384	2089	
10-5.....	2520	2439		
5-0.....	1378			

Les nombres diminuent de gauche à droite sur une même ligne. A mesure que le cycle est plus petit, il est moins horizontal, quelles que soient les parties correspondantes des cycles que l'on compare.

9. *Comparaison entre un grand cycle fixé et des cycles fixés de petite amplitude compris dans le grand.* — On commence par fixer un cycle de  $24\pi$  (I); puis, sur le même fil, on fixe successivement des cycles de  $6\pi$  ayant pour extrémités inférieures 0,  $6\pi$ ,  $12\pi$ ,  $18\pi$  (série I),  $12\pi$ ,  $6\pi$ , 0 (série II). On fixe enfin à nouveau le cycle de  $24\pi$  (II). On compare les inclinaisons et les positions des petits cycles aux inclinaisons et aux positions des parties correspondantes des grands. On donne dans le Tableau suivant les allongements pour les cycles I et II entre 0 et  $6\pi$ ,  $6\pi$  et  $12\pi$ , etc. sur les courbes de charge et de décharge et les amplitudes des petits cycles correspondants :

Allongements entre	Cycle I.		Cycle II.		Série I.		Série II.	
	Charge.	Décharge.	Charge.	Décharge.				
0 et $6\pi$ ..	1465	1801	1553	1844	1489	(90)	1545	(130)
$6\pi$ et $12\pi$ ..	2799	3459	2911	3760	2623	(1837)	2717	(1967)
$12\pi$ et $18\pi$ ..	2350	2368	2475	2430	2037	(4835)	1727	(6049)
$18\pi$ et $24\pi$ ..	1747	712	1846	744	678	(8151)		

La corde avait une longueur  $L_0 = 1700$  : on donne entre parenthèses la position des extrémités inférieures des deux séries de cycles fixés. Enfin, voici pour les grands cycles fixés les allongements qui correspondent aux charges 0,  $6\pi$ ,  $12\pi$ ,  $18\pi$ ,  $24\pi$  sur les courbes de charge et de décharge :

Cycle I. .	100	1565	4364	6714	8461	7749	5381	1922	121
Cycle II..	159	1712	4623	7098	8944	8200	5770	2010	166

Comparons d'abord entre eux les petits cycles des séries I et II. Les premiers ne diffèrent des seconds que par rapport aux opérations qui les ont précédés. On pourrait croire qu'après la fixation d'un cycle de 0 à  $24\pi$ , c'est-à-dire après que le fil a déjà subi les plus fortes charges, le fait de fixer le petit cycle  $18\pi$ - $24\pi$  modifie assez peu le parcours fixé  $12\pi$ - $18\pi$ . Cependant, l'origine de ce cycle dans la première série est 4835 et son amplitude 2037; l'origine du même cycle de la série II est 6049 et son amplitude est 1727. *La différence entre ces cycles est de même nature et du même ordre qu'entre les parties correspondantes des courbes d'aller et de retour* : c'est ce que montre immédiatement le Tableau suivant.

On donne les cycles rapportés à la même origine :

Série I. {	Charge.....	0	407	780	1124	1468	1765	2037
	Décharge...	0	463	873	1234	1548	1814	
Série II. {	Charge.....	0	362	672	990	1262	1512	1727
	Décharge...	0	409	812	1111	1368	1579	

Le cycle de la série II forme un croissant plus incurvé que l'autre, de même que la courbe de décharge est, pour les mêmes charges, plus incurvée que la courbe de charge.

Les cycles ne semblent pas tendre l'un vers l'autre, autant qu'il est possible de juger d'une pareille question. Voici quelles sont les longueurs pour  $18\pi$ , quand on fixe le cycle de la série I et quand on fixe le cycle de la série II :

Série I.....	6840	6855	6874	6870
Série II.....	8253	7782	7767	7769

Le déplacement est très rapide d'abord, mais ensuite si lent qu'il est impossible de prévoir que les cycles puissent venir se confondre par la répétition.

Nous arrivons donc fatalement à cette conclusion : entre deux charges données, *il existe une infinité de cycles fixés qui dépendent des opérations antérieures*; et cela alors même que, pendant les opérations qui séparent les deux fixations, la corde n'a pas subi des charges plus fortes que celles qu'elle a subies avant la première fixation. On comprend l'importance de cette dernière proposition. Si, entre les deux fixations, le fil subissait des charges qu'il n'a jamais subies, on pourrait dire que les différences tiennent à une modification permanente due à ces charges, à une sorte d'*écrouissage* qui, une fois acquis, ne peut être supprimé par d'autres déformations. Il n'en est pas de même ici; les cycles de la série I, où l'on procède par déplacement vers la droite, sont toujours différents des cycles de la série II, où l'on procède par déplacement vers la gauche, alors même qu'on recommence plusieurs fois la série entière des opérations.

Il ne faudrait pas croire que les différences constatées tiennent à un mode incorrect de comparaison. Il suffit de construire une courbe avec les amplitudes moyennes des petits cycles fixés en ordonnées et les *allongements* qui correspondent à l'une de leurs extrémités en abscisses, pour voir qu'il existe encore une différence considérable entre les séries I et II. Les points obtenus, comme il vient d'être dit, se placent sur deux courbes nettement différentes.

Comparons maintenant les petits cycles aux parties correspondantes des grands : nous constaterons que les petits cycles sont toujours plus redressés, soit qu'on fasse la comparaison entre les mêmes charges, soit qu'on la fasse entre les mêmes allongements.

**10. Courbes de traction décrites avec arrêts intermédiaires.** — On a réalisé deux vitesses de charge : V correspond au passage de 1<sup>m</sup> de chaîne en 2<sup>s</sup>,35; v au passage de 1<sup>m</sup> de chaîne en 92<sup>s</sup>. On décrit des cycles de  $20\pi$ . Avec la première vitesse, il faut 94<sup>s</sup> pour la charge et la décharge; avec la deuxième, il faut 61<sup>m</sup>20<sup>s</sup>. On s'arrange, au moyen de huit arrêts égaux, de manière que l'opération à grande vitesse dure exactement le même temps que l'opération à petite vitesse. Ces arrêts sont donc de 7 minutes et demie environ.

Ils sont disposés de telle sorte que, pour tous les parcours,  $\int P dt$  soit le même : il suffit pour cela qu'ils aient lieu pour  $2,5\pi$ ;  $7,5\pi$ ;  $12,5\pi$  et  $17,5\pi$ . Ainsi, dans le parcours à grande vitesse,  $\frac{1}{8}$  du temps total se passe, par exemple, à la charge de 7<sup>m</sup>,5; dans le parcours à petite vitesse, ce même temps se répartit régulièrement entre des charges variant linéairement en fonction du temps entre 5<sup>m</sup> et 10<sup>m</sup> de chaîne.

On compare les parcours ainsi obtenus. On donne, dans le Tableau suivant,

les allongements dans le parcours sans arrêt  $v$  pour les charges qui ont été indiquées ci-dessus; au-dessous, on donne, dans le parcours avec arrêt, les allongements pour les mêmes charges au commencement et à la fin de l'arrêt :

*Courbe de charge.*

$v \dots$	579	2167	4822	6762
$V \dots$	535-569	2352-2529	4730-4849	6659-6851

*Courbe de décharge.*

$v \dots$	692	2653	5309	7104
$V \dots$	661-792	2602-2720	5230-5300	7033-7000

Ainsi, autant qu'il est possible de l'espérer dans de telles expériences, les deux courbes chevauchent l'une sur l'autre, de manière que la petite horizontale à charge constante se trouve précisément sur la courbe décrite à petite vitesse uniforme. L'abscisse de la courbe  $v$  est intermédiaire entre les abscisses de la courbe  $V$  qui correspondent à la même charge. Exception seulement au début des courbes de charge et de décharge et encore cette exception tient à ce que le cycle n'est jamais absolument fixé, et aussi qu'il faut un certain temps pour changer les vitesses.

Les deux dernières lignes du Tableau doivent être lues de droite à gauche. Donc, pendant le premier arrêt ( $17,5\pi$ ), il y a un allongement consécutif à l'arrêt. Pour les autres arrêts, il y a raccourcissement. Ce sont des phénomènes tout à fait analogues à ceux que l'un de nous a trouvés pour les courbes de torsion des fils métalliques. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces phénomènes.

Cette expérience a une grande importance théorique. On est toujours tenté d'exagérer l'importance des perturbations, des petites irrégularités dans la vitesse de charge, etc. C'est un moyen commode pour rejeter sur l'inévitable les irrégularités de ses expériences. Or, on ne peut imaginer un dérèglement plus systématique que le précédent, et l'expérience prouve que son effet total est à peu près négligeable; le parcours conserve, en somme, même forme et même amplitude. Voici, par exemple, les amplitudes de quatre parcours; le premier, le second et le quatrième sont à la vitesse  $v$ , le troisième est à la vitesse  $V$  :

7230	7255	7269	7329
------	------	------	------

La suite régulière aurait donné, pour le quatrième, une amplitude voisine de 7283; la différence est de 46, soit 1:160. Mais le croisement n'est pas parfait; car il faut un certain temps pour changer les vitesses. De plus, l'influence des irrégularités de charge serait de moins en moins grande, à mesure que les arrêts



deviendraient plus courts et se répartiraient sur la courbe entière. On peut dire que leur action est rigoureusement nulle.

PARCOURS APRÈS RECUIT ET A TEMPÉRATURES ÉLEVÉES.

**11. Phénomènes entre 100° et 150°.** — L'expérience la plus grossière prouve que le caoutchouc se transforme considérablement au voisinage de 150°. Nous avons tenu à savoir quels sont les phénomènes, l'expérience ayant prouvé qu'ils restent analogues à des températures plus basses. Rendons-nous compte de ce que deviennent les propriétés mécaniques générales.

Le fil est placé dans une étuve sous charge faible; on le laisse prendre la température ambiante pendant 15 minutes; on charge alors d'un poids connu et l'on détermine la vitesse d'allongement sous charge constante. Elle diminue beaucoup moins vite qu'elle ne fait à basse température. Toutes choses égales d'ailleurs, elle augmente plus vite que la charge et croît très rapidement avec la température.

Pour avoir une idée de la variation de l'élasticité, on recommence l'expérience précédente; mais, à des intervalles réguliers, on supprime et l'on remet 100<sup>g</sup>: on détermine l'amplitude du cycle ainsi décrit. On fait la même expérience à froid sur un autre fil et l'on compare. Voici, pour 140° et pour des charges totales P, les rapports R des allongements à chaud et à froid quand l'expérience a été réalisée plusieurs fois,

$$P = 100^g, \quad R = 1,28; \quad P = 200^g, \quad R = 1,54; \quad P = 300^g, \quad R = 2,00.$$

Ainsi, la transformation de la matière entraîne une diminution d'élasticité.

Il y a plus, à mesure que le fil s'allonge à chaud par l'effet de la tension, l'allongement et le raccourcissement pour une variation donnée de charge augmentent beaucoup plus vite que ne le veut la variation de section à supposer invariables les propriétés de la matière.

Enfin, comme nous l'avons déjà dit, il y a un allongement permanent. Il dépend de la charge et du temps que le fil est maintenu dans l'étuve. En 30 minutes sous 300<sup>g</sup> à 140°, il atteint, par exemple, les deux tiers de sa longueur initiale. Dans les mêmes conditions, sous 300<sup>g</sup>, la longueur du fil était 3,8 fois la longueur initiale. L'allongement élastique était donc encore plus de 3 fois l'allongement permanent.

L'expérience suivante montre que la matière se transforme par le fait, non seulement d'une température élevée, mais encore d'un allongement à cette température.

Plaçons le fil dans l'étuve, imposons-lui un certain allongement invariable et

déterminons comment varient les tensions en fonction du temps. Elles diminuent d'abord rapidement, puis de plus en plus lentement. Mais voici qui est plus curieux.

A mesure qu'on part d'un allongement plus grand, le diamètre du fil est plus petit. Considérons l'instant où pour tous les fils, inégalement allongés au début, la tension est la même. Si la matière qui les forme était aussi la même, la variation de tension serait plus rapide pour le fil d'abord le plus allongé, puisque son diamètre est plus petit : or, c'est le contraire qu'on observe. Donc le fait de s'allonger à haute température transforme la matière de manière à la rendre plus apte à supporter des charges. Par exemple, à  $143^{\circ}$ , si la tension initiale est telle que le fil supporte au début  $100^{\text{g}}$ , en moins de 8 minutes la tension passe de  $100^{\text{g}}$  à  $50^{\text{g}}$ . Si la tension initiale est telle que le fil supporte au début  $400^{\text{g}}$ , il faut 45 minutes pour que la tension passe de  $100^{\text{g}}$  à  $50^{\text{g}}$ . Tandis que, dans le premier cas, on arrive en 45 minutes à la tension de  $10^{\text{g}}$ , on n'y arrive jamais si la tension initiale est  $400^{\text{g}}$ ; le fil a le temps de se durcir.

Il est difficile de préciser la nature des transformations éprouvées à haute température : la matière devient plus visqueuse, mais peu à peu le soufre en excès s'incorpore au caoutchouc, qui devient dur et cassant. La coupure du fil n'est plus collante.

**12. Effet d'un recuit entre  $100^{\circ}$  et  $150^{\circ}$ . — Influence de la durée du recuit.** — Les fils sont préparés par 5 cycles de  $5\pi$  : on les porte dans l'étuve à  $148^{\circ}$ , on les maintient un temps variable et l'on recommence à décrire 5 cycles de  $5\pi$ , 4 minutes après leur sortie de l'étuve. On compare les amplitudes  $l$  et  $l'$  des derniers cycles des deux séries :

	Durée du recuit				
	0 <sup>h</sup> , 5.	1 <sup>h</sup> .	2 <sup>h</sup> .	4 <sup>h</sup> .	23 <sup>h</sup> .
$(l' - l) : l$ .....	0,36	0,09	-0,26	-0,57	-0,81

Les cordes deviennent de plus en plus noires à mesure qu'elles séjournent davantage dans l'étuve. La surface diffère de l'intérieur, elle semble solidifiée. Après un séjour de 23 heures, la corde est gercée et fragile. On s'explique ainsi aisément le résultat obtenu pour les amplitudes.

**Influence du temps écoulé depuis la sortie de l'étuve. — Étuve à  $149^{\circ}$ .** Même préparation. Durée du recuit, 30 minutes :

	Temps après la sortie de l'étuve					
	0 <sup>h</sup> .	0 <sup>h</sup> , 5.	1 <sup>h</sup> .	2 <sup>h</sup> .	24 <sup>h</sup> .	48 <sup>h</sup> .
$(l' - l) : l$ .....	0,35	0,33	0,31	0,27	0,08	0,08

Donc, l'état produit par le recuit, même à haute température, n'est pas permanent; une transformation se produit ensuite, qui dure des heures. La matière tend probablement vers un état limite.

*Influence de l'amplitude du cycle sur l'effet du recuit.* — Durée uniforme du recuit, 32 minutes. La corde est portée dans l'étuve 3 minutes après la sortie de l'appareil d'essai et refroidie pendant 57 minutes avant le second essai. On décrit 5 fois le cycle pour le fixer dans les deux essais :

	Cycles de					
	$\pi$ .	$3\pi$ .	$5\pi$ .	$10\pi$ .	$16\pi$ .	$20\pi$ .
$(l' - l) : l$ .....	0,39	0,33	0,28	0,19	0,03	0,03

L'allongement relatif du cycle diminue à mesure que l'amplitude du cycle augmente.

Les cycles sont plus aplatis après qu'avant le recuit; ils renferment une aire plus petite, quand le caoutchouc est recuit.

13. *Effet d'un recuit à 100°.* — A 100° le soufre ne fond pas encore, le caoutchouc se transforme moins profondément et moins vite qu'à 150°.

*Influence de la durée du recuit.* — Les fils sont préparés comme précédemment par 5 cycles de  $5\pi$ ; on les recuit le lendemain et l'on fixe à nouveau le même cycle 4 minutes après la sortie de l'étuve. L'amplitude du cycle augmente :

	Durée du recuit			
	0 <sup>h</sup> ,5.	1 <sup>h</sup> .	2 <sup>h</sup> .	4 <sup>h</sup> .
$(l' - l) : l$ .....	0,31	0,34	0,41	0,52

L'effet est considérable et augmente avec la durée du recuit. *L'aspect des cordes n'a pas changé.* On s'explique que le résultat soit opposé à celui que l'on avait observé à 150°.

*Influence du temps écoulé depuis la sortie de l'étuve.* — Préparation : 5 cycles de  $5\pi$ . Recuit le lendemain pendant 30 minutes. On fixe le même cycle des temps variables après la sortie de l'étuve :

	Temps écoulé					
	0 <sup>h</sup> .	0 <sup>h</sup> ,5.	1 <sup>h</sup> .	2 <sup>h</sup> .	4 <sup>h</sup> .	24 <sup>h</sup> .
$(l' - l) : l$ .....	0,33	0,27	0,23	0,13	0,07	0,07

L'état acquis par le recuit n'est pas permanent. Il est curieux que les variations soient du même ordre après un recuit à 100° ou un recuit à 150°.

*Influence de l'amplitude du cycle sur l'effet du recuit.* — On fixe les cycles par 5 parcours. On recuit 30 minutes; on fixe à nouveau le cycle 65 minutes après la sortie de l'étuve :

	Cycles					
	$\pi$ .	3 $\pi$ .	5 $\pi$ .	10 $\pi$ .	15 $\pi$ .	20 $\pi$ .
$(l' - l) : l$ .....	0,34	0,23	0,22	0,16	0,12	0,11

Contrairement à ce qui se passe à 150°, les cycles sont moins aplatis après le recuit qu'avant. En d'autres termes, la différence maxima des abscisses, pour une même charge, est plus grande quand le fil est recuit.

14. *Effet d'un recuit à 59°.* — On admettait généralement que le caoutchouc pouvait être chauffé jusqu'à 80° sans subir de modification permanente. Nous allons voir à quel point cette hypothèse est erronée.

*Influence de la durée du recuit.* — Même technique qu'au n° 11 :

	Durée du recuit						
	30 <sup>m</sup> .	1 <sup>h</sup> .	2 <sup>h</sup> .	4 <sup>h</sup> .	24 <sup>h</sup> .	51 <sup>h</sup> .	96 <sup>h</sup> .
$(l' - l) : l$ .	0,17	0,20	0,20	0,20	0,15	0,10	0,03

L'effet est de même sens qu'à 100°. Il y a tout d'abord accroissement de l'effet produit, puis diminution. Il ne résulte pas du tout de ces expériences que la transformation de la matière soit plus petite après 96 heures de chauffe qu'après 30 minutes. Le réactif que nous employons est complexe; rien ne dit que la même amplitude ne peut pas correspondre à des matières très différentes. Selon toute probabilité, un recuit prolongé ne détruit pas l'effet d'un recuit de courte durée : il en produit un autre, qui se traduit par des phénomènes inverses.

*Influence du temps écoulé depuis la sortie de l'étuve.* — Même technique qu'au n° 11.

On donne aussi, dans le Tableau suivant, la variation relative  $(e' - e) : e$  de l'épaisseur du cycle, c'est-à-dire de la différence maxima des abscisses pour une même charge :

	Temps écoulé				
	0 <sup>h</sup> .	1 <sup>h</sup> .	4 <sup>h</sup> .	25 <sup>h</sup> .	50 <sup>h</sup> .
$(l' - l) : l$ .....	0,17	0,15	0,12	0,09	0,08
$(e' - e) : e$ .....	0,29	0,20	0,25	0,13	0,13

Ainsi, l'effet du recuit diminue non seulement en ce qui touche l'amplitude des cycles, mais encore leur épaisseur : ils s'aplatissent à mesure qu'augmente le temps écoulé depuis la sortie de l'étuve jusqu'à l'essai.

*Influence de l'amplitude du cycle.* — Même technique qu'au n° 11 :

	Cycles de					
	$\pi$ .	$3\pi$ .	$5\pi$ .	$10\pi$ .	$15\pi$ .	$20\pi$ .
$(l' - l) : l \dots \dots \dots$	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07

De même, le rapport des épaisseurs des cycles avant et après le recuit, grand pour de petits cycles, diminue à mesure que l'amplitude augmente. Le cycle est toujours moins aplati après le recuit qu'avant.

**15. Effet d'un refroidissement dans la neige carbonique.** — Nous avons répété des expériences analogues aux précédentes en remplaçant le recuit par un refroidissement dans l'anhydride carbonique solide. On fixait des cycles de  $5\pi$  et de  $15\pi$ . On conservait la moitié des fils comme témoins, l'autre moitié était maintenue 45 minutes, soit dans un tube métallique complètement entouré de neige carbonique tassée, soit à même la neige. En fixant à nouveau les cycles, on trouve les mêmes résultats pour les deux groupes. L'effet du refroidissement est donc nul.

**16. Cycles fixés à des températures différentes.** — Il faut tenir compte, dans les expériences suivantes, des faits précédemment observés. Puisque le recuit produit une modification plus ou moins permanente, les comparaisons doivent porter sur des phénomènes qui se produisent à chaud et à froid après un premier recuit. On supposera donc que le caoutchouc a été porté antérieurement pendant quelque temps à la température la plus élevée qu'il doit subir ensuite.

On fixe à  $60^\circ$  un cycle de  $23\pi$ .  $L_0 = 1520$ .

Voici les amplitudes sur les courbes de charge et de décharge :

7770		7902		8002		8050
	7530		7872		7981	
						8039

On laisse reposer 20 heures sous charge nulle. On croise alors systématiquement des cycles à  $12^\circ$  et à  $60^\circ$ . Voici les amplitudes sur les courbes de charge et de décharge.

12.....	8143		8290	
		7960		8262
60.....	8207		8173	
		8119		8159
12.....	8589		8583	
		8392		8551

Les cycles à froid sont moins redressés que les cycles à chaud.

L'effet de la température est plus marqué sur l'aire du cycle. Déterminons la différence maxima des abscisses des courbes de charge et de décharge pour les mêmes charges. Voici d'abord les résultats pour les cycles à 60° que l'on fixe au début de la série :

820      275      260      204

Voici maintenant les résultats pour les cycles croisés :

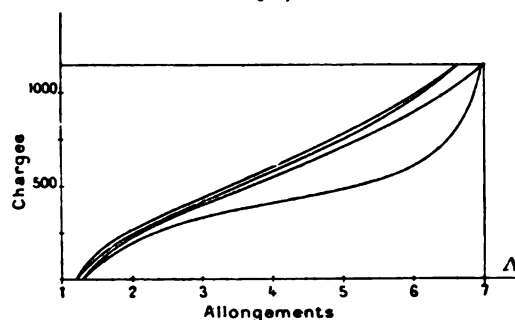
12.....	1981	2335
60.....	295	209
12.....	2400	2418

La figure 7 donne un cycle à 12° et un cycle à 60°. Le cycle à 60° est beaucoup plus aplati.

L'expérience suivante montre quelles erreurs l'on ferait en ne tenant pas compte du recuit.

$L_0 = 1885$ , cycles de  $12\pi$ . On fixe les cycles à froid (10° environ). On décrit

Fig. 7.



4 parcours; voici, de 2<sup>m</sup> en 2<sup>m</sup> de chaîne, les allongements pour le premier, le troisième et le quatrième :

I.	{	Charge .....	0	252	651	1223	2018	2917	3829
		Décharge ....	170	535	1098	1856	2651	3394	
III.	{	Charge .....	197	488	960	1681	2548	3420	4206
		Décharge ....	208	618	1177	1972	2849	3640	
IV.	{	Charge .....	208	506	1000	1723	2591	3471	4268
		Décharge ....	217	614	1220	2011	2871	3671	

On chauffe à 62°; voici les 3 premiers parcours à cette température :

V.	{	Charge.....	88	412	911	1643	2582	3588	4637
		Décharge....	177	571	1130	»	2885	3827	
VI.	{	Charge.....	177	520	1048	1822	2762	3775	4786
		Décharge....	192	598	1205	1960	2939	3928	
VII.	{	Charge.....	192	540	1084	1870	2823	3848	4832
		Décharge....	190	617	1212	2047	2986	3971	

Voici les amplitudes pour tous ces cycles :

10° .....	3829	3931	4009	4060
62° .....	4549	4609	4640	

On pourrait conclure sans précaution, et l'on a souvent conclu, que l'effet de l'élévation de la température était d'allonger le parcours et d'augmenter son épaisseur, ce qui résulte de la comparaison des cycles IV et V. Mais déjà le cycle VII est plus aplati que le IV.

L'expérience a été continuée. Après ces deux séries, on en a fait sept autres alternativement à 10° et à 62°; elles se composaient seulement de deux parcours et il s'écoulait 1 heure entre le début des parcours. Comme ceux-ci exigent 22 minutes environ, il restait 38 minutes pour amener le fil à la température indiquée. On donne les six derniers parcours, qui sont les XVI, ... et XXI :

XVI.	10°...	{	Charge.....	177	538	1109	1960	3038	4138	5140
			Décharge....	296	777	1498	4421	3481	4427	
XVII.	10°...	{	Charge.....	296	663	1274	2150	3218	4279	5229
			Décharge....	317	808	1522	2463	3531	»	
XVIII.	62°...	{	Charge.....	200	560	1134	»	2948	3987	4950
			Décharge....	240	658	1294	2138	»	»	
XIX.	62°...	{	Charge.....	240	607	1189	1999	2997	4025	4988
			Décharge....	246	675	1275	2090	3122	4101	
XX.	10°...	{	Charge.....	204	578	1181	2051	3148	4251	5272
			Décharge....	317	816	1544	2502	3550	4521	
XXI.	10°...	{	Charge.....	317	697	1324	2229	3319	4357	5359
			Décharge....	330	840	1560	2530	3618	4578	

Voici les amplitudes pour tous ces cycles :

10°.....	4963	4933
62°.....	4950	4748
10°.....	5068	5042

Il suffit de retrancher les nombres placés l'un sur l'autre pour le même cycle, pour voir à quel point le cycle fixé à chaud est plus aplati. Voici les différences pour les parcours XIX et XXI :

*Fac. de T., 2<sup>e</sup> S., V.*

Différences.	XIX.....	16	68	86	91	123	76
	XXI.....	13	143	236	301	299	221

Même pour les séries régulièrement croisées, il faut ne comparer que des cycles véritablement correspondants pour avoir des résultats réguliers. Ainsi, le premier cycle à chaud a une amplitude supérieure au précédent cycle à froid. Enfin, il ne faut jamais oublier que croiser des expériences revient à imaginer un ensemble périodique où interviennent plusieurs variables, et que les phénomènes dépendent de l'ensemble tout entier.

Si donc on fait varier l'une quelconque des conditions formant l'ensemble périodique, les résultats se trouvent modifiés. Il serait donc absurde de dire que les amplitudes d'un cycle donné varient dans tel rapport quand la température passe de  $\theta_0$  à  $\theta_1$ , sans spécifier tout ce qui définit l'ensemble périodique, sans dire par exemple quel est le nombre des parcours, quel temps s'écoule entre leur description aux deux températures, etc.

17. Voici une expérience faite à  $14^\circ$  et  $100^\circ$  qui montre qu'à cette dernière température la transformation de la matière est déjà considérable.

$L_0 = 1870$ . Cycle de  $10\pi$ .

Il s'écoule 45 minutes entre le parcours des cycles; la température est modifiée aussitôt le parcours effectué.

Il faut environ 30 minutes pour que le fil atteigne la température définitive; mais comme la description du parcours exige moins de 10 minutes, on a largement le temps.

On donne, dans le Tableau suivant, les allongements de  $2^m$  en  $2^m$  de chaîne :

I.	$100^\circ \dots$	Charge.....	0	292	719	1332	2150	3137
		Décharge.....	170	532	2049	2689	2418	
II.	$14^\circ \dots$	Charge.....	153	518	1081	1910	2920	3970
		Décharge.....	249	711	1300	2220	3158	
III.	$100^\circ \dots$	Charge.....	158	490	983	1690	2591	3601
		Décharge.....	337	760	1322	2050	2853	
IV.	$14^\circ \dots$	Charge.....	317	744	1409	2360	3472	4612
		Décharge.....	417	950	1704	2690	3692	
V.	$100^\circ \dots$	Charge.....	317	700	1290	2116	3158	4304
		Décharge.....	563	1068	1719	2579	3500	

On constate, comme précédemment, que le cycle à chaud a une amplitude moindre que le cycle à froid. Voici ces amplitudes, prises sur les courbes de charge :

14° .....	3817	4295	
100° .....	3137	3443	3987

Mais il y a un allongement subpermanent assez grand à chaud pour que les



parcours soient alors plus épais. Voici, d'une part, les épaisseurs maxima; d'autre part, les distances des points de départ et de retour à charge nulle. Les parcours sont très loin d'être fermés :

14..... <sup>0</sup>		320	330	
100.....	357		360	486
14.....		96	100	
100.....	170	179		246

**18. Influence de la vitesse sur la forme des cycles à chaud.** — Pour des raisons que l'on comprendra quand nous aurons étudié la réactivité, il était important de savoir si à chaud la vitesse influe sur la forme des cycles. Les expériences ont été faites à 70°. La vitesse  $V$  est de 1<sup>m</sup> de chaîne en 4 secondes et demie, la vitesse  $v$  est de 1<sup>m</sup> en 68 secondes. Les cycles sont de  $18\pi$ .

On croise sur le même fil. On donne, dans le Tableau suivant, les amplitudes des parcours sur les courbes de charge.  $L_0 = 1874$  :

V.....	7070	7150	7210	7305	7340	7375	7420
v.....	7631	7719					
V.....	7701	7660	7700	7690	7700		
v.....	7912	8008					
V.....	7947	7890	7920	7910	7885	7870	

Il est incontestable que la vitesse influe cependant beaucoup moins à chaud qu'à froid.

Nous retrouvons, d'ailleurs, pour les premiers parcours des séries  $V$ , les mêmes particularités qu'à froid. Pour bien se rendre compte de la variation due à la vitesse, on construira une courbe en prenant les amplitudes comme ordonnées et le numéro d'ordre des parcours comme abscisses.

De même qu'à froid, l'épaisseur des cycles est moindre à grande vitesse qu'à petite; mais, sur l'épaisseur aussi, l'influence de la vitesse est considérablement moindre à chaud qu'à froid.

La comparaison de la manière suivant laquelle les cycles se fixent dans les différentes séries  $V$  est intéressante. Dans la première, l'amplitude va constamment en augmentant; dans les autres, elle diminue d'abord beaucoup pour rester à peu près stationnaire. Ici encore, les expériences à grande et à petite vitesse réagissent les unes sur les autres, et la méthode des expériences croisées se présente avec une complexité qui la rend assez hasardeuse. Nous avons un ensemble périodique d'opérations, et l'on ne peut pas distraire une seule de ces opérations sans modifier les résultats de l'ensemble entier.





---

SUR LA

# RÉACTIVITÉ DU CAOUTCHOUC VULCANISÉ,

PAR MM. H. BOUASSE ET Z. CARRIÈRE.

---

## HISTORIQUE.

Pour bien faire comprendre en quoi nos recherches diffèrent de celles qui les ont précédées, nous allons résumer le Mémoire de Kohlrausch (*Pogg. Ann.*, t. CLVIII, 1876). Il est classique en Allemagne, et l'on peut dire que les nombreux auteurs qui se sont occupés du caoutchouc se sont imprégnés de son esprit et n'ont fait qu'en retrouver les résultats, qui sont d'ailleurs pour la plupart dans le Mémoire de Weber. On ne saurait conclure de là qu'ils soient inattaquables dans leur interprétation générale; cette concordance prouve tout au plus que Kohlrausch observait bien, ce dont personne n'a jamais douté, et que ses élèves et continuateurs se sont placés dans les mêmes conditions expérimentales. A quel point ces conditions sont particulières, par quelles limites étroites il a borné la question, c'est ce que le présent Mémoire montrera.

Kohlrausch emploie du caoutchouc de jouets : sa section est carrée, de 0<sup>mm</sup>,9 de côté. Un mètre pèse 0<sup>g</sup>,98. La densité est 1,2; ce qui prouve que le caoutchouc contenait passablement de matières étrangères. Au fil est constamment attaché un petit plateau pour placer des poids, pesant lui-même 4<sup>g</sup>, 1; sous cette charge la longueur du fil est 2<sup>m</sup>,30. Avant le commencement des recherches il était tendu de 60<sup>cm</sup> pendant 20 minutes et dès lors abandonné à lui-même. *Remarquons que c'est le même fil qui va servir pour toutes les recherches.*

## RÉACTIVITÉ APRÈS DES ALLONGEMENTS OU DES SURCHARGES DE PEU DE DURÉE.

On saisit le fil à la main, on l'allonge de 1 à  $\Lambda$  (voir pour cette notation le Mémoire précédent), on maintient l'allongement pendant 1 minute et l'on ramène le fil à sa position naturelle, *rapidement mais avec prudence*. Après 10 secondes ses oscillations sont amorties et l'on commence les lectures. Enfin après 30 minutes le fil revient à sa longueur initiale à moins de 1<sup>mm</sup> près; on prend cette position comme position d'équilibre et l'on y rapporte le résultat de toute l'opération.

On appelle  $x$  les allongements temporaires du fil par rapport à la longueur avant le commencement de l'expérience.

Entre deux expériences on met un temps tel que la réactivité en 50 minutes soit négligeable. Ici Kohlrausch pose donc, comme hypothèse, que le fil revient à un état bien déterminé et toujours le même, quand la réactivité est devenue négligeable, *ce qui est entièrement faux*.

Kohlrausch prend l'allongement pour paramètre variable de ses expériences et cherche une formule pour les représenter.

Il s'arrête à l'expression suivante  $x = \frac{c}{t^\alpha}$ , où  $c$  et  $\alpha$  sont des fonctions de  $\Lambda$ . Pour  $t = 0$ , on a  $x = \infty$ ; mais il ne fait servir la formule qu'à partir de 10 secondes, c'est-à-dire de  $t = 0,167$ ; il prend la minute pour unité de temps.

Voici donc précisé le point de vue de Kohlrausch : il pose comme hypothèse que les opérations sont indépendantes les unes des autres, qu'il suffit d'attendre un temps suffisant pour que la matière du caoutchouc revienne à son état initial; conséquemment qu'il y a lieu de chercher une formule où intervienne seule l'opération actuelle. De plus, les opérations elles-mêmes sont mal définies : il ne suffit pas de dire que les allongements et raccourcissements se font rapidement mais avec prudence (*rasch aber behutsam*). Quant à la formule choisie, nous prouverons qu'elle n'est pas générale et qu'à supposer qu'elle représente les résultats de Kohlrausch, on peut imaginer une infinité de techniques où elle est grossièrement erronée.

A la vérité nous sommes en présence d'un ensemble complexe d'opérations qui réagissent toutes les unes sur les autres, et l'on ne peut rien modifier sans tout modifier plus ou moins.

#### RÉACTIVITÉ SOUS L'INFLUENCE D'UN CHANGEMENT PERMANENT DE CHARGE.

On augmente ou l'on diminue brusquement la charge de 1<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>. On détermine la manière dont le fil s'approche peu à peu de sa nouvelle position d'équilibre. La durée du phénomène est ici considérable et se chiffre par semaines. Il serait peut-être plus simple de dire qu'il n'y a pas de position d'équilibre, mais c'est une affaire de mots sans importance.

*Surcharge.* — Soit (*fig. 1*) la courbe des allongements OAB : pour 4<sup>e</sup> Kohlrausch la représente par l'équation

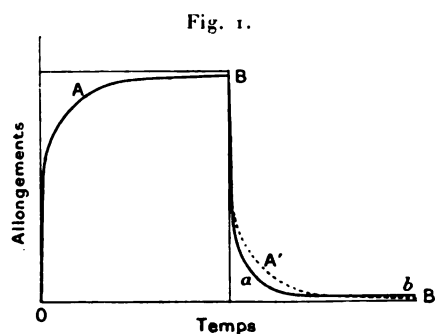
$$y_t = 0,0767 - \frac{0,0241}{t^{0,109}},$$

$y_t$  est l'allongement en fonction de la longueur initiale prise pour unité; l'unité de temps est la minute. Pour  $t = \infty$ , le fil se serait allongé de 0,0767 de sa longueur

initiale. Pour des poids autres que  $4^k$ , il trouve des courbes semblables à celle qui correspond à cette charge. On aurait, par exemple,

$$y_2 = 2,16 y_1 = 4,41 y_1.$$

La formule donnerait  $y = -\infty$  pour  $t = 0$ ; mais on ne s'en servira qu'à partir



d'un temps tel que  $y$  soit positif, ce qui représente une très petite fraction de seconde : 0<sup>0</sup>,0015. Il n'y a donc aucun inconvénient à employer l'expression précédente.

*Décharge.* — Kohlrausch énonce la loi suivante : les allongements et les raccourcissements qui suivent la charge et la décharge sont égaux pour un même poids pourvu que l'allongement soit relativement petit. Cependant, il remarque, après Weber, que cette loi est insuffisante et que le raccourcissement est toujours plus rapide que l'allongement. La courbe n'est pas  $BA'B'$  identique à  $OAB$  (fig. 1), mais  $Bab$ ; de plus il peut intervenir un allongement permanent.

Si, au lieu de se borner aux très petits allongements, généralement très inférieurs à  $\Lambda = 2$ , Kohlrausch avait poussé ses expériences jusqu'à  $\Lambda = 6, 7$  ou  $8$ , il n'aurait même plus eu l'idée de donner la loi d'égalité, même comme première et grossière approximation. Cependant, pourquoi borner son étude aux petits allongements et quel intérêt présente cette limitation des phénomènes à la soi-disant élasticité parfaite qui n'existe jamais?

*Influence de la température.* — Kohlrausch compare les réactivités après des allongements de 160<sup>mm</sup> pendant 1 minute : une des expériences est faite à 9°, l'autre à 17°,3. Elles donnent des courbes de même forme; on peut les représenter par l'expression  $x = ct^{-\alpha}$ , où  $\alpha$  reste le même. Les coefficients  $c$  sont dans le rapport 3,2; le plus grand correspond à 9°, ainsi la réactivité décroît avec la température, à l'inverse de ce qui se passe pour les métaux.

Nous verrons plus loin combien peu une telle expérience est convaincante.

Il reprend la même étude en imposant une surcharge de 2<sup>k</sup>. Voici les conclusions :

*La température a une influence énorme. A haute température les allongements initiaux sont beaucoup plus grands qu'à basse température; mais les différences décroissent vite, on peut admettre qu'elles s'annulent et qu'après quelques jours dans toutes les séries l'allongement est le même.*

Les mêmes phénomènes se présentent après une brusque décharge. Voici d'ailleurs les nombres de deux séries pour fixer les idées. Surcharge 2<sup>e</sup> :

Temps en minutes.	0,25.	0,5.	2.	5.	10.	1440.
Allongements à 19,5...	<sup>0</sup> 52,0	<sup>mm</sup> 54,1	<sup>mm</sup> 57,4	<sup>mm</sup> 61,0	<sup>mm</sup> 62,5	<sup>mm</sup> 75,9
Allongements à 7,6...	33,5	37,4	45,4	49,5	»	»

Entre 0<sup>m</sup>,25 et 5<sup>m</sup>, l'allongement à 19°,5 est 9,0; à 7°,6 il est 16,0.

Excepté en ce qui a trait au sens de la variation de la réactivité avec la température, les conclusions précédentes sont singulièrement contestables.

Kohlrausch dit que les résultats d'Exner, sur la diminution de la vitesse de propagation du son dans le caoutchouc, quand la température s'élève, concordent avec l'influence constatée de cette élévation sur la grandeur de la réactivité. On ne voit pas bien en quoi ces questions sont connexes.

#### RÉACTIVITÉS DUES A DES DÉFORMATIONS CONSÉCUTIVES DE SENS OPPOSÉS.

C'est là certainement la partie la plus neuve et la plus intéressante du Mémoire de Kohlrausch. Le caractère général de la réactivité, dit-il, est qu'une déformation dont elle est cause diminue d'autant plus lentement qu'il s'est écoulé plus de temps depuis la déformation qui lui a donné naissance (déformation primaire). Superposons plusieurs réactivités sur le même corps; on peut s'arranger de manière qu'il se déforme spontanément dans un sens puis dans l'autre. On impose par exemple une déformation grande ou longue et ensuite une déformation petite ou courte de sens contraire; on abandonne ensuite le corps à lui-même; on peut s'attendre à voir la réactivité qui provient de la seconde déformation l'emporter d'abord. Mais son effet diminue vite et, pour des rapports convenables entre les déformations primaires, la réactivité due à la première de ces déformations peut réapparaître. La déformation spontanée du corps change alors de signe.

Pour intéressantes que soient ces considérations, Kohlrausch n'est resté qu'à la surface de la question, car le seul exemple qu'il nous donne comporte deux changements de signe et non pas un seul, comme il le croit.

Il utilise le caoutchouc qui lui a toujours servi et qui portait d'une manière permanente une charge de 4<sup>g</sup>,1. Il diminue cette charge à 4<sup>g</sup> qu'il maintient pendant 6 minutes. Il raccourcit alors à la main de 40<sup>mm</sup> pendant 1 minute, ce qui

correspond à une nouvelle décharge et abandonne enfin le fil à lui-même. Il commence par s'allonger pendant 90<sup>s</sup>, puis se raccourcit.

Si Kohlrausch avait attendu un temps suffisant, il aurait vu le fil s'allonger à nouveau. Nous montrerons comment on peut systématiquement reproduire ces inversions de sens doubles.

*Expérience de Pülfrich* (*Wied. Ann.*, t. XXVIII, 1886). — Pülfrich s'est proposé d'étudier les phénomènes de réactivité sur un tube de caoutchouc, en déterminant simultanément les variations de longueur et de diamètre. Il s'agissait de discuter sous une de ses faces la question du coefficient de Poisson. Nous ne faisons que signaler ces expériences, parce que, au point de vue où nous sommes, ni dans la méthode, ni dans les résultats, elles n'ont apporté quelque chose de neuf. Nous y reviendrons quand nous rencontrerons dans un prochain Mémoire le coefficient de Poisson.

#### DESCRIPTION DES APPAREILS EMPLOYÉS.

On peut reprocher aux physiciens qui se sont occupés du caoutchouc, outre des idées erronées sur la nature du phénomène qu'ils étudiaient, une technique défectueuse. Cette technique était d'ailleurs la conséquence de leurs idées. Nous ne pouvons plus nous contenter d'opérations à la main, fussent-elles conduites *avec prudence, behutsam*; il s'agit d'obtenir des déformations parfaitement définies, ne serait-ce que pour les reproduire identiques à elles-mêmes.

L'appareil employé est représenté schématiquement (*fig. 2*). Le caoutchouc est pris entre deux pinces. La pince supérieure est fixée dans l'axe d'un tronc de cône de laiton qui se place dans un tronc de cône creux, lui-même fixé dans une épaisse planche à 3<sup>m</sup>, 50 au-dessus du sol. Grâce à cette disposition on peut aisément régler le caoutchouc en azimut, ce dont on va voir la nécessité.

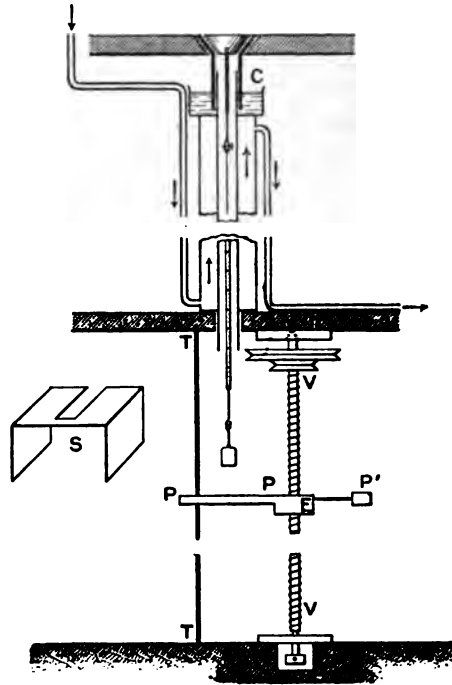
La pince inférieure supporte une légère règle de bois à laquelle seront suspendus des poids par l'intermédiaire de crochets. Une plate-forme PP peut être animée d'un mouvement vertical, grâce à la rotation de la vis VV dans l'écrou E; elle est équilibrée par un contrepoids P' et guidée par une tringle verticale TT qui la traverse à frottement doux.

Pour mettre le caoutchouc en charge, on fait descendre la plate-forme d'un mouvement uniforme, en entraînant l'une des poulies qui sont fixées à la vis. Le caoutchouc s'allonge avec une vitesse constante jusqu'à ce que le poids abandonne la plate-forme. A partir de ce moment le fil s'allonge à charge constante.

Pour étudier la réactivité à haute température, le caoutchouc est entouré d'une double enceinte formée de deux tubes de laiton concentriques; un courant d'eau froide ou chaude traverse l'espace annulaire. L'eau est fournie par un réservoir,

et amenée soit directement soit à travers un appareil à ailettes chauffé au gaz, qui la porte à une température fonction de la vitesse d'écoulement. Une chicane remplie

Fig. 2.



d'huile C empêche les courants d'air verticaux de se produire autour du caoutchouc en expérience.

La vis a 1<sup>m</sup>, 40 de long; il en est de même de la partie du tube qu'il est possible de chauffer. La hauteur totale de l'appareil est donc voisine de 3<sup>m</sup>, 50. On peut allonger de 6 fois sa longueur un caoutchouc de 20<sup>m</sup>.

On lit dans une lunette les divisions de la règle à un dixième de millimètre près; c'est une approximation largement suffisante.

Il est possible, grâce à un inverseur de vitesse, d'imprimer aux poulies un mouvement dans l'un ou l'autre sens, ou de les arrêter brusquement; on peut d'ailleurs faire varier la vitesse de 1 à 10 en utilisant des transmissions convenables. La vitesse du moteur est maintenue exactement uniforme par un régulateur de Watt.

Pour étudier la réactivité sur une courbe de décharge (n° 9), il est nécessaire de supprimer une partie seulement de la charge. On utilise un support S représenté à gauche de la figure 2 et qui se place sur la plate-forme P. La charge est divisée en deux, P<sub>1</sub> et P'<sub>1</sub>; P<sub>1</sub> repose sur la plate-forme, P'<sub>1</sub> sur le support S; elles sont reliées par une cordelette dont la longueur est de quelques centimètres supérieure



à la hauteur du support S. Quand la plate-forme descend,  $P_1$  se trouve d'abord suspendu au fil, puis  $P_1$ . On enlève alors le support S. Pendant la décharge,  $P_1$  est rencontré d'abord par la plate-forme; il suffit d'arrêter le mouvement pour maintenir la tension constante égale à  $P_1$ . Cette technique peut se généraliser et s'appliquer à trois ou plusieurs poids successifs.

Enfin il peut être nécessaire d'imposer au fil des tractions rythmées petites et nombreuses. La pince supérieure est alors fixée à l'extrémité d'une tige métallique horizontale qui tourne autour d'un axe horizontal placé en son milieu. Sa course est limitée par deux vis. Le poids des pinces, de la règle de bois et de la charge que supporte le caoutchouc est à peu près équilibré par un poids qui est suspendu par un fil métallique à l'autre extrémité de la tige et qui plonge dans un vase plein d'huile. Une armature de fer est soudée à cette sorte de fléau et peut être attirée par un électro-aimant sur le circuit duquel se trouve une pile. Une horloge ou un métronome le ferme à des intervalles de temps égaux et connus. On obtient ainsi indéfiniment une oscillation verticale à l'extrémité supérieure du caoutchouc, dont l'amplitude peut varier de  $0^{\text{mm}}$  à  $5^{\text{mm}}$ .

*Notations.* — La charge que supporte toujours le fil en expérience (pince et règle) est de  $65^{\text{g}}$ ; nous la désignerons par  $P_0$ . Nous désignerons par  $P_1$  la charge qu'on ajoute.

$T_0$  est le temps passé sous la charge invariable  $P_0$ ;  $T_1$  est le temps passé sous la charge constante  $P_1$ . La longueur initiale du fil est  $L_0$ , généralement mesurée sous  $P_0$  à moins d'indications contraires:  $L_0$  représente aussi la longueur au commencement des cycles;  $L_1$  est la longueur au commencement de l'arrêt sous  $P_1$ ,  $L_1'$  est la longueur à la fin de l'arrêt sous  $P_1$ . Nous représenterons par  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , les allongements sous  $P_1$ , dans les intervalles formés par les temps  $0^{\text{s}}, 30^{\text{s}}, 1^{\text{m}}, 2^{\text{m}}, \dots$  formant (sauf le premier) une progression géométrique de raison 2. Enfin  $\Delta$  est l'allongement total entre  $30^{\text{s}}$  et  $T_1$ ; on donne à cet allongement une importance particulière, parce qu'il est le plus grand qu'on puisse déterminer avec rigueur. La longueur  $L_1$  n'est pas déterminée avec une très grande précision; au moment où la charge devient constante, la vitesse d'allongement ne varie pas brusquement. Il est donc impossible de dire à un dixième de millimètre près quelle est la valeur de  $L_1$ , et par conséquent quel est l'allongement total pendant l'arrêt  $T_1$ . La même difficulté n'a pas lieu entre  $30^{\text{s}}$  et  $T_1$ .

A moins d'indication contraire, la vitesse uniforme d'allongement pendant la mise en charge est de  $1^{\text{m}}$  en  $173^{\text{s}}$ . De même, à moins d'indication spéciale, on opère à la température ordinaire du laboratoire. Le caoutchouc est employé sous forme de cordes rondes de  $4^{\text{mm}}$  de diamètre; sa densité est  $0,984$ ; il a été fourni comme ne contenant que de la gomme et du soufre. Il est gris clair et légèrement poudreux à la surface; il s'allonge sans céder de 7 à 8 fois sa longueur.

Nous poserons  $\Lambda = L : L_0$ .

A moins d'indication contraire, les longueurs sont énoncées en dixièmes de millimètre.

#### RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES.

##### 1. Allongement sous charge constante aux extrémités d'un parcours.

Fixation du cycle. —  $P_1 = 500^g$ ;  $T_1 = 32^m$ ,  $T_0 = 0$ .

On décrit des cycles dans ces conditions. Voici le résultat de l'expérience :

$L_0$ .....	3230	3660	3700	3730	3790	3750	3790	3790
$L_1$ .....	7500	8290	8440	8520	8665	8680	8710	8730
$\Delta_1$ .....	240	108	96	92	92	94	89	90
$\Delta_2$ .....	98	38	34	36	33	35	32	33
$\Delta_3$ .....	111	38	35	35	32	36	36	35
$\Delta_4$ .....	117	39	35	33	32	33	31	32
$\Delta_5$ .....	117	40	33	28	27	28	29	29
$\Delta_6$ .....	114	44	34	30	25	25	24	24
$\Delta_7$ .....	112	49	36	32	24	24	25	23
$\Delta$ .....	669	250	207	194	173	181	179	176
$L'_1$ .....	8409	8648	8743	»	8930	8955	8978	8996

Entre le quatrième et le cinquième parcours, le temps  $T_1$  a été  $128^m$ . On a eu pour le quatrième parcours  $\Delta_8 = 40$ ,  $\Delta_9 = 56$ . Au moment de la décharge,  $L'_1$  était donc égal à 8902.

1° La loi énoncée par un de nous pour les fils métalliques, à savoir que les allongements sont sensiblement égaux dans des intervalles de temps en progression géométrique, est encore approximativement vérifiée, en tenant compte, bien entendu, de toutes les restrictions apportées à cet énoncé. (*Voir le Mémoire Sur les courbes de déformation des fils métalliques*, Chap. VIII.)

Entre  $16^m$  et  $32^m$  par exemple, l'intervalle est 32 fois plus grand que l'intervalle compris entre  $30^s$  et  $1^m$ ; pourtant  $\Delta_7$  et  $\Delta_2$  ne diffèrent que du tiers ou du quart de leur valeur. En tous cas les expériences satisfont infiniment mieux à la loi  $L = A + B \log(t + \tau)$  qu'aux lois proposées par Kohlrausch qui donnent lieu à des calculs aussi vains que compliqués.

2° Le phénomène est considérablement modifié par le premier parcours : cette modification ne disparaît pas par le repos sous charge nulle, même prolongé.

3° Considérons le quatrième parcours; on devrait trouver pour  $\Delta_8$  et  $\Delta_9$  des nombres faiblement croissants; on trouve 40 et 56. Donc, si l'on augmente  $T_1$ , les nouveaux  $\Delta$  se rapprochent de plus en plus des  $\Delta$  de même numéro d'ordre qu'on aurait trouvés pour le premier parcours, si l'on avait allongé le temps  $T_1$ . En d'autres termes, si après le quatrième parcours on augmente suffisamment  $T_1$ ,

pour observer des  $\Delta_n$  de numéros d'ordre élevés, ils tendent vers les valeurs qu'auraient eues les  $\Delta_n$  du premier parcours.

On s'explique ainsi la croissance des  $\Delta$  du second parcours qui se fait dès à partir de  $\Delta_2$ .

Pour le troisième et le quatrième, il y a croissance de  $\Delta_6$  à  $\Delta_7$ , mais plus faible.

4° Pour le cinquième parcours  $\Delta$  est plus petit : cette diminution tient à l'augmentation de  $T_1$  à la fin du quatrième. Puis  $\Delta$  augmente pour le sixième, pour décroître régulièrement ensuite pour les septième et huitième, la fixation se faisant toujours par une diminution de  $\Delta$ .

L'influence de l'allongement  $T_1$  se montre aussi par la notable diminution des derniers  $\Delta$  pour les parcours suivants.

A elle seule cette expérience suffit pour prouver à quel point les idées de Kohlrausch et de ses émules sont erronées. Comment pourrait-il venir à l'idée de calculer des paramètres numériques pour un phénomène aussi complexe ? Ne voit-on pas, jusqu'à la dernière évidence, la réaction des parcours les uns sur les autres et le souvenir que garde la matière des précédentes modifications ?

5° L'allongement est toujours plus grand, si la charge croît et décroît entre  $P_0$  et  $P_1$ , que si elle conserve la valeur constante  $P_1$ . Extrapolons pour le premier parcours. Pour  $T_1$ ,  $L_1 = 8409$ . Si l'on attendait jusqu'à  $T_1 = 256$ , la longueur serait  $8409 + 336 = 8745$ , en admettant  $\Delta_8 = \Delta_9 = \Delta_{10} = 112$ . Or on atteint cette longueur à la fin du troisième cycle, auquel on parvient 100 minutes environ après le commencement de l'arrêt sur le premier ; on gagne donc 156 minutes environ. De même, il faudrait à charge constante un temps énorme pour parvenir à 8996.

2. *Réactivité en fonction de la charge.* — Chaque expérience est faite sur un fil différent. Vitesse uniforme d'allongement pendant la mise en charge : 1<sup>m</sup> en 173<sup>s</sup>. On a représenté, figure 3, l'allongement  $\Delta$  entre 30<sup>s</sup> et 32<sup>m</sup>. La longueur des fils sous charge nulle est de 0<sup>m</sup>,25, les  $\Delta$  sont donnés en millimètres. Pour fixer les idées on a représenté par un trait interrompu les allongements totaux jusqu'au temps 32<sup>m</sup> après l'établissement de la charge.

Par exemple, imposons 1000<sup>g</sup> ; entre 30<sup>s</sup> et 32<sup>m</sup> l'allongement est de 0<sup>m</sup>,077 ; à ce moment le fil s'est allongé de 1<sup>m</sup>,02 ; sa longueur totale est de 1<sup>m</sup>,27 et  $\Delta = 5$ . On remarquera la forme singulièrement complexe de la courbe qui représente les  $\Delta$  : nous l'avons vérifiée par de nombreuses expériences et elle ne semble pas douteuse. Elle présente trois points d'inflexion et un maximum. Il est bien entendu que la technique influe notablement sur la position de ces points et que les nombres ne sont que pour fixer les idées.

La loi suivant laquelle les allongements à charge constante dépendent du temps est variable tout le long de la courbe. Étudions la variation des  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ , . . .

Si la charge est petite, ils sont à peu près constants ou légèrement décroissants. Quand la charge croît, un maximum apparaît. Il a lieu pour un numéro d'ordre d'abord croissant. Par exemple, pour 300<sup>g</sup>, c'est  $\Delta_3$  qui est maximum; pour 500<sup>g</sup>, c'est  $\Delta_4$ . Puis, jusqu'à 1000<sup>g</sup>, le maximum correspond à un numéro supérieur à 7. Comme les expériences n'étaient continuées que jusqu'à 32<sup>m</sup>, on ne l'observait pas : les  $\Delta_i$  croissaient continuellement à partir de  $\Delta_2$ .

Au-dessus de 1000<sup>g</sup>, le maximum réapparaît dans le champ de l'expérience et se produit pour un  $\Delta_i$  de numéro d'ordre  $i$  décroissant. Enfin, quand la charge est suffisamment élevée, à 1500<sup>g</sup>, par exemple, les  $\Delta_i$  décroissent continuellement. Le maximum a disparu.

On peut donc avoir, entre 30<sup>g</sup> et 32<sup>m</sup>, des  $\Delta$  égaux pour deux charges différentes, mais composés de  $\Delta_i$  entièrement différents, par exemple, toujours croissants pour la plus faible charge, toujours décroissants pour la plus forte.

Dans toutes les expériences effectuées avec notre technique,  $\Delta_1$  (entre 0<sup>g</sup> et 30<sup>g</sup>) est toujours plus grand que  $\Delta_2$  (30<sup>g</sup> à 1<sup>m</sup>).

*Mêmes expériences sur un fil unique.* — Ces expériences ont été reprises sur un fil unique. On impose la charge  $P_1$  pendant un temps  $T_1$ ; on revient à la charge  $P_0$ , on attend un temps  $T_0$ , puis on recommence avec une charge  $P_1$  plus grande et ainsi de suite. Il est clair que les résultats numériques dépendent de la loi de variation des charges  $P_1$  et des temps d'arrêt  $T_1$  et  $T_0$ . L'allure générale du phénomène reste la même que si l'on emploie pour chaque expérience des fils différents. Par exemple, on a pris pour les charges  $P_1$  la série arithmétique 100, 400, 700, 1000, 1300;  $T_1 = 32$  et  $T_0$  est tel que l'expérience totale dure 1 heure. On a trouvé, pour  $\Delta$  entre 30<sup>g</sup> et 32<sup>m</sup>,  $L_0 = 1600$  :

$P_1$ .....	100	400	700	1000	1300
$\Delta$ .....	38	269	368	629	790

La courbe représentative a la même allure que celle représentée figure 3.

Pour 100<sup>g</sup> les  $\Delta_i$  sont constants : ils présentent un maximum pour  $\Delta_1$  quand  $P_1 = 400$ ; puis le maximum se fait pour des temps de plus en plus grands; ainsi pour  $P_1 = 1000, jusqu'à 32<sup>m</sup>, les  $\Delta_i$  sont croissants. Pour 1300<sup>g</sup> le maximum réapparaît pour  $\Delta_3$ . Ces résultats sont conformes aux précédents.$

*Autre exemple.* — Nous avons pris pour  $P_1$  la série arithmétique 100, 200, 300, . . . .  $T_0 = 2^m$ ,  $T_1 = 8^m$ ,  $L_0 = 1600$ . Nous donnons ci-dessous la suite des  $\Delta$  entre 30<sup>g</sup> et 8<sup>m</sup> jusqu'à 1500<sup>g</sup> :

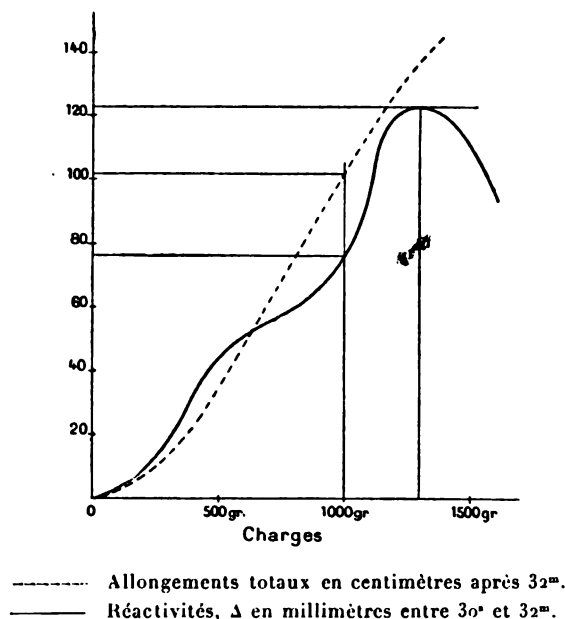
22	49	89	131	160	168	171	180
205	269	387	502	528	499	442	

La courbe a encore même allure. On constate que pour 600<sup>g</sup> et 700<sup>g</sup> les  $\Delta$  sont

sensiblement les mêmes. En diminuant encore la raison de la progression arithmétique, on arriverait même à donner à la courbe, au voisinage de ces charges, un maximum et un minimum, ce qui est conforme aux résultats du n° 1.

Ces expériences prouvent à quel point l'interprétation des séries effectuées sur

Fig. 3.



un même fil devient complexe et justifie les critiques que nous avons adressées au Mémoire de Kohlrausch, qui fait porter toutes ses recherches sur un même bout de fil. Il n'étudie d'ailleurs que la toute première partie de la courbe que nous venons de tracer.

3. Réactivité pour la charge  $P_0$ . —  $L_0 = 3240$ ,  $P_1 = 700^g$ ,  $T_1 = 166^m$ ,  $L_1 = 11030$ . Voici les valeurs des  $\Delta$  et  $\Delta_1$  à  $\Delta_8$  :

265      111      130      139      143      144      145      146

Entre 30<sup>s</sup> et 64<sup>m</sup>, l'allongement sous  $P_1$  est 962.

Pour  $T_1 = 166^m$ , la longueur est devenue 12447.

On ramène alors à la charge  $P_0$ . Voici les valeurs de  $\Delta$ , de  $\Delta_1$  à  $\Delta_8$  :

178      39      43      42      40      37      29      19

Entre 30<sup>s</sup> et 64<sup>m</sup> le raccourcissement sous  $P_0$  est 253.

La loi de Kohlrausch, *que les allongements et les raccourcissements qui suivent la charge et la décharge sont égaux pour un même poids*, ne saurait être générale. Kohlrausch ajoute, il est vrai, que pour des allongements un peu grands le raccourcissement est plus rapide : l'expérience précédente montre que ce dernier fait n'est pas seulement une correction petite à ajouter à la loi d'égalité. L'allongement  $\Delta_1$  correspondant au début de la charge est 3,1, et déjà les  $\Delta$  correspondant à la charge et à la décharge sont entre eux comme 4 : 1 environ.

Cet exemple prouve quel avantage il y a d'opérer dans toute l'étendue accessible d'un phénomène. Kohlrausch fait varier  $\Lambda$  de 1 à 1,05, il trouve une certaine loi simple qu'il énonce comme de première approximation. S'il avait pris un allongement un peu grand, il ne se serait pas arrêté à une proposition exacte tout au plus comme limite.

Refaisons la même comparaison dans les conditions suivantes :  $L_0 = 3210$ ;  $P_1 = 200^g$ ,  $T_1 = 64^m$ ,  $L_1 = 4150$ ,  $\Delta_1 = 1,293$  :

Charge .....	$\Delta_n = 111$	35	36	38	38	38	36	36	$\Delta = 367$
Décharge .....	109	16	16	16	15	12	10	7	$\Delta = 92$

Ainsi l'allongement n'est qu'une fraction petite de celui qu'on peut obtenir, et déjà la différence entre les phénomènes est énorme.

Il n'est d'ailleurs pas plus admissible de dire que les allongements et raccourcissements obéissent à la même forme de loi : les  $\Delta$  relatifs au raccourcissement décroissent toujours beaucoup plus vite que les autres.

4. *Fixation d'un parcours et influence de l'arrêt  $T_0$ .* —  $P_1 = 400^g$ ,  $T_0 = 5^m$ , sauf indications contraires;  $T_1 = 32^m$ ,  $L_0 = 3240$ .

On donne dans le Tableau suivant  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_1 - L_0$ ,  $L'_1$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta$  et le rapport  $\Delta : \Delta_1$  :

	$T_0$	$L_0$	$L_1$	$L_1 - L_0$	$L'_1$	$\Delta_1$	$\Delta$	$\Delta : \Delta_1$
1....		3240	6880	3640	7747	230	637	2,77
2....		3460	7480	4020	7927	130	317	2,44
3....	140 <sup>m</sup>	3401	7380	3978	7945	153	412	3,69
4....		3494	7620	4126	8027	123	284	2,60
5....		3513	7680	4167	8072	121	271	2,24
6....		3528	7720	4192	8107	121	266	2,20
7....	930 <sup>m</sup>	3419	7420	4001	8012	167	425	2,55
8....		3514	7690	4176	8091	122	279	2,28
9....		3530	7740	4210	8122	120	262	2,18
10....	30 <sup>m</sup>	3477	7650	4173	8116	132	334	2,53
11....		3538	7770	4232	8158	120	268	2,23
12....	0 <sup>m</sup>	3700	7950	4250	8201	90	161	1,80

1° L'augmentation de  $T_0$  fait croître la valeur des  $\Delta$ , mais ne les ramène pas à la valeur qu'ils ont dans le premier parcours : l'effet de celui-ci est permanent. On se reportera aux parcours 3, 7 et 10;

2° Inversement, une diminution de  $T_0$  diminue les  $\Delta$ , comme il résulte de l'expérience 12;

3° L'influence de la variation de  $T_0$  est grande quand  $T_0$  est petit; elle diminue à mesure que  $T_0$  augmente. Ainsi, l'effet de 140<sup>m</sup> sous  $P_0$  ou de 930<sup>m</sup> est à peu près le même. Le passage de  $T_0$  de 5<sup>m</sup> à 0<sup>m</sup> produit un effet considérable.

4° La colonne  $L_0$  nous montre que  $L_0$  est plus petit à mesure que  $T_0$  augmente; ce qui est évident, puisqu'on laisse au fil le temps de se raccourcir. Mais, phénomène qui ne pouvait plus se prévoir, la différence  $L_1 - L_0$  se trouve elle-même diminuée. Le repos sous charge  $P_0$  rend le fil moins extensible pour le parcours suivant.

5° Étudions les rapports  $(\Delta_1 + \Delta) : (L_1 - L_0)$ . Un accroissement de  $T_0$  augmente ce rapport. Une diminution de  $T_0$  produit l'effet inverse.

Étudions, d'autre part, les rapports  $\Delta : \Delta_1$ ; un accroissement de  $T_0$  augmente ce rapport. Ces deux résultats rentrent dans la même formule; les phénomènes sont retardés.

Comparons, par exemple, les expériences 6 et 7; appelons 1000 l'allongement initial  $L_1 - L_0$ , on a

	$L_1 - L_0$ .	$\Delta_1$ .	$\Delta$ .
Expérience 6.....	1000	0,0288	0,0635
Expérience 7.....	1000	0,0417	0,1062

*Autre exemple de l'influence de la variation des temps d'arrêt sous charge  $P_0$ .* — On effectue avec un fil trois parcours  $T_1 = 16^m$ ,  $T_0 = 5^m$ ,  $P_1 = 500$ . On attend alors sous  $P_0$  un temps  $T'_0$  et l'on recommence la même série de trois parcours. D'un fil à l'autre on fait varier le temps  $T'_0$  qui sépare les deux séries. On donne dans les Tableaux suivants les allongements sur la courbe de charge  $L_1 - L_0$ , rapportés au premier et les réactivités  $\Delta$  (entre 30° et 16°) rapportées à la première :

		T <sub>0</sub> .						
L <sub>1</sub> —L <sub>0</sub> ...	{	5 <sup>m</sup> ....	1000	1077	1099	1110	1118	1125
		40 <sup>m</sup> ....	1000	1075	1096	1101	1114	1123
		24 <sup>h</sup> .....	1000	1080	1101	1086	1115	1127
		Moyennes .		1077	1099		1116	1125
		T <sub>0</sub> .						
Δ.....	{	5 <sup>m</sup> ....	1000	556	501	481	468	461
		40 <sup>m</sup> ....	1000	549	492	598	471	455
		24 <sup>h</sup> .....	1000	564	504	730	508	477
		Moyennes .		557	499			464

Fac. de T., 2<sup>e</sup> S., V

Si les fils étaient parfaitement identiques, les nombres des trois premières colonnes seraient identiques. Le premier Tableau montre que l'influence de  $T_0$  devient négligeable sur les allongements à mesure qu'on augmente le nombre des cycles fixés. Tandis que les nombres 1110, 1101, 1086 diffèrent beaucoup et systématiquement de leur moyenne, les nombres 1125, 1123, 1127 en diffèrent peu et non systématiquement.

Pour les réactivités, l'influence du temps  $T_0$  se fait sentir plus fortement et plus longtemps.

5. *Influence de l'arrêt  $T_1$  sur la fixation d'un parcours.* — On donne dans le Tableau suivant la longueur  $L'_0$  de retour à  $P_0$ , le raccourcissement  $L'_0 - L_0$  pendant l'arrêt  $T_0 = 5^m$ , l'allongement  $L_1 - L_0$  pendant la mise en charge ( $P_1 = 500^g$ ), l'allongement  $\Delta_1$  entre  $0^s$  et  $30^s$ , l'allongement  $\Delta'$  entre  $30^s$  et  $8^m$ , enfin, l'allongement  $\Delta$  entre  $30^s$  et  $T_1$ . Sauf indications contraires,  $T_1 = 8^m$ . La longueur initiale est 3000.

	$T_1$	$L'_0$	$L'_0 - L_0$	$L_1 - L_0$	$\Delta_1$	$\Delta'$	$\Delta$
1.....				3520	192	331	
2.....		3280	142	3742	111	200	
3.....		3300	144	3806	108	180	
4.....		3310	146	3844	105	175	
5.....		3320	149	3871	103	168	
6.....	0	3322	144	3890	0	0	
7.....		3280	113	3878	104	179	
8.....	256 <sup>m</sup>	3322	143	3904	103	165	385
9.....		3420	173	4008	105	153	
10.....		3390	157	4017	99	158	
11.....		3380	150	4020	99	158	
12.....		3375	147	4022	99	159	
13.....	0	3373	146	4023	0	0	
14.....		3330	116	4011	102	172	
15.....	63 <sup>h</sup>	3370	149	4024	101	172	540
16.....		3580	206	4191	96	150	
17.....		3520	167	4197	91	157	
18.....		3500	167	4197	92	158	
19.....		3490	152	4197	92	157	
20.....	0	3483	150	4197	0	0	
21.....		3440	121	4176	105	169	
22.....		3470	211	4111	108	202	
23.....		3430	191	4091	113	209	

Entre les expériences 21 et 22  $T_0 = 80^m$ , entre les expériences 22 et 23  $T_0 = 130^m$ .



L'augmentation de  $T_1$  diminue les  $\Delta$  du parcours suivant, une diminution de  $T_1$  les augmente. Une augmentation de  $T_1$  augmente l'allongement  $L_1 - L_0$ ; une diminution de  $T_1$  les diminue. On comparera utilement le Tableau précédent au Tableau du n° 4.

Voici une autre série qui montre bien l'influence de  $T_1$ . Chaque expérience est faite sur un fil différent,  $P_1 = 500^g$ . On impose  $P_1$  pendant le temps  $T_1$ , variable d'un fil à l'autre; on revient à  $P_0$  où on attend  $T_0 = 5^m$ . On réinstalle alors la charge  $P_1$ . On compare les  $\Delta$  pour les différents fils.

Voici d'abord les  $\Delta$  que l'on obtient quand le fil est la première fois abandonné sous  $P_1$  :

201	78	89	95	95	95	94	88	87	86	84
-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Voici maintenant les  $\Delta$  pour les  $T_1$  différents :

$T_1$	$\Delta$								
<sup>m</sup>									
0... ..	141	62	68	82	83	85	87	87	
2... ..	121	48	56	61	63	70	70	71	
8... ..	118	45	49	55	56	59	65	66	67
780... ..	103	38	43	43	40	36	30	25	26

A mesure que  $T_1$  augmente, l'effet de la durée de la charge sur le cycle suivant devient de plus en plus grand. Pour des  $T_1$  limités à quelques minutes il y a tendance au raccordement, c'est-à-dire que les  $\Delta$  de numéros d'ordre élevés tendent à devenir les mêmes que pour le fil de comparaison qui n'a subi qu'un seul parcours. Il ne semble pas qu'il en soit de même quand  $T_1$  est très grand; mais la comparaison, pour être correcte, devrait alors porter sur des  $\Delta$  de numéros d'ordre extrêmement élevés.

6. *Influence de la vitesse de mise en charge.* — Chaque expérience est faite sur un fil différent,  $L_0 = 3230$ . On observe jusqu'à  $T_1 = 64^m$   $P_1 = 500$ . On donne les valeurs absolues de  $\Delta_1$  et de  $\Delta$  ( $30^s$ - $64^m$ ). Puis, posant  $\Delta_1 = 100$ , nous donnons, sous les rubriques  $\Delta'_2, \Delta'_3, \dots$ , les  $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_8$  en fonction de  $\Delta_1$ , pour faciliter les comparaisons. Les vitesses d'allongement pendant la mise en charge sont de  $1^m$  en  $17^s, 58^s, 173^s, 2400^s$ .

	Vitesses : 1 <sup>m</sup> en			
	17°.	58°.	173°.	2400°.
$\Delta_1$ .....	698	383	237	43
$\Delta$ .....	954	890	780	443
$\Delta'_1$ .....	23	35	42	51
$\Delta'_2$ .....	22	35	46	88
$\Delta'_3$ .....	21	36	48	120
$\Delta'_4$ .....	20	33	49	153
$\Delta'_5$ .....	18	31	49	186
$\Delta'_6$ .....	17	30	46	200
$\Delta'_7$ .....	16	40	45	223

Quand la vitesse de charge est très grande, les  $\Delta$  successifs décroissent. Quand la vitesse diminue, ils croissent d'abord, pour décroître ensuite. Il naît donc un maximum qui se fait d'autant plus tard que la vitesse est plus petite. Donc, pour une vitesse suffisamment petite, les  $\Delta$  croissent : la position du maximum est reculée au delà des limites de l'expérience.

Nous allons reprendre la même expérience en croisant deux vitesses sur un même fil.

La mise en charge se fait avec une vitesse d'allongement de 1<sup>m</sup> en 185° pour la vitesse  $\nu$ , de 1<sup>m</sup> en 32° pour la vitesse  $V$ ;  $\nu : V = 5,8$ . La décharge se fait toujours à la vitesse  $\nu$ . Les cycles sont croisés aux vitesses  $\nu$  et  $V$ . On a uniformément  $T_0 = 5^m$ ,  $P_1 = 500^g$ . D'une série à l'autre,  $T_1$  varie : les trois séries sont faites sur le même fil.

Dans les Tableaux suivants,  $L'_0$  est la longueur de retour à  $P_0$ ,  $L_0$  la longueur après l'arrêt  $T_0$ ;  $L_1$  est la longueur après 30° sous  $P_1$ ,  $L'_1$  la longueur après  $T_1$  sous  $P_1$ ;  $\Delta_2, \Delta_3, \dots$  sont les allongements dans les intervalles 30° à 1<sup>m</sup>, 1<sup>m</sup> à 2<sup>m</sup>,  $\dots$  après la mise en charge;  $\Delta$  est l'allongement dans l'intervalle 30° à  $T_1$ . La longueur initiale est 3000. Les résultats qui suivent correspondent à des cycles déjà fixés approximativement.

	$\nu$ .	$V$ .	$\nu$ .	$V$ .	$\nu$ .
$L'_0$ .....	3390	3390	3398	3400	3403
$L_0$ .....	3224	3230	3237	3239	3242
$L_1 - L_0$ .....	4924	4895	4965	4931	4997
$\Delta_1$ .....	40	63	38	61	38
$\Delta_2$ .....	43	60	42	60	42
$\Delta_3$ .....	45	52	44	51	42
$\Delta_4$ .....	43	46	42	47	42
$\Delta_5$ .....	40	42	39	39	39
$\Delta$ .....	211	263	205	258	202
$L' - L_3$ .....	5135	5158	5170	5189	5199

Les différences entre les  $L'_i - L_0$  successifs sont : 23, 12, 19, 10. Elles indiquaient donc un allongement légèrement plus grand pour les cycles à grande vitesse. Mais il ne faut pas oublier qu'il y a toujours une oscillation notable du poids au moment où il devient libre.

En définitive, nous pouvons admettre que l'allongement total tend à devenir le même, quelle que soit la vitesse de mise en charge. Si la vitesse est grande,  $L_i - L_0$  est plus petit; mais la compensation se fait au moyen des  $\Delta$ ; ils sont d'abord plus grands que ceux qui correspondent à une vitesse petite, mais ils tendent peu à peu vers ces derniers.

Nous avons fait varier la grandeur de l'intervalle  $T_1$ . Voici deux séries faites avec  $T_1 = 4^m$  et  $T_1 = 32^m$  :

	$T_1 = 4^m$			$T_1 = 32^m$		
	$v$ .	V.	$v$ .	V.	$v$ .	V.
$L'_0$ .....	3353	3360	3360	3403	3420	3430
$L_3$ .....	3213	3219	3220	3237	3251	3260
$L_1 - L_0$ .....	4968	4922	4989	4965	5048	5012
$\Delta_2$ .....	41	67	40	66	38	63
$\Delta_3$ .....	47	61	46	59	43	60
$\Delta_4$ .....	49	56	47	53	42	52
$\Delta_5$ .....				47	41	44
$\Delta_6$ .....				41	38	38
$\Delta_7$ .....				40	37	33
$\Delta$ .....	137	184	133	306	239	292
$L'_1 - L_3$ .....	5105	5106	5121	5271	5287	5302

Pour  $T_1 = 4^m$ ,  $L'_i - L_0$  est plus petit pour V que pour  $v$ , étant tenu compte, bien entendu, de la variation continue de cette quantité. C'est l'inverse pour  $T_1 = 32^m$ , ce qui s'explique aisément.

Voici les valeurs moyennes du rapport  $\Delta_v : \Delta_v$  :

$$T_1 = 4^m \dots \dots 1,36 \quad T_1 = 16^m \dots \dots 1,27 \quad T_1 = 32^m \dots \dots 1,25.$$

7. *Influence d'un allongement de courte durée.* —  $P_1 = 400$ ,  $L_0 = 2570$ ,  $T_1 = 32^m$ . Fil unique.

On décrit des cycles séparés par des temps  $T_0$  sous charge  $P_0$  de très longue durée. On donne, dans le Tableau suivant, les  $L_0$ ,  $L_1 - L_0$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta$  (entre  $30^s$  et  $32^m$ ) pour les réactivités de charge et de décharge :

$T_0$ .	$L_0$ .	$L_1 - L_0$ .	Charge.		Décharge.	
			$\Delta_1$ .	$\Delta$ .	$\Delta_1$ .	$\Delta$ .
	2570	2200	209	463	77	128
$17^h$ .....	2662	2318	159	374	91	127
$21^h$ .....	2668	2342	157	353	96	123

On allonge pendant 1 minute à la longueur 11570 ( $\Delta = 4,5$ ).

$h$						
29..	2771	2679	168	401	91	130
17.....	2779	2641	180	411	89	142
24.....	2769	2641	171	393	97	133
7.....	2773	2677	162	371	91	128
16.....	2771	2629	177	385	91	131

Donc l'allongement momentané produit un accroissement de réactivité.

A mesure que le nombre des parcours augmente, le cycle se fixe. L'influence de la variation de  $T_0$  apparaît nettement pour  $T_0 = 7^h$ ,  $\Delta = 371$ ;  $T_0$  devenant égal à  $16^h$ ,  $\Delta$  augmente à 385.

La seconde série des  $\Delta_1$  et des  $\Delta$  tend vers des nombres plus grands que la première : l'accroissement produit par l'allongement n'est donc pas seulement momentané.

8. *Modification complète de la loi de réactivité par une disposition convenable des cycles.* —  $L_0 = 3200$ ,  $T_0 = 1^m$ ,  $T_1 = 32^m$ .

Voici les résultats de l'expérience ; les cycles sont effectués sur un même fil :

$P_1$	$L_1$	$\Delta_0$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$
200.....	4000	102	30	32	34	32	32	32
300.....	4890	124	39	39	39	39	40	41
400.....	6080	146	53	55	56	57	57	58
500.....	7580	150	57	62	63	66	67	69

Repos sous  $P_0$  pendant 120<sup>m</sup>.

$P_1$	$L_1$	$\Delta_0$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$
200.....	4270	90	26	26	28	26	24	23
300.....	5210	111	38	35	35	32	31	31
400.....	6440	130	43	46	43	42	41	41
500.....	7850	120	46	49	49	49	49	50
400.....	6690	110	39	36	30	24	18	16
300.....	5500	106	28	25	17	6	0	— 2
200.....	4570	72	16	10	2	— 3	— 9	— 10

Repos sous  $P_0$  pendant 840<sup>m</sup>.

$P_1$	$L_1$	$\Delta_0$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$
200.....	4250	97	29	30	29	28	27	21
300.....	5190	122	38	38	35	35	32	31
400.....	6450	129	45	46	43	41	40	40
500.....	7870	126	43	48	47	46	46	45

Les résultats précédents s'expliquent par cette règle générale : les effets des grands parcours antérieurs se font plus longtemps sentir avec une intensité déterminée que les effets des petits parcours plus rapprochés dans le temps. Si l'on passait directement de 400 à 300, la réactivité serait d'abord un raccourcissement; si l'on passe de 0 à 300, la réactivité est un allongement. La superposition des deux effets explique le changement de sens constaté.

9. *Réactivité sur une courbe de décharge.* — Fils de longueur  $L_0 = 3040$ .

On donne dans le Tableau suivant : dans la première colonne les  $\Delta$  qui correspondent à une charge de 300<sup>g</sup>.

Sur une série d'autres fils, on fait l'expérience suivante : on charge de  $P_1 = 500^g$  pendant des temps  $T_1$  variables avec le fil; on revient à  $P_2 = 300^g$ , et l'on étudie la réactivité; on trouve les résultats dans les autres colonnes du Tableau :

	Fil directement porté à 300 <sup>g</sup> .	Arrêt $T_1$ à 500 <sup>g</sup> .		
		0 <sup>m</sup> .	8 <sup>m</sup> .	2 <sup>h</sup> .
$L_1 - L_0$ .....	»	4880	4245	5595
$L'_1 - L_0$ .....	»	4880	4827	6642
$L_2 - L_0$ .....	2100	2690	2685	3820
$(L_2 - L_0) : (L_1 - L_0)$ .....	»	0,551	0,632	0,686
$\Delta_1$ .....	163	-46	-74	-83
$\Delta_2$ .....	58	-4	-18	-27
$\Delta_3$ .....	62	-5	-19	-29
$\Delta_4$ .....	64	+15	-13	-27
$\Delta_5$ .....	61	+27	-4	-22
$\Delta_6$ .....	61	+33	0	-13
$\Delta_7$ .....	59	+34	+11	0
$\Delta_8$ .....	55	»	»	»
$T'$ .....	»	1 <sup>m</sup>	12 <sup>m</sup>	100 <sup>m</sup>

Ces résultats sont tout à fait analogues à ceux trouvés par l'un de nous pour la torsion des fils métalliques (réactivité en un point d'une courbe de détorsion, *Mémoire sur les courbes de déformation*, Chap. VII). Voici comment on peut les expliquer.

En définitive, le mouvement doit toujours être un allongement, quelle que soit la charge et quelles qu'aient été les déformations antérieures, pourvu que l'on attende un temps suffisant.

Au début de la réactivité sous 300<sup>g</sup>, il doit exister toujours un raccourcissement, puisque l'on arrive à 300<sup>g</sup> par charges décroissantes.

Enfin, la partie de la réactivité à 300<sup>g</sup> qui est sous la dépendance de la charge 500<sup>g</sup> et qui est un raccourcissement d'après ce que nous venons de voir,

augmente à mesure que le temps  $T_1$  passé sous 500<sup>e</sup> augmente. *Donc il existe toujours une inversion.*

Le temps  $T'$  qui s'écoule entre l'imposition de la charge 300<sup>e</sup> et l'inversion augmente à mesure que  $T_1$  augmente;  $T'$  est d'abord plus long que  $T_1$ ; il devient ensuite égal, puis plus petit, à mesure que  $T_1$  augmente.

Les  $\Delta_1$  trouvés pour 300<sup>e</sup> après que l'on a été à 500<sup>e</sup> sont toujours plus petits que ceux que l'on obtiendrait sur un fil neuf en allant directement à 300<sup>e</sup>.

Enfin, la longueur  $L_2$  est toujours plus grande sur la courbe de décharge que sur la courbe de charge, ce qui est conforme à ce que nous savons sur la forme de ces courbes. La forme de la courbe de décharge est modifiée par l'arrêt  $T_1$ ; la longueur  $L_2$  augmente à mesure que  $T_1$  croît.

*N.-B.* — Si les cordes étaient identiques, les nombres de la première ligne seraient égaux; on voit combien peu il est possible de compter sur un diamètre uniforme, même pour des cordes prises à la suite les unes des autres sur le même paquet.

On pourrait multiplier à l'infini les expériences analogues à la précédente, en faisant varier les divers paramètres  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $T_1$ . Ce qui précède suffit pour en faire prévoir le résultat général.

Il est clair, par exemple, que, si l'on diminue la différence  $P_1 - P_2$ , on diminuera la tendance au raccourcissement sous  $P_2$  et par conséquent le temps  $T'$ .

**10. Réactivité sur une courbe de charge parcourue après une charge et une décharge (seconde courbe de charge).** — Nous allons trouver une double inversion.

$P_1 = 500$ ,  $T_1$  variable avec le fil. Le reste de l'expérience est le même pour tous les fils. On revient à  $P_0$ ,  $T_0 = 0$ ; on recharge jusqu'à  $P_2 = 300$  et l'on étudie la réactivité.

$T_1$	0 <sup>e</sup> .	10 <sup>e</sup> .	32 <sup>e</sup> .	128 <sup>e</sup> .	760 <sup>e</sup> .
$L_1 - L_0$ . . . . .	4280	5465	4490	4980	5620
$L_2 - L_0$ . . . . .	4280	6181	5340	6089	6928
$L_1 - L_0$ . . . . .	230	390	390	480	590
$L_2 - L_0$ . . . . .	2030	3110	2510	2950	3590
$(L_2 - L_1) : (L_1 - L_0)$	0,474	0,568	0,559	0,590	0,638
$(L_2 - L_1) : (L_2 - L_0)$	0,474	0,503	0,470	0,483	0,518
$\Delta_1$ . . . . .	87	80	82	79	92
$\Delta_2$ . . . . .	22	21	16	20	22
$\Delta_3$ . . . . .	22	18	10	8	17
$\Delta_4$ . . . . .	24	12	2	4	10
$\Delta_5$ . . . . .	29	9	0	3	0
$\Delta_6$ . . . . .	35	11	0	-1	-7
$\Delta_7$ . . . . .	35	15	0	-4	-13
$\Delta_8$ . . . . .	39	21	6	-7	-17
$\Delta_9$ . . . . .	43	2	2	-3	-16
$\Delta_{10}$ . . . . .	2	2	2	-3	2

Pour  $T = 0$ , minimum à peine marqué et tout à fait au début. Ce minimum est très net pour  $T_1 = 16^m$ ; il est nul et prolongé pour  $T_1 = 32^m$ .

Pour  $T_1 = 128^m$ , on constate deux inversions. Enfin, pour toutes les valeurs de  $T_1 > 128$ , on constaterait aussi deux inversions, si l'on avait la patience d'attendre un temps suffisant, généralement considérable.

Les résultats précédents pouvaient aisément se prévoir grâce aux principes suivants.

A la fin du phénomène, il doit toujours exister un allongement, puisque l'on parvient à 300<sup>g</sup> par charges croissantes. Donc il y a nécessairement pas d'inversion ou deux inversions.

L'influence de la réactivité qui est encore sous la dépendance de 500<sup>g</sup> doit produire un raccourcissement, pourvu que l'action de cette charge soit assez prolongée.

Les temps  $T'$  et  $T''$  d'inversion sont d'abord confondus ( $T_1 = 32^m$ ), augmentant ainsi que leur différence, à mesure que  $T_1$  croît. L'augmentation de  $T'$  est beaucoup plus petite que celle de  $T''$ .

La position de la seconde courbe de charge est sous la dépendance de  $T_1$ , comme le montre la variation du rapport  $(L_2 - L_0) : (L_1 - L_0)$ . Moyenne, 0,566. Différences avec la moyenne  $-92, +2, -7, +24, +72$ .

L'expérience complexe de Kohlrausch rentre dans la définition générale précédente, si on la dépouille de tout ce qu'une technique rudimentaire lui donne de complexe. Elle doit donner deux inversions et non pas une comme l'indique cet auteur.

En effet, Kohlrausch part d'une tension  $4^{g,1}$  (voir p. 288) que nous pouvons appeler  $P_1$ . Il la ramène à une tension moindre  $P_0$  en deux temps, d'abord en supprimant un poids de  $0^{g,1}$ , puis en raccourcissant le fil à la main. Enfin il réinstalle une charge  $P_2 = 4^g$  supérieure à  $P_0$ , mais inférieure à  $P_1$ .

On pourrait varier à l'infini les expériences de ce numéro, puisque l'on a à sa disposition les paramètres  $P_0, P_1, P_2, T_1, T_0$ . Ce qui précède suffit à faire prévoir les résultats dans tous les cas.

#### RÉACTIVITÉ APRÈS RECUIT ET A HAUTE TEMPÉRATURE.

11. *Recuit à 150°.* — On prépare le fil par trois parcours  $P_1 = 500$ ,  $T_0 = 5^m$ ,  $T_1 = 16^m$ . On le laisse reposer 24 heures, On le recuit pendant 30 minutes et l'on fait une nouvelle série de trois parcours identiques aux premiers, un temps variable après la sortie de l'étuve. Le fil I sert de témoin et n'a pas été recuit, II est essayé 10 minutes après la sortie de l'étuve; III, 6 heures après; IV, 24 heures après. Les Tableaux suivants sont construits en appelant 1000 la réactivité

*Fac. de T., 2° S., V.*

entre 30<sup>e</sup> et 16<sup>m</sup> pour le premier essai, et en calculant les réactivités des autres parcours par rapport à celle-là. De même, on appelle 1000 l'allongement sur la courbe de charge du premier parcours, quand on impose 500<sup>g</sup>; on calcule les autres par rapport à celui-là.

*Réactivités.*

I.....	1000	551	499	710	497	472
II.....	1000	551	495	712	359	319
III.....	1000	574	516	655	357	328
IV.....	1000	556	499	673	356	323

L'effet du recuit est énorme et à peu près indépendant du temps qui s'écoule entre la sortie de l'étuve et l'essai; la réactivité est diminuée. Mais à 150° le fil se transforme notablement, il devient noir; abandonné longtemps à 150°, il devient rugueux, cassant; il se recouvre d'une couche rigide, qu'un allongement gerce.

*Allongements.*

I.....	1000	1089	1110	1077	1117	1126
II.....	1000	1075	1096	998	1037	1041
III.....	1000	1076	1095	943	991	997
IV.....	1000	1083	1105	823	879	891

Le parcours est diminué par le recuit et cette diminution augmente à mesure que le temps qui sépare l'essai de la sortie de l'étuve augmente. On pourra comparer ces résultats avec ceux du Mémoire précédent n° 10. Nous avons vu que l'effet du recuit pouvait être une diminution du parcours et que le temps qui sépare l'essai de la sortie de l'étuve intervient. Il y a donc concordance dans les résultats généraux; les expériences sont effectuées dans des conditions très différentes, et la transformation de la matière à 150° est telle que des comparaisons numériques paraissent impossibles. A mesure que la température du recuit s'abaisse, les résultats donnés par les deux techniques deviennent plus comparables.

12. *Recuit à 100°.* — Même technique. Le fil I sert de témoin, II est essayé 14<sup>m</sup>, III est essayé 28<sup>h</sup> après la sortie de l'étuve :

*Réactivités.*

I.....	1000	556	487	738	497	466
II.....	1000	543	483	866	535	485
III.....	1000	541	477	916	560	497

Ainsi le recuit augmente les  $\Delta$ .



L'effet du recuit ne diminue pas avec le temps qui s'écoule entre la sortie de l'étuve et l'essai; il augmente même notablement.

*Allongements.*

I.....	1000	1080	1101	1083	1116	1125
II.....	1000	1081	1106	1330	1365	1353
III.....	1000	1081	1103	1055	1122	1147

Le parcours est augmenté par le recuit; l'effet diminue quand le temps qui s'écoule entre la sortie de l'étuve et l'essai augmente. C'est de tous points conforme avec ce que nous avons vu dans le Mémoire précédent n° 11.

*Mêmes expériences. On opère sur des parcours de diverses amplitudes. —* Recuit 30<sup>m</sup> à 95°. Les fils I sont essayés 10<sup>m</sup> après la sortie de l'étuve, les fils II 24<sup>h</sup> après.

*Allongements.*

300	I.....	1000	1066	1082	1331	1374	1355
	II.....	1000	1065	1086	1082	1137	1158
500	I.....	1000	1077	1098	1321	1350	1331
	II.....	1000	1077	1098	1139	1202	1224
700	I.....	1000	1077	1101	1262	1287	1269
	II.....	1000	1077	1099	1045	1106	1129

*Réactivités.*

300	I.....	1000	600	553	1105	724	665
	II.....	1000	602	553	1093	698	635
500	I.....	1000	546	495	880	542	504
	II.....	1000	562	505	991	610	551
700	I.....	1000	559	492	867	566	513
	II.....	1000	548	484	904	583	528

Les réactivités, sauf pour  $P_1 = 300$ , augmentent quand le temps qui sépare l'essai de la sortie de l'étuve augmente, conformément à ce que nous avons dit plus haut. Les allongements diminuent.

On remarque que les parcours de la seconde série (après recuit) ne se fixent pas de même pour les fils I et II. Les allongements ont un maximum pour les fils I et n'en ont pas pour les fils II. Ce résultat peut tenir précisément à la diminution de l'effet du recuit avec le temps: il peut se faire sentir pour les fils I d'un parcours à l'autre, et il est insensible pour les fils II d'un parcours au suivant.

*V.-B.* — Si les cordes étaient identiques, les lignes I et II des trois premières colonnes seraient identiques pour le même  $P_1$ .

13. *Recuit à 60°.* — Même technique. Le fil I sert de témoin, II est étudié 5<sup>m</sup> après la sortie de l'étuve; III, 3<sup>h</sup>; IV, 48<sup>h</sup>. Quatre jours après les premiers parcours de préparation, on fait une troisième série de 3 cycles; enfin, 12 jours après les premiers parcours, on décrit une quatrième série.

*Allongements sur la courbe de charge.*

P = 500.

I.....	1000	1080	1101	1086	1115	1127	1095	1127	1137	1107	1137	1147
II... ..	1000	1081	1102	1151	1182	1193	1137	1174	1186	1148	1182	1194
III.....	1000	1076	1096	1105	1151	1165	1124	1156	1168	»	»	»
IV.....	1000	1082	1105	1090	1147	1168	1141	1173	1186	1144	1181	1193
Moyenne..		1080	1101				1134	1168	1180			

La moyenne est celle des nombres des trois dernières lignes.

Le recuit allonge le parcours d'une manière en grande partie permanente. Le temps qui s'est écoulé entre la sortie de l'étuve et le second essai influe très peu sur les résultats des essais suivants. Les trois fils tendent vers des propriétés identiques qui dépendent de la durée du recuit : une partie de la modification due au recuit est subpermanente.

*Réactivités.*

I.....	1000	564	504	730	508	477	724	499	473	747	506	473
II.....	1000	565	504	802	547	506	782	527	489	782	523	487
III.....	1000	549	488	826	533	486	743	503	467	»	»	»
IV.....	1000	582	511	891	566	511	766	523	488	793	523	489
Moyenne..		565	501	840	550	501	762	518	481			

Le recuit augmente la réactivité d'une manière permanente.

Comparons maintenant aux moyennes les nombres qui correspondent aux fils recuits.

Dans la première série (préparatoire), les nombres du fil II sont égaux à la moyenne; ils lui sont inférieurs dans la seconde et supérieurs dans la troisième. Or, cette circonstance ne se présente que pour le fil II essayé 5<sup>m</sup> après la sortie de l'étuve. Pour les deux autres fils, les nombres sont tous ou supérieurs ou inférieurs à la moyenne. Donc, si l'effet du recuit est d'accroître la réactivité, cet effet augmente avec le temps à partir du moment où le fil sort de l'étuve.

Autrement dit : admettons deux effets, l'un permanent, l'autre subpermanent qui disparaît peu à peu. Le premier est une augmentation de la réactivité, le second est une diminution plus petite, qui se superpose à l'augmentation et atténue d'abord l'effet du recuit.

14. *Effets non permanents du recuit.* — Nous venons de voir le recuit pro-

duire des effets permanents, transformer plus ou moins la matière. Il peut aussi modifier d'une autre manière la réactivité. Voici une expérience qui le prouve.  $T_0 = 0$ ;  $T_1 = 16^m$ ;  $P_1 = 500$ . On donne  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta$  pour une série de parcours accomplis avec le même fil. Le  $L_0$  initial est 3000; les autres sont les longueurs de retour à  $P_0$ .

$L_0$ .	$L_1$ .	$\Delta_1$ .	$\Delta$ .
3000	7400	237	535
3380	8070	114	215
3430	8210	97	180
3450	8280	93	158
3450	8320	95	155
3430	8340	96	159

On arrête alors sous  $P_0$  pendant  $80^m$ .

$L_0$ .	$L_1$ .	$\Delta_1$ .	$\Delta$ .
3157	8040	138	324
3400	8320	96	173
3430	8380	92	158

On porte alors à  $60^\circ$  pendant  $25^m$ ; on laisse refroidir  $30^m$ .

$L_0$ .	$L_1$ .	$\Delta_1$ .	$\Delta$ .
3142	8530	190	470
3500	9020	101	227
3550	9120	96	197
3580	9170	100	188
3590	9210	99	182
3620	9240	100	178

Le recuit produit, à un certain point de vue, l'effet d'un arrêt plus prolongé sous la charge  $P_0$ . En moins de 1 heure,  $\Delta$  se trouve ramené à 470. La limite est d'ailleurs augmentée par le recuit; elle passe de 158 à 178.

15. *Influence de la température actuelle.* —  $P = 500$ ,  $T_0 = T_1 = 16^m$ . Quand le temps  $T_0$  est écoulé, on chauffe ou l'on refroidit, de manière à faire un essai toutes les heures. On opère à  $13^\circ$  et à  $60^\circ$ . On obtient donc des expériences croisées sur un même fil à ces deux températures. On donne, dans le Tableau suivant, les longueurs  $L_0$  et  $L_1$  de la courbe de charge, les  $\Delta_1$  et  $\Delta$  à  $P_1$  et à  $P_0$ .  $L_0 = 3200$  :

Froid.						Chaud.					
L <sub>0</sub> .	L <sub>1</sub> .	Charge.		Décharge.		L <sub>0</sub> .	L <sub>1</sub> .	Charge.		Décharge.	
		Δ <sub>1</sub> .	Δ.	Δ <sub>1</sub> .	Δ.			Δ <sub>1</sub> .	Δ.	Δ <sub>1</sub> .	Δ.
3246	7460	170	390	96	123	3257	8010	147	397	71	107
3321	8410	200	477	109	151	3313	8230	95	281	56	97
3349	8580	185	449	100	148						

Le parcours avait été déjà en partie fixé à froid avant la première des expériences que nous venons de rapporter. Le premier parcours à chaud recuit le fil; ce n'est donc qu'après ce parcours que la comparaison devient utile. En d'autres termes, nous ne devons considérer dans nos conclusions que les trois derniers parcours.

La réactivité est plus petite à 60° qu'à 13°.

Les allongements  $L_1 - L_0$ , pendant la charge, sont plus petits à chaud qu'à froid.

La loi de réactivité est modifiée; il y a, à chaud, une importance plus grande des  $\Delta_n$  à de grands numéros d'ordre. Pour les quatre derniers parcours, les rapports  $\Delta : \Delta_1$  ont les valeurs suivantes qui prouvent que, à chaud,  $\Delta$  a plus d'importance devant  $\Delta_1$  qu'à froid :

Froid.		Chaud.	
Charge.	Décharge.	Charge.	Décharge.
2,38	1,39	2,70	1,51
2,43	1,48	2,96	1,73

On peut prendre la question autrement. La moyenne des allongements sur la courbe de charge à froid, pour les deux derniers parcours, est 5160; pour le second parcours à chaud, l'allongement est 4917; la différence est 243. Ajoutons à ces allongements l'allongement pendant les 16<sup>m</sup> sous charge  $P_1$ . La moyenne pour les deux derniers parcours à froid est  $5160 - 463 = 5623$ ; pour le second, il est  $4717 \div 281 = 5198$ ; la différence est 425.

Elle a donc augmenté, contrairement à l'affirmation de Kohlrausch qui veut que les allongements tendent l'un vers l'autre. Mais cette augmentation est plus grande pour les premiers  $\Delta$  que pour des  $\Delta$  de numéros d'ordre élevé.

*Mêmes expériences sur un nouveau fil et pour des charges différentes.* —  $T_0 = T_1 = 16^\circ$ ;  $P_1 = 500$ . Essai toutes les heures. Températures : 60° et 10°.

On donne les allongements sur les courbes de charge produites par l'imposition de la charge  $P_1$ , et les  $\Delta_1$  et  $\Delta$  pour la charge et la décharge :

P <sub>1</sub> .	Froid.					Chaud.				
	Allon- gements.	Charge.		Décharge.		Allon- gements.	Charge.		Décharge.	
		Δ <sub>1</sub> .	Δ.	Δ <sub>1</sub> .	Δ.		Δ <sub>1</sub> .	Δ.	Δ <sub>1</sub> .	Δ.
200 <sup>s</sup>						1150	77	134	50	49
	1123	119	189	73	85	1162	61	107	40	47
	1170	110	180	77	81					
400 <sup>s</sup>						3668	133	298	57	80
	4053	172	410	"	"	3766	87	235	51	77
	4136	172	386	91	129					
600 <sup>s</sup>						7182	133	391	60	90
	8000	157	423	"	158	7408	75	236	53	39
	8144	143	398	113	158					
200 <sup>t</sup>						1288	56	90	41	51
	1329	112	189	76	83	1260	61	100	40	57
	1334	108	182	72	83					

La réactivité et les allongements pendant la charge sont plus petits à chaud.

L'influence des parcours les uns sur les autres est nettement montrée par la comparaison de la première série et de la dernière. Pour comprendre la première, on n'oubliera pas que le fil n'avait jamais servi.

16. *Influence de la manière de croiser les expériences à deux températures différentes.* — Il est bien entendu que les résultats précédents ne valent que pour l'ensemble de parcours que nous avons choisi. Nous pouvons formuler comme suit la technique générale. Nous faisons varier périodiquement la température et la charge, nous cherchons quelle est l'expression de la longueur en fonction de ces variables. Un principe général nous apprend qu'après un petit nombre de périodes, elle sera elle-même périodique. Les phénomènes ne dépendent donc pas seulement des deux températures extrêmes et des charges P<sub>0</sub> et P<sub>1</sub>, ils dépendent de la manière suivant laquelle nous combinons ces températures et ces charges : nous aurons donc une infinité d'effets différents du passage d'une des températures à l'autre, suivant la fonction périodique choisie.

Voici une expérience qui fera comprendre ce qui précède.

Nous décrivons des parcours P<sub>1</sub> = 500, T<sub>1</sub> = 16<sup>m</sup> en croisant les expériences à 16° et à 60°. Nous faisons deux séries d'expériences. Dans la première, les expériences sont distantes de 40<sup>m</sup>. On impose P<sub>1</sub>, on attend 16<sup>m</sup>, on revient à P<sub>0</sub>, on attend 2<sup>m</sup> et l'on chauffe. Quand 40<sup>m</sup> sont écoulées depuis le début de la précédente expérience, soit environ après une chauffe de 15<sup>m</sup>, on impose P<sub>1</sub>, on attend 16<sup>m</sup>, on revient à P<sub>0</sub>, on attend 2<sup>m</sup> et l'on refroidit. Et ainsi de suite.

Dans la seconde série et à un autre fil on impose  $P_1$ , on attend  $16^m$ , on revient à  $P_0$ , on attend  $2^m$  et l'on chauffe. On laisse maintenant s'écouler  $2^h$  depuis le début de la précédente expérience, ce qui revient à chauffer  $1^h35^m$ . On impose alors  $P_1$ , on attend  $16^m$ , on revient à  $P_0$ , on attend  $2^m$  et l'on refroidit. On laisse s'écouler  $2^h$ , ..., et ainsi de suite.

L'expérience montre que le rapport des  $\Delta$  à  $16^\circ$  et à  $60^\circ$  n'est pas le même dans les deux séries. On trouve 1,66 pour la première et seulement 1,40 pour la seconde.

#### COEFFICIENT DE DILATATION.

17. La question du coefficient de dilatation du caoutchouc est loin d'être éclaircie. Joule et Lord Kelvin ont su déduire de leurs expériences des résultats si fondamentaux, qu'on ne s'inquiète pas de connaître la valeur de ces expériences. Il y a présomption pour que *toutes* soient parfaites. Il est cependant incontestable que celles de Joule sur la dilatation du caoutchouc sont incorrectes et grossièrement; on en jugera par ce qui suit.

Joule prend du caoutchouc (*Phil. Trans.*, 1859, p. 105), le charge n'importe comment d'un poids connu, le chauffe suivant une loi inconnue et le refroidit de même. Il obtient dans le plan des longueurs-températures une certaine courbe dont les branches ascendantes et descendantes ne sont ni superposées ni rectilignes. Il prend la moyenne générale des coefficients angulaires et donne le résultat comme coefficient de dilatation. Il espère ainsi éliminer les erreurs qui proviennent de l'allongement permanent du caoutchouc. Il modifie la charge, recommence une nouvelle série sur le même caoutchouc ..., et ainsi de suite.

Cette méthode est grossièrement incorrecte. Voici, en unités arbitraires, les coefficients moyens de dilatation pour la courbe ascendante et pour la courbe descendante :

Poids.	Températures	
	croissantes.	décroissantes.
14 livres . . . . .	31	290
7 livres . . . . .	237	— 20
21 livres . . . . .	80	232
28 livres . . . . .	509	796
35 livres . . . . .	954	1250
42 livres . . . . .	1160	1630

Joule remarque lui-même que les résultats incohérents obtenus pour 14 et 7 livres doivent tenir à ce que la charge de 7 livres a été imposée après celle de 14 livres. Mais de cette remarque il aurait dû conclure qu'il n'y avait aucune raison pour que les autres parcours n'influassent pas aussi les uns sur les autres, la particularité qui se présente pour 14 et 7 livres ayant simplement décelé un phénomène qui aurait pu rester inaperçu.

Il n'en prend pas moins des moyennes entre 31 et 290, entre 237 et -20, et trouve ensuite des résultats numériques qu'il dit conformes avec la Thermodynamique.

La colonne du Tableau d'où résulterait cette concordance (p. 107) est assez singulière. Elle a pour titre : *Résultat expérimental, corrigé de l'allongement du caoutchouc produit par l'usage*. C'est à cette correction, dont nous n'arrivons pas à saisir la base, que sont dues les concordances; car les deux colonnes où se trouvent inscrits les résultats théoriques et les résultats expérimentaux déjà corrigés, comme on l'a vu, donnent les nombres suivants (en unités arbitraires) :

Théorie.....	-2	4	9	18	35	50
Expérience.....	4	3	15	39	42	42

ce qui est discutable comme vérification. On peut tout au plus dire que les deux séries de nombres sont l'une et l'autre croissantes.

18. Tant s'en faut d'ailleurs que les formules classiques de la Thermodynamique soient applicables au caoutchouc. Elles supposent essentiellement que la longueur est une fonction bien déterminée de la température et de la charge. Soit  $dL = \alpha dt + \varepsilon dP$ ; elles reposent sur l'hypothèse que  $\alpha$  et  $\varepsilon$  sont des fonctions déterminées des variables  $P$  et  $t$ , satisfaisant de plus à la condition  $\frac{\partial \alpha}{\partial P} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ .

Nous savons, de reste, que les courbes de traction ne peuvent pas être tracées à l'avance et une fois pour toutes dans le plan longueur-charge; il est donc bien certain que la fonction  $\varepsilon$  n'existe pas. L'expérience de Joule suffirait à montrer que la fonction  $\alpha$  n'existe pas davantage; en d'autres termes, que l'on ne saurait déduire des courbes tracées dans le plan longueur-température le coefficient de dilatation. Ces courbes ont, d'ailleurs, été jusqu'à présent fort peu et fort mal étudiées, et nous nous proposons de revenir sur elles dans un prochain Mémoire.

Nous ne voulons pas dire, dans les lignes précédentes, qu'il est impossible de définir un coefficient de dilatation et un module d'élasticité, mais simplement qu'il y a une convention préliminaire à faire sur la forme et la nature des cycles qui serviront à ces définitions, et qu'il n'est pas plus permis de déduire le *coefficient de dilatation sous une charge donnée*, de l'allongement moyen entre deux températures données quand la charge reste constante, qu'il n'est légitime de déduire le *module d'élasticité à température constante*, de l'allongement moyen entre deux charges données, quand la température est constante. Il serait d'ailleurs tout aussi incorrect, dans l'un ou l'autre cas, de déduire ces coefficients de la valeur des coefficients angulaires en un point d'une courbe du plan longueur-charge, ou du plan longueur-température, puisque nous savons que, par

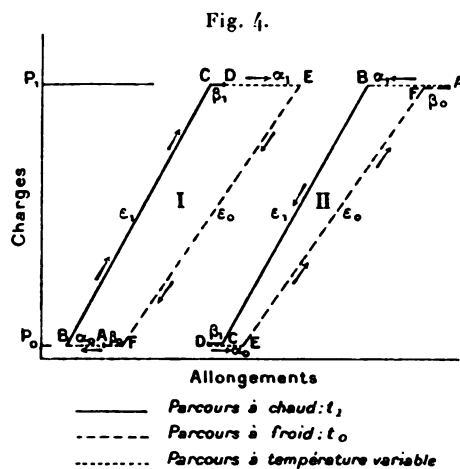
un point quelconque de ces plans, on peut faire passer une infinité de lignes d'inclinaisons différentes.

Dire toutes les conséquences absurdes qu'on a voulu déduire de la formule

$$(1) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial P} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

n'est pas ici dans notre sujet. Nous nous bornerons à prouver, d'une manière indiscutable, que la longueur n'est pas une fonction bien déterminée de la température et de la charge, même comme première approximation. *En d'autres termes, suivant la technique, on obtient des coefficients moyens  $\alpha$  et  $\varepsilon$  à peu près quelconques.*

19. Nos expériences consistent à décrire un cycle en fonction des deux variables, charge et température. Nous suivons exactement, dans les opérations, le procédé par lequel les mathématiciens démontrent que la relation (2) exprime que  $dL$  est une différentielle exacte. Il y a deux techniques, suivant que le cycle est parcouru dans un sens ou dans le sens inverse. Soient  $P_0$ ,  $P_1$  les charges extrêmes;  $t_0$ ,  $t_1$  les températures extrêmes. La première technique (*fig. 4, I*)



consiste à faire croître à chaud (température  $t_1$ ) la charge de  $P_0$  à  $P_1$  (parcours BC); à attendre un certain temps à charge et température constantes  $P_1$ ,  $t_1$  (parcours CD); à refroidir jusqu'à  $t_0$  et à attendre un certain temps sous  $P_1$ ,  $t_0$  (parcours DE); à diminuer la charge de  $P_1$  à  $P_0$ , à température constante  $t_0$  (parcours EF); à attendre un certain temps sous  $P_0$ ,  $t_0$  (parcours FA); à réchauffer jusqu'à  $t_1$  et à attendre un certain temps (parcours AB). Nous désignerons par  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  les allongements à charge constante le long des parcours DE



et AB; par  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_1$  les allongements à température constante le long des parcours EF et BC; par  $\beta_0$  et  $\beta_1$  les allongements à charge et température constantes qui suivent les allongements désignés par  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_1$ .

La seconde technique (*fig.* 4, II) est identique à la première, mais le parcours se fait en sens inverse. Le long des parcours BC et EF les charges croissent et décroissent, comme pour toutes les expériences de ce Mémoire, de manière que les allongements varient proportionnellement au temps; en réalité, c'est la vitesse d'allongement qu'on impose. Les courbes BC et EF ne sont figurées que schématiquement et ne sont pas effectivement rectilignes. La vitesse d'allongement utilisée est de 1<sup>m</sup> en 173<sup>s</sup>. On s'arrange pour parvenir aux points B, D, E, A de 15<sup>m</sup> en 15<sup>m</sup>. Ce temps suffit largement pour amener le caoutchouc de la température  $t_0$  à la température  $t_1$ , ou inversement, le long des parcours DE, AB.

L'expérience précédente donnera des coefficients moyens  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1$  dans des conditions particulières. Nous les comparerons aux mêmes coefficients déterminés en fixant séparément les côtés du cycle. On produit des tractions rythmées de période  $T = 134^s$ , de telle sorte que la charge oscille entre  $P_0$  et  $P_1$  à température constante. On utilise le mouvement oscillatoire d'une plate-forme mue par un excentrique pour soulever un poids  $P_1 - P_0$  suspendu au fil et, par conséquent, décharger le fil d'autant, ou pour l'abaisser et, par conséquent, recharger le fil. L'amplitude de l'oscillation est réglée, par rapport à l'allongement du fil, de manière que les charges  $P_0$  et  $P_1$  ne soient réalisées que pendant une petite fraction de la période. Pendant le reste le fil s'allonge et se raccourcit automatiquement suivant une loi à peu près sinusoïdale par rapport au temps. Nous obtiendrons ainsi deux nouveaux coefficients  $\epsilon'_0$  et  $\epsilon'_1$ , suivant que la température constante est  $t_0$  ou  $t_1$ .

Nous produirons de même, à charge constante, des cycles de température : la température passe, de 15<sup>m</sup> en 15<sup>m</sup>, de  $t_0$  à  $t_1$ , ou inversement. Nous obtenons ainsi deux nouveaux coefficients moyens  $\alpha'_0$  et  $\alpha'_1$ , suivant que la charge est  $P_0$  ou  $P_1$ .

Voici maintenant le résultat des expériences; on ne donne que ce qui se rapporte aux cycles à peu près fixés.

20. *Premier fil.* —  $P_0 = 250$ ,  $P_1 = 450$ ,  $t_0 = 13^\circ$ ,  $t_1 = 80^\circ$ ,  $L_0 = 2570$ .

#### Technique I.

$$\begin{array}{lll} \epsilon_1 = 2147, & \beta_1 = 168, & \alpha_1 = 1192, \\ \epsilon_0 = 2690, & \beta_0 = 183, & \alpha_0 = 567. \end{array}$$

Le cycle n'est pas encore fermé; on a

$$(2147 + 168 + 1192) - (2690 + 183 + 567) = 67.$$

*Technique II.*

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = 2255, & \beta_1 = 87, & \alpha_0 = 461, \\ \varepsilon_0 = 2776, & \beta_0 = 237, & \alpha_1 = 1076. \end{array}$$

Le cycle n'est pas encore fermé, on a :

$$- 2255 - 87 + 461 + 2776 + 237 - 1076 = 56.$$

1°  $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$ . Pour une même variation de charge, l'allongement est plus grand à froid qu'à chaud. Les courbes en traits interrompus sont plus inclinées que les courbes en traits pleins.

2°  $\alpha_0 < \alpha_1$ . Le raccourcissement, pour une même variation de température, est plus grand sous une forte charge.

3° Pour comprendre les valeurs relatives des réactivités, on se rappellera :  $\alpha$ , à chaud la réactivité est plus petite qu'à froid;  $b$ , elle est plus grande quand la charge vient de croître que quand elle vient de décroître.

Dans la technique II les causes précédentes produisent des effets de même sens. Suivant CD, la charge vient de décroître (parcours BC) et l'on est à la température  $t_1$  : on a  $\beta_1 = 87$ . Suivant FA, la charge vient de croître et l'on est à froid, aussi a-t-on  $\beta_0 = 237$ .

Dans la technique I, au contraire, les causes produisent des effets de sens inverses. Suivant CD, la charge vient de croître, mais on est à chaud;  $\beta_1 = 168$ . Suivant FA, la charge vient de décroître, mais on est à froid,  $\beta_0 = 183$ . On a  $\beta_1 < \beta_0$ ; l'effet de la température, qui est une diminution, l'emporte.

Sur le même fil on a modifié le parcours :  $P_0 = 50$ ,  $P_1 = 150$ ,  $t_0 = 13^\circ$ ,  $t_1 = 80^\circ$ .

*Technique I.*

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = 529, & \beta_1 = 47, & \alpha_1 = 165, \\ \varepsilon_0 = 610, & \beta_0 = 79, & \alpha_0 = 42. \end{array}$$

*Technique II.*

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_0 = 579, & \beta_0 = 109, & \alpha_1 = 120, \\ \varepsilon_1 = 534, & \beta_1 = 45, & \alpha_0 = 9. \end{array}$$

On a encore

$$\varepsilon_0 > \varepsilon_1, \quad \alpha_0 < \alpha_1, \quad \beta_1 < \beta_0.$$

21. *Expérience complète. Nouveau fil.* —  $P_0 = 550$ ;  $P_1 = 650$ ;  $t_0 = 13^\circ$ ;  $t_1 = 80^\circ$ ;  $L_0 = 2100$ .

On décrit tout d'abord des cycles à température constante. On donne les tem-

pératures et les heures des essais, ce qui a, comme nous le verrons, une importance considérable.

*Cycles isothermes. — Premier jour.*

$\varepsilon'_0$ .....	8 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup>	738	8.25 <sup>m</sup>	731
$\varepsilon'_1$ (chauffé à 8 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> )...	8.45	977	9.25	998
$\varepsilon'_0$ (refroidi à 9 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> )...	9.35	973	9.55	950
$\varepsilon'_1$ (chauffé à 9 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> )...	10.10	1004	10.25	1010
$\varepsilon'_0$ (refroidi à 10 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> )...	10.40	975	[ repos à 10 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup> sous $P_0$ ] 11 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> , 959; 11 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup> , 929; [ repos à 11 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup> sous $P_0$ ] 1 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> , 875.	

Pour les expériences régulièrement croisées on a  $\varepsilon'_1 > \varepsilon'_0$ . Mais  $\varepsilon'_0$  passe de 975 à 875, simplement en attendant que l'effet du recuit disparaisse peu à peu. La variation de  $\varepsilon'_0$  avant et après le recuit est de 731 à 975, soit de 3 à 4.

*Technique I. — Premier jour, soir.*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1004, & \beta_1 &= 93, & \alpha_1 &= 1158, \\ \varepsilon_0 &= 981, & \beta_0 &= 51, & \alpha_0 &= 1147. \end{aligned}$$

On a maintenant

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_1, \quad \beta_1 > \beta_0.$$

*Technique II.*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1026, & \beta_1 &= 32, & \alpha_0 &= 1006, \\ \varepsilon_0 &= 1028, & \beta_0 &= 118, & \alpha_1 &= 1045. \end{aligned}$$

Bien entendu  $\beta_1 < \beta_0$  : nous savons que cette condition est nécessaire pour la technique II.

MÊME FIL :  $P_0 = 350$ ,  $P_1 = 450$ .

*Cycles isothermes. — Deuxième jour, soir.*

$\varepsilon'_0$ .....	954
$\varepsilon'_1$ (chauffé à 1 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> )...	2 <sup>h</sup> 941
$\varepsilon'_0$ (refroidi à 2 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> )...	2 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 1075
$\varepsilon'_1$ (chauffé à 2 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> )...	939
$\varepsilon'_0$ (refroidi à 3 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> )...	3 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 1096      4 <sup>h</sup> 1081

Abandonné 16<sup>h</sup> sous  $P_0$ ; le lendemain matin du troisième jour : 902.

Maintenant nous avons  $\varepsilon'_1 < \varepsilon'_0$  pour des cycles régulièrement croisés. L'influence du recuit et du temps passé à basse température après le recuit se montre à l'évidence;  $\varepsilon'_0$  passe de 1096 à 902, soit de 1000 à 839. Les valeurs de  $\varepsilon'_1$  sont beaucoup moins variables que les valeurs de  $\varepsilon'_0$  : la transformation de la matière à

chaud influe beaucoup moins sur la valeur des paramètres à chaud que sur leur valeur à froid.

*Technique I.* — Troisième jour, matin.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 926, & \beta_1 &= 67, & \alpha_1 &= 821, \\ \varepsilon_0 &= 1055, & \beta_0 &= 87, & \alpha_0 &= 655.\end{aligned}$$

*Technique II.* — Troisième jour, soir.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 935, & \beta_1 &= 55, & \alpha_1 &= 580, \\ \varepsilon_0 &= 1096, & \beta_0 &= 120, & \alpha_0 &= 793.\end{aligned}$$

*Cycles isothermes.*

$$\begin{array}{llllll} \varepsilon'_1 \dots\dots\dots & 4^h & 958 & & & \\ \varepsilon'_0 \text{ (refroidi à } 4^h 15^m) & 4^h 30^m & 1123 & 4^h 37^m & 1119 & \text{Abandonné } 16^h \text{ sous } P_0. \end{array}$$

Le lendemain, matin du quatrième jour : 929.

Pour compléter l'expérience on refroidit et l'on réchauffe de  $15^m$  en  $15^m$  sous charge constante :

$$\alpha'_0 = 570, \quad \alpha'_1 = 854.$$

Or nous avons obtenu :

*Technique I.*

$$\alpha_0 = 655, \quad \alpha_1 = 821,$$

*Technique II.*

$$\alpha_0 = 580, \quad \alpha_1 = 793.$$

Donc  $\alpha'_0$  est plus petit que le plus petit des  $\alpha_0$  et  $\alpha'_1$  est plus grand que le plus grand des  $\alpha_1$ . En définitive, suivant la technique choisie, on obtient des coefficients  $\alpha$  et  $\varepsilon$  variables dans de larges limites, sans qu'il soit possible de dire qu'une technique se recommande théoriquement de préférence à une autre. Le cycle se ferme approximativement après un petit nombre de parcours, parce que les variables (charge, température) varient périodiquement en fonction du temps; mais la forme des cycles dépend de cette loi de périodicité.

Nous aurons à revenir longuement sur les modules d'élasticité et les coefficients de dilatation.

## EFFET DES TRACTIONS RYTHMÉES SUR LA RÉACTIVITÉ.

22. Nous avons expliqué, au début de ce Mémoire, par quel procédé il est possible de réaliser des tractions rythmées. La méthode consiste essentiellement à imposer à l'extrémité supérieure du caoutchouc une oscillation verticale d'amplitude  $\alpha$  et de période connue. Nous étudierons dans un prochain Mémoire l'ensemble du phénomène. Qu'il nous suffise de dire pour l'instant qu'on modifie aisément l'amplitude de l'allongement périodique du caoutchouc en modifiant la période de la traction imposée. Soit A l'amplitude de l'oscillation de l'extrémité inférieure, l'amplitude de l'allongement périodique est une fonction de  $\alpha$ , de A et de la différence de phase  $\epsilon$  des mouvements oscillatoires des deux extrémités :  $\epsilon$  dépend de la période du mouvement imposé et de la période du mouvement propre de la masse suspendue, quand l'extrémité supérieure est immobile et qu'on suppose les frottements nuls. En faisant varier la période du mouvement imposé, on modifie la grandeur de l'allongement périodique du caoutchouc.

Voici maintenant les résultats.

On parcourt des cycles  $T_0 = 5^m$ ,  $T_1 = 32^m$ ,  $P_1 = 500^g$ . Pour les cycles impairs on maintient immobile l'extrémité supérieure, pour les cycles pairs on lui impose, entre  $30^s$  et  $31^m 30^s$  après l'établissement de la charge  $P_1$ , des oscillations verticales dont l'amplitude est de  $1^{mm},9$ . D'un fil à l'autre on fait varier la période de ce mouvement oscillatoire.

*Premier fil.* — Période  $1^s$ ; le nombre des périodes entre  $30^s$  et  $31^m 30^s$  est 1860. L'amplitude du mouvement oscillatoire de l'extrémité inférieure est de  $1^{mm}$  environ. La longueur initiale du fil est 3000; l'allongement sous  $500^g$  est naturellement variable d'un cycle à l'autre : il vaut  $5700$  en moyenne. Le fil a donc alors  $8700$  environ de longueur et la valeur maxima de l'allongement périodique est voisine de  $38 + 20 = 58$ , soit  $1 : 150$  de la longueur. Voici maintenant les  $\Delta$  entre  $30^s$  et  $32^m$ ; S signifie sans tractions rythmées, A signifie avec tractions rythmées :

S.	S.	A.	S.	A.
456	286	260	244	240

Si l'effet des tractions était absolument nul, on pourrait tracer une courbe unique où les nombres précédents seraient les ordonnées et où l'on prendrait pour abscisses les numéros d'ordre des cycles. On doit tracer effectivement deux courbes, S et A, dont les ordonnées ne diffèrent pas plus de  $1 : 65$ . Voilà l'ordre de grandeur de l'accroissement de  $\Delta$  produit par 1860 tractions.

Après 2 heures de repos, on reprend la même expérience :

S.	S.	A.	S.	A.
329	242	241	233	236

On trace les deux couches ; la différence des ordonnées est de 1 : 50 environ : il y a léger accroissement de  $\Delta$  quand les tractions rythmées sont imposées.

*Second fil.* — Période 1<sup>s</sup> 46<sup>m</sup> ;  $a = 19$  ;  $A = 80$ , la grandeur maxima de l'allongement périodique est  $38 + 160 = 198$ . La longueur moyenne du fil sous 500<sup>g</sup> étant voisine de 8500, le rapport de la grandeur de l'allongement périodique à la longueur est de 1 : 40 environ :

S.	S.	A.	A.
568	287	266	240

Après une nuit de repos, on reprend :

S.	S.	A.	S.	A.	S.
360	251	248	233	242	229

Si nous traçons les courbes des  $\Delta$  avec et sans tractions rythmées, en fonction des numéros d'ordre des cycles de chaque série, comme il a été dit plus haut, nous trouvons une augmentation par les tractions rythmées de 1 : 25 environ.

On modifie la période et on l'amène à 0<sup>s</sup>, 65.  $A$  est immédiatement ramenée à 5. La grandeur maxima de l'allongement est de  $2(19 + 5) = 48$ , soit 1 : 180 de la longueur. Le nombre de périodes entre 30<sup>s</sup> et 31<sup>m</sup> 30<sup>s</sup> est 2860. On trouve pour  $\Delta$  :

S.	S.	A.	S.	A.	S.
354	248	237	233	232	228

L'effet des tractions rythmées est nul.

Nous laissons de côté des particularités du phénomène sur lesquelles nous aurons à revenir dans un prochain Mémoire ; par exemple, une diminution de  $A$  du commencement à la fin de l'expérience, c'est-à-dire à mesure que le nombre des tractions subies par le fil augmente, diminution qui semble indiquer un accroissement du frottement intérieur. Voici les conclusions des expériences précédentes.

La réactivité n'a pas pour cause les trépidations. On serait forcé d'admettre dans cette hypothèse que des trépidations très petites et très nombreuses, non mesurables et dont la possibilité d'existence est douteuse, produisent des effets plus de 100 fois plus grands que 2860 oscillations allongeant périodiquement le fil de 5<sup>mm</sup>. Si d'ailleurs on augmente l'allongement produit par les tractions

rythmées, ce qui revient à augmenter périodiquement la charge  $P_1$ ,  $\Delta$  croît d'une quantité toujours petite et du même ordre que l'accroissement qui résulterait d'une augmentation constante et continue de la charge  $P_1$ , ce qui explique tout naturellement les effets observés. L'hypothèse qu'en augmentant indéfiniment le nombre des trépidations, on augmente leurs effets, est d'ailleurs insoutenable.

Le lecteur se rapportera au Chapitre IX du Mémoire *Sur les courbes de déformation des fils* de M. Bouasse, où il trouvera développées pour les métaux des considérations analogues.

Donc la réactivité a d'autres causes que les trépidations. Mais il y a plus.

Si, comme le veut M. Duhem, on peut tracer à l'avance et une fois pour toutes dans le plan charge-allongement les courbes d'aller et de retour, elles se coupent *sous des angles finis, excepté sur la ligne des états naturels, les trépidations doivent avoir un effet, distinct de celui de la réactivité d'après ce qui précède, et qui ne peut pas être négligeable*. De sorte que le résultat négatif de l'expérience prouve à la fois, *du seul fait qu'il est négatif*, la fausseté des deux hypothèses fondamentales de M. Duhem, c'est-à-dire la fausseté de toute sa théorie.







---

# ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

DES

## ACTIONS PHOTOGRAPHIQUES,

PAR M. C. CAMICHEL.

---

### INTRODUCTION.

L'étude des actions photographiques présente un grand intérêt par elle-même et par ses applications. Parmi celles-ci, j'ai étudié spécialement la Spectrophotométrie.

La Photographie peut rendre de grands services, pour la photométrie des radiations lumineuses, ultra-violettes et même infra-rouges, comme l'a montré M. A. Cotton dans un travail du plus grand intérêt (*Sur la photométrie chimique et photographique* : Congrès de Montauban de l'Association française pour l'avancement des Sciences, août 1902) <sup>(1)</sup>.

Pour se rendre compte de la difficulté des méthodes spectrophotométriques dans l'ultra-violet, il suffit de prendre un exemple : M. Soret a fait des recherches très importantes sur l'absorption des rayons ultra-violettes (*Archives de Genève*, t. IX, 1883); il détermine l'épaisseur sous laquelle cesse d'être perceptible telle ou telle raie d'un métal, que l'on emploie comme source de lumière, et il obtient ainsi une courbe dont les ordonnées sont les épaisseurs du liquide étudié, qui produisent l'extinction des diverses raies métalliques et les abscisses les longueurs d'onde des radiations correspondantes. Ces courbes donnent de précieuses indications sur les variations de l'absorption avec la réfrangibilité et M. Soret a montré tout le parti qu'on pouvait en tirer; mais il reconnaît lui-même que l'on ne peut pas déduire de ces mesures la valeur absolue des coefficients d'absorption, et il énumère les diverses causes d'erreur :

La lumière produite par les étincelles d'induction est variable. L'intensité de la fluorescence, produite par une lumière de réfrangibilité déterminée, ne peut

---

(1) Le Mémoire de M. Cotton est résumé dans le n° 37 de l'*Éclairage électrique*, t. XXXII, septembre 1902.

pas être considérée comme constante en tout temps, au moins lorsqu'on emploie des lames liquides telles que l'esculine. La sensibilité de l'œil varie suivant les circonstances et suivant l'opérateur. Les diverses raies des spectres métalliques sont d'intensités très différentes, d'où résulte qu'à égalité de coefficients d'absorption l'épaisseur amenant l'extinction est plus grande pour les raies très brillantes que pour celles qui le sont moins. L'intensité de la fluorescence est variable suivant la réfrangibilité.

La méthode photographique permet, comme je me propose de le démontrer, de faire des mesures précises dans le spectre ultra-violet; les obstacles à vaincre ne tiennent pas à la méthode, mais à la difficulté de maintenir constantes des sources de lumière ayant un spectre ultra-violet étendu.

Dans le spectre lumineux, pour peu qu'on fasse des mesures photométriques, on constate rapidement la difficulté des mesures dans le bleu et le violet; au contraire, les déterminations se font aisément dans le rouge <sup>(1)</sup>, l'orangé, le jaune et surtout le vert. La Photographie sera donc utile pour les radiations lumineuses les plus réfrangibles.

Enfin, dans l'infra-rouge, on peut, comme M. Cotton l'a proposé <sup>(2)</sup>, utiliser le phénomène découvert par M. Villard : la destruction par les radiations infra-rouges et lumineuses du voile produit sur la plaque photographique par les rayons X.

Pour bien montrer la difficulté des méthodes qui ont été proposées pour la photométrie des radiations lumineuses et ultra-violettes, je citerai un deuxième exemple : l'emploi du mélange de chlore et d'hydrogène.

Bunsen et Roscoe, dans leur travail classique sur cette question, ont constaté qu'il est nécessaire d'employer au moins 3 jours et même plus pour préparer l'appareil avant de commencer les expériences; qu'il faut maintenir la température des gaz parfaitement constante de manière que les changements de volume dus à la dilatation ne se confondent pas avec les effets de l'action chimique; d'ailleurs la présence d'un excès de chlore ou d'hydrogène ou d'un gaz étranger retarde la combinaison du chlore et de l'hydrogène produite par la lumière : ainsi, il suffit de la présence de quelques millièmes en volume de gaz oxygène, hydrogène ou chlore pour produire un effet marqué; le gaz oxygène surtout donne des retards très grands.

Les difficultés de cette méthode sont manifestes.

La méthode photographique présente au contraire une grande simplicité, mais on lui adresse quelques reproches : d'abord, la loi suivant laquelle l'impression

<sup>(1)</sup> Dans mon travail sur les indophénols (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1901), j'ai constaté que l'on pouvait faire de très bonnes mesures dans le rouge, sans aucune fatigue.

<sup>(2)</sup> A. COTTON (*loc. cit.*).

photographique varie avec l'intensité de la radiation est complexe et d'ailleurs inconnue; cette impression dépend de la plaque employée, du voile qu'elle a pu subir, des circonstances du développement, et même, d'après l'opinion la plus répandue, les diverses régions d'une plaque déterminée possèdent des sensibilités tout à fait distinctes, dont on peut dire seulement qu'elles varient d'une façon continue.

Le travail qui va suivre est destiné à répondre à ces diverses objections; je montre que l'on peut instituer une méthode photométrique, fondée sur l'emploi des plaques photographiques, même de celles dont la sensibilité n'est pas constante par suite de leur fabrication, de la nature de l'émulsion, de son épaisseur variable, ou de circonstances accidentelles qui peuvent comme le voile altérer la sensibilité. Cette méthode exige seulement que l'hétérogénéité soit continue dans un intervalle de quelques millimètres, condition qui est toujours largement réalisée; bien plus, l'expérience montre que les plaques que l'on trouve actuellement dans le commerce, par exemple les plaques Lumière, marque bleue <sup>(1)</sup>, sont sauf de très rares exceptions d'une remarquable homogénéité, si l'on a soin d'éliminer soigneusement différentes causes d'erreurs dont la plus grande est la variation de la source de lumière employée pour faire sur une même plaque diverses impressions voisines. Je puis dire que, chaque fois que sur une plaque non voilée, j'ai trouvé une discontinuité notable dans l'homogénéité, j'ai retrouvé dans la source de lumière employée une variation correspondante.

Le travail dont l'exposé va suivre comprend :

I. Une étude du degré d'homogénéité des plaques photographiques du commerce.

II. La description d'une méthode photométrique fondée sur la Photographie.

— Détails expérimentaux :

- a. Source de lumière maintenue constante;
- b. Obturateur permettant de faire des durées de pose bien connues;
- c. Châssis à mouvement micrométrique destiné à un double usage : impressionner la plaque et étudier celle-ci après son développement;
- d. Moyens d'atténuation employés, détermination du zéro d'une fente;
- e. Précautions à prendre dans le développement, choix de la plaque;
- f. Exemple de mesures faites sur une plaque hétérogène ou sur une plaque homogène, par la méthode d'observation directe des noirs et par la méthode de la pile thermo-électrique.

---

(1) La marque violette donne des résultats beaucoup moins bons au point de vue de l'homogénéité.

Cette méthode est due à M. Bouasse, il l'a publiée dans son remarquable Mémoire *Sur les actions photographiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1894). J'ai employé dans mes recherches plusieurs des appareils qui lui avaient déjà servi, en particulier le pendule T (*voir* p. 336), qu'il a mis très gracieusement à ma disposition. On verra que les résultats de M. Bouasse ont été complètement vérifiés par mes expériences.

III. Détermination du degré de précision de la méthode, augmentation de la sensibilité d'une plaque par un voile préliminaire.

IV. Autres méthodes.

## CHAPITRE I.

### ÉTUDE DU DEGRÉ D'HOMOGENÉITÉ DES PLAQUES PHOTOGRAPHIQUES DU COMMERCE.

J'adopterai les définitions de M. Bouasse, relativement aux noirs d'un cliché :

« Soient I l'intensité du faisceau incident, I<sub>1</sub> l'intensité transmise aux points de pose nulle, I<sub>2</sub> l'intensité en un autre point où l'action lumineuse n'a pas été nulle; le noir de ce point est arbitrairement défini par le rapport

$$\frac{I_1}{I_2} - 1 = N.$$

» Soit I<sub>3</sub> l'intensité transmise à travers le verre dépouillé de sa gélatine, le nombre

$$\frac{I_3}{I_1} - 1 = V$$

donne une idée nette du voile du cliché : on doit tâcher qu'il soit voisin de 0. L'unité avec laquelle on mesure les intensités est arbitraire. » (*Bouasse, loc. cit.*)

Pour étudier l'homogénéité, on peut d'abord employer la méthode suivante : exposer une plaque photographique devant une source de lumière suffisamment éloignée pour produire un éclaircissement constant en tous les points de la gélatine. La plaque ainsi impressionnée est développée dans un bain obtenu en mélangeant l'oxalate de potasse et le sulfate ferreux ; le bain a une épaisseur de 2<sup>m</sup> ou 3<sup>m</sup> au-dessus de la plaque, il est constamment agité, mais assez légèrement pour éviter de découvrir la gélatine. La plaque fixée, alunée, séchée, est observée

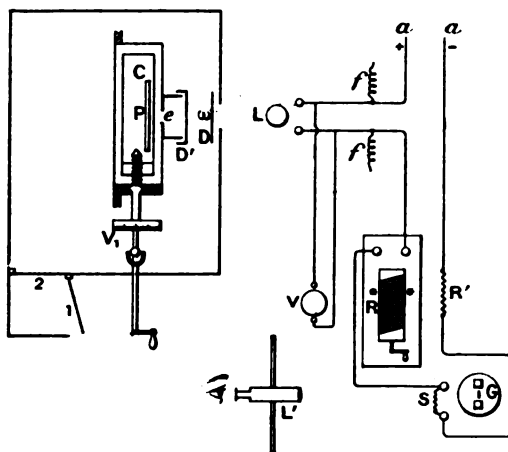
directement, ou au moyen de la pile thermo-électrique, comme nous le verrons plus loin.

Cette méthode, assez rudimentaire, suffit néanmoins pour montrer que les plaques sont presque toujours homogènes, excepté dans le voisinage des bords. Celles qui sont très peu homogènes manifestent déjà leur hétérogénéité sur une bande témoin que l'on prélève dans le sens de la longueur et qu'on développe, sans la soumettre à l'action de la lumière.

Pour étudier d'une façon plus complète l'homogénéité des plaques, j'ai employé un dispositif, que l'on retrouvera plus loin, à propos de la méthode spectrophotométrique.

Une batterie d'accumulateurs de 30 ampères-heures de capacité environ, sous le régime de 15 ampères, produit le courant qui traverse une lampe de Nernst L [modèle de 1 ampère 115 volts (*fig. 1*)].

Fig. 1.



L lampe de Nernst; ff fils aboutissant à une deuxième lampe de Nernst (voir *fig. 3*); V voltmètre Weston; aa arrivée des fils venant d'une batterie d'accumulateurs; R rhéostat Cance continu; G galvanomètre, L' lunette et règle du galvanomètre G; S shunt du galvanomètre G; ω obturateur (voir *fig. 8*); C chariot mù par V; P plaque photographique; D' deuxième obturateur; 1, 2 double porte.

La lampe de Nernst employée (*fig. 1*) est à filament rectiligne; la spirale d'allumage a été supprimée; pour amorcer la lampe, on chauffe le filament légèrement avec une lampe à alcool. On évite de changer le sens du courant, car la durée des filaments se trouve réduite par des intervertissements de polarité: le métal dégagé entraîne (E. Bosc, *Annalen der Physik*, 1902) par ses changements de volume des tensions à l'intérieur du corps incandescent. Les supports du filament et les parties voisines de la lampe sont recouverts de noir de fumée; cette condition est

surtout nécessaire quand on fait varier l'intensité de la lumière pénétrant dans l'appareil, en approchant ou éloignant la lampe de la fente.

Les fils amenant le courant sont isolés avec le plus grand soin par des isolateurs à double cloche. La batterie est chargée complètement; on lui fait débiter, avant de faire l'expérience, un nombre de coulombs suffisant pour que le voltage ne varie plus sensiblement. On se trouve alors dans des conditions correspondant à la branche horizontale de la courbe de décharge, ayant comme abscisses le temps et comme ordonnées le voltage aux bornes. Le courant de cette batterie traverse la lampe de Nernst L, un rhéostat R continu, modèle de Cance, vertical; un galvanomètre Deprez-d'Arsonval, G, convenablement shunté et muni d'une lunette et d'une règle divisée pour observer les déviations, un rhéostat ordinaire R' qui permet de régler le voltage aux bornes de la lampe par l'observation d'un voltmètre V. La lampe de Nernst est protégée contre les courants d'air qui font varier très notablement l'intensité de la lumière qu'elle émet, puisqu'une lampe fonctionnant un peu au-dessous de son voltage s'éteint quand on souffle sur son filament. On laisse la lampe fonctionner une heure, afin de permettre aux rhéostats, à la lampe et à ses enveloppes de s'échauffer et d'atteindre un régime permanent.

Pendant les opérations, l'observateur maintient constante l'intensité du courant par l'observation du galvanomètre Deprez-d'Arsonval. Avec ces précautions, on obtient une source qui est constante pendant plusieurs heures et qui peut être reproduite identique à elle-même pendant plusieurs jours. La lampe de Nernst n'est pas un étalon photométrique, mais elle constitue une source constante d'un emploi très commode; son éclat intrinsèque est très considérable; elle convient très bien, beaucoup mieux que les lampes à incandescence ordinaires, pour l'éclairage des fentes des spectroscopes.

Voici quelques nombres, indiquant la constante de cette lampe au moyen de l'impulsion galvanométrique produite par le rayonnement de lampe sur une pile thermo-électrique :

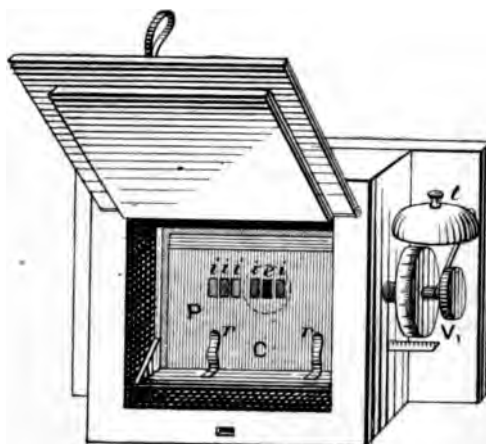
	Zéro du galvanomètre.	Déviation.
3.25 <sup>m</sup>	227,0	246,1
3.45	229,2	245,3
4	232,0	245,15
4.30	240,4	245,0
5	225,6	245,35
6	217,7	246,2

La lampe de Nernst L éclaire à travers l'ouverture *e* (*fig. 1*) la plaque photographique P, qui est placée sur un chariot micrométrique C, dans un châssis qui sert à un double usage: la plaque s'y impressionne et on la remplace

dans le même appareil, plus tard, quand on veut étudier la transparence des noirs.

La plaque est maintenue par des ressorts *r* (*fig. 2*), un chariot micrométrique mû par une vis *V*<sub>1</sub> permet de la faire avancer et d'impressionner des régions très voisines. Un timbre *t* avertit l'opérateur chaque fois que la vis *V*<sub>1</sub> a fait un certain

Fig. 2.



La plaque photographique portée sur le chariot C et maintenue par les ressorts *r*; *i* impressions photographiques; *V*<sub>1</sub> vis micrométrique manœuvrant le chariot C; *t* timbre avertisseur.

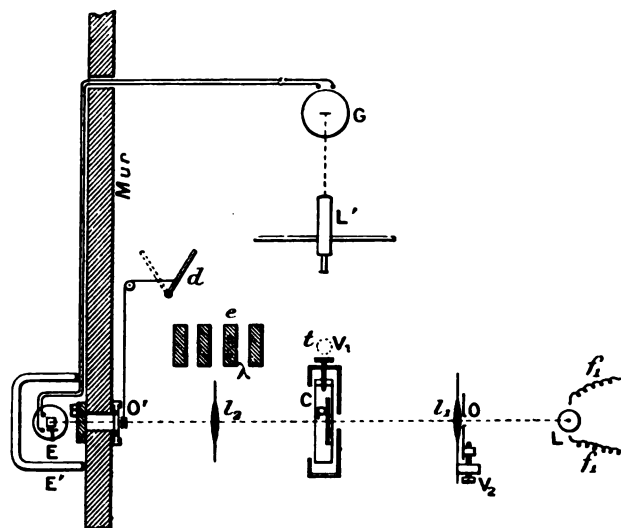
nombre de tours. Au moyen d'une transmission à la Cardan, on peut manœuvrer la plaque à distance. Le châssis contenant la plaque P est disposé dans une chambre, entièrement close, dans laquelle on peut entrer par une double porte 1, 2; toutes les opérations: installation de la plaque, développement, fixage, se font dans l'obscurité la plus complète. La lumière de la lampe L pénètre seulement, quand l'obturateur est dans la position 2 (*voir* p. 336).

Pour supprimer le halo, j'ai employé des plaques antihalo Lumière, mais sans décolorer la plaque après le développement et le fixage. La couleur rouge des plaques n'a pas d'inconvénient pour l'observation des clichés avec la pile thermo-électrique, elle gêne seulement dans les observations directes. Toutefois, j'ai constaté que les plaques antihalo étaient en général assez hétérogènes; j'ai employé le plus souvent des plaques ordinaires, le halo étant supprimé par le procédé qu'indique M. Bouasse: « On noircit avec du vernis noir (noir de fumée dans du vernis copal à l'alcool) du papier calque fin; on le découpe une fois sec à la dimension des clichés. Au moment d'utiliser ceux-ci, on applique sur la face verre un de ces papiers recouvert d'huile. Au moment de développer, on enlève le

papier et l'on essuie le cliché avec un chiffon. » Des expériences multiples m'ont démontré l'efficacité de cette méthode.

Après avoir fait sur la plaque une série de photographies très rapprochées et équidistantes (ayant par exemple  $6^{\text{mm}} \times 2^{\text{mm}}$  et séparées par  $0^{\text{mm}},5$ ), on replace la plaque développée et fixée sur le même chariot, dans le châssis déjà employé; une seconde lampe de Nernst L maintenue constante comme la précédente éclaire une lentille  $l_1$  (*fig. 3*) munie d'un œil de chat; cette lentille forme sur la plaque

Fig. 3.



G galvanomètre de faible résistance; L' lunette et règle pour l'observation des déviations galvanométriques; T pile thermo-électrique; E, E' enceintes; B bloc de verre de  $0^{\text{m}},03$  d'épaisseur; O' écran double manœuvré par  $d$ ;  $l_1$ ,  $l_2$  lentilles convergentes; C châssis à vis micrométrique; P plaque photographique;  $V_1$  vis micrométrique;  $t$  timbre; O œil de chat manœuvré par la vis  $V_2$ ; L lampe de Nernst;  $f_1$ ,  $f_2$  fils aboutissant en  $f$ ,  $f$  (voir *fig. 1*).

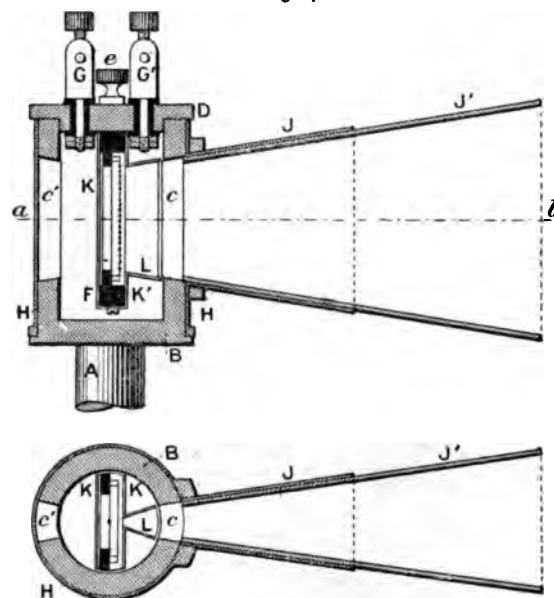
photographique, au centre de l'impression étudiée, une image rectiligne  $\lambda$ , dont on peut faire varier l'intensité en diaphragmant plus ou moins la lentille  $l_1$ . La lentille  $l_2$  forme une image réelle de  $\lambda$  sur les soudures d'une pile linéaire T (*fig. 4*), fer constantan, comprenant vingt éléments ayant une masse et une capacité calorifique très faibles. C'est le modèle adopté par M. Rubens, auquel j'adresse tous mes remerciements pour les précieuses indications qu'il a bien voulu me fournir. La figure 4 représente le détail de la pile.

Un bloc de verre B de  $3^{\text{cm}}$  d'épaisseur est destiné à éviter les causes d'erreur provenant des irrégularités dans l'épaisseur du verre de la plaque photographique étudiée.



La pile thermo-électrique est protégée par une double enveloppe dont l'exté-

Fig. 4.



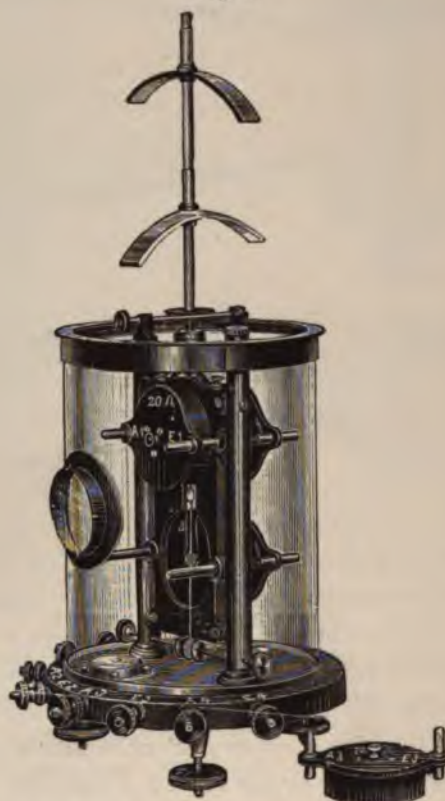
rieure  $E'$  est creuse et contient de l'eau. Les bornes de la pile communiquent avec un galvanomètre (modèle Rubens, construit par Keiser et Schmidt) (*fig. 5*); l'équipage mobile du galvanomètre pèse  $0^s,09$ ; les bobines ont chacune  $20^w$  de résistance. La sensibilité de cet appareil est beaucoup réduite dans ces expériences. La période d'oscillation du galvanomètre est 8 secondes.  $L'$  est la lunette d'observation de ce galvanomètre. Un écran double  $O'$  maintenu par un ressort et pouvant être manœuvré par une tige  $d$ , qu'un déclenchement abandonne brusquement à elle-même, permet de protéger la pile et de faire tomber brusquement sur elle le rayonnement de la lampe de Nernst. L'opérateur étudie successivement la transparence de régions homologues du cliché, puisque c'est la même vis micrométrique et le même chariot qui supporte la plaque dans la première et dans la seconde partie de l'expérience. Ce dispositif a un grand avantage, surtout quand les plages formées sur la plaque photographique ne sont pas homogènes, et c'est le cas des observations spectrophotométriques même dans les appareils possédant une grande dispersion.

La pile thermo-électrique est placée dans une pièce voisine entièrement close, à l'abri, par conséquent, des perturbations <sup>(1)</sup>.

(1) Pour éviter l'échauffement de la pile par conductibilité, je l'ai disposée sur un support analogue à celui qu'on emploie pour les calorimètres Berthelot; cette précaution n'est pas inutile, comme l'on peut s'en assurer par l'expérience.

*Exemple.* — Pour montrer la nécessité du dispositif adopté et décrit plus haut, il suffit de faire sur une même plaque photographique, dont l'homogénéité a été prouvée déjà grossièrement par l'emploi de bandes témoins, une série d'impressions : les unes, série *a*, en abandonnant la lampe à elle-même ; les autres, *b*, en

Fig. 5.

Galvanomètre M. du Bois et Rubens (*Electrotechnische Zeitschrift*, 1894).

maintenant constante la déviation du galvanomètre *G* par la manœuvre du rhéostat continu. Dans le premier cas, il se produit des variations *accidentelles*, dans le courant par exemple, dues à des chutes de matière active dans les accumulateurs, et ces variations donnent à la plaque une apparence d'hétérogénéité ; dans le second cas l'homogénéité est très satisfaisante. La figure 6 est la reproduction de la plaque *P*.

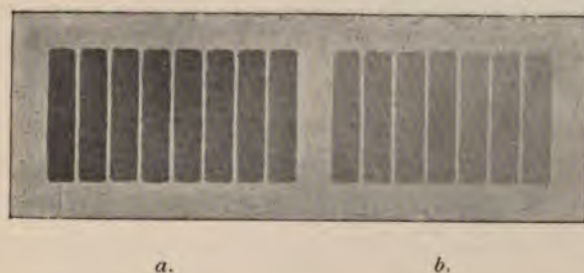
Les déviations galvanométriques pour les huit impressions de la série *a* sont :

353    343    342,5    347    354,5    363    356,5    354,5 ;

le galvanomètre Deprez-d'Arsonval, pendant la durée de ces impressions photo-

graphiques, a manifesté des variations, dans sa déviation, correspondant à celles que le cliché indique; le courant, traversant la lampe de Nernst, a augmenté et a passé par un maximum au moment où l'on faisait la photographie n° 3, il a varié

Fig. 6.



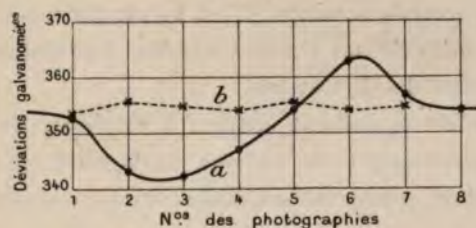
ensuite en sens inverse, a passé par un minimum et il est redevenu ce qu'il était primitivement; une cause *accidentelle et passagère* avait donc fait varier l'intensité de ce courant.

Les impressions photographiques de la série *b* donnent comme déviations:

354    356    354    355    356    354    355.

En faisant de nombreuses expériences avec des plaques Lumière, Jouglà, etc.,

Fig. 7.



je suis arrivé à ce résultat que l'homogénéité des plaques photographiques du commerce est très satisfaisante. En particulier les plaques Lumière marque bleue donnent sur une surface de  $4^{\text{cm}} \times 4^{\text{cm}}$  des noirs différant rarement de plus du  $\frac{1}{100}$  de leur valeur relative et, en choisissant les plaques employées, la différence des noirs n'atteint pas  $\frac{1}{200}$ . Ce choix des plaques se fait en développant une bande découpée parallèlement à la grande dimension et impressionnée en une seule fois par une source éloignée.

L'homogénéité est encore bien plus grande si l'on n'utilise qu'une surface de la plaque de  $1^{\text{cm}^2}$  ou  $2^{\text{cm}^2}$ , surface bien suffisante pour une comparaison spectrophotométrique, comme on le verra plus loin.

Les plaques photographiques employées par M. Bouasse en 1893-1894 étaient certainement différentes de celles que l'on fabrique aujourd'hui. C'est à cette différence que j'attribue l'hétérogénéité que M. Bouasse a constatée dans ses expériences, qui portent sur un trop grand nombre de clichés (3000 épreuves) pour que ses résultats puissent être mis en doute et attribués, par exemple, à une variation continue en fonction du temps de la source de lumière employée. Il est certain, toutefois, que la lampe à pétrole est beaucoup moins constante que la lampe de Nernst employée comme je l'ai indiqué plus haut. Mais la durée des impressions dans les expériences de M. Bouasse était trop courte pour que la lampe à pétrole ait le temps de varier notablement. Au contraire, dans mes expériences, qui durent facilement une heure, il fallait adopter une source plus constante; c'est ce que j'ai fait.

## CHAPITRE II.

### DESCRIPTION D'UNE MÉTHODE SPECTROPHOTOMÉTRIQUE FONDÉE SUR LA PHOTOGRAPHIE.

Il ne faut pas demander à la plaque photographique de mesurer directement l'intensité d'une radiation; il vaut mieux se contenter de l'employer pour constater l'égalité ou l'inégalité de deux radiations de même longueur d'onde. Elle peut alors rendre les plus grands services. C'est la conclusion à laquelle est arrivé M. Bouasse <sup>(1)</sup> à la suite de ses travaux sur les impressions photographiques; c'est également l'opinion de M. Cotton.

Mes expériences m'ont également conduit à employer une méthode de zéro, où la plaque photographique joue un rôle analogue à celui de l'œil, lorsqu'il apprécie l'égalité de deux plages monochromatiques au contact.

#### *Méthode.*

Soient  $I$  et  $I'$  les intensités des deux radiations, de même longueur d'onde, à comparer. Sur une même plaque photographique, on fait tomber la première radiation d'intensité  $I$ , pendant le temps  $t$ , on déplace légèrement la plaque photographique et, dans le voisinage de la première impression, on en produit une seconde au moyen de la deuxième radiation  $I'$  atténuée suivant un rapport connu  $K$ ; la durée de pose étant la même, on fait ensuite, dans le voisinage de

---

<sup>(1)</sup> *Loc. cit.*

la seconde impression, une troisième photographie au moyen de la première radiation d'intensité  $I$ , puis une quatrième au moyen de la seconde radiation, dont l'intensité  $I'$  est atténuée dans le rapport  $K_2$ , etc. On a ainsi une série de photographies équidistantes, correspondant à des intensités

$$I, K_1 I', I, K_2 I', I, K_3 I', \dots;$$

on suppose

$$I' > I, \quad 1 > K_1 > K_2 > K_3 \dots,$$

la durée de pose étant maintenue invariable. Le cliché développé est étudié au moyen d'une pile thermo-électrique qui permet de déterminer la transparence pour les rayons calorifiques (*voir* p. 330) des diverses impressions photographiques. Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$  les impulsions du galvanomètre relié à la pile, obtenues quand on interpose sur le trajet des rayons calorifiques les diverses impressions photographiques. On construit deux courbes ayant pour abscisses, l'une et l'autre, les positions  $x$  des impressions photographiques, et pour ordonnées, l'une les impulsions du galvanomètre correspondant aux photographies de  $I$ , la seconde les impulsions du galvanomètre correspondant aux photographies de

$$K_1 I', K_2 I', K_3 I', \dots;$$

ces deux courbes se coupent en un point A correspondant à un point P de la plaque photographique, dont l'abscisse est  $x$ .

Soient  $f(I, x)$  la fonction qui représente la variation de la transparence des impressions photographiques avec l'intensité  $I$  de la radiation et le point de la plaque, pour la longueur d'onde  $\lambda$ .

On a, pour le point P,

$$f(I, x) = f(K I', x),$$

ce qui donne

$$\frac{I}{I'} = K,$$

les variations  $K$  et  $x$  étant d'ailleurs liées par une relation simple, linéaire de préférence, et que l'expérimentateur choisit arbitrairement.

Il faut remarquer que cette méthode n'exige nullement l'homogénéité complète de la plaque employée, mais seulement la continuité dans l'hétérogénéité. Or cette continuité est admise par tous les auteurs qui ont étudié cette question. On peut dire en définitive que la méthode précédente revient à constater que deux radiations impressionnent également *le même point* d'une plaque photographique, et qu'elles ont par conséquent la même intensité. L'examen direct de la plaque photographique éclairée uniformément et *faiblement* permet de déter-

miner le rapport  $\frac{I}{I'}$  avec une approximation qui est déjà de l'ordre de celle que donnent de bonnes mesures photométriques. On peut s'en contenter dans bien des cas. La valeur  $\frac{I}{I'}$  étant ainsi approximativement connue, il est nécessaire de faire seulement un petit nombre d'expériences avec la pile thermo-électrique.

Il est maintenant nécessaire de donner quelques détails expérimentaux :

- a. Source de lumière maintenue constante (voir p. 327);
- b. Obturateur permettant de faire des durées de pose bien connues.

*Description de l'obturateur (fig. 8).*

L'obturateur se compose d'un pendule,  $\omega fT$ , formé par une tige de fer suspendue en  $\omega$  et pouvant tourner autour d'un axe horizontal, déterminé par les deux

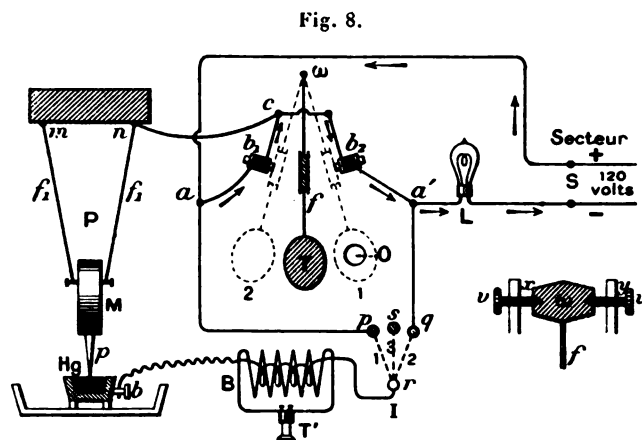


Fig. 8. Hg cuvette en fer contenant du mercure;  $p$  pointe en fer terminant la masse de plomb  $M$  du pendule  $P$ ;  $f_1$  fils de cuivre supportant  $M$ ;  $B$  bobine d'induction dont le primaire est traversé par le courant du secteur quand l'une des bobines  $b_1$  ou  $b_2$  est mise en court-circuit;  $L$  rhéostat de lampes;  $\omega$  axe de suspension du pendule  $f$ ;  $f$  lame de fer doux recouverte de papier;  $T$  plaque de zinc qui obture l'ouverture  $O$ , dans la position 1, et la découvre complètement dans la position 2;  $b_1$ ,  $b_2$  bobines, traversées par le courant du secteur  $S$ , et qui sont mises en court-circuit par le grand pendule  $P$ ;  $P$  pendule, dont la période à 15°C. est de 3,79 secondes;  $I$  interrupteur à double direction; dans la position 1, communication  $pr$  établie, la bobine  $b_1$  est mise en court-circuit, dans la position 2 c'est la bobine  $b_2$  qui est mise en court-circuit;  $T'$  téléphone branché sur le secondaire de la bobine  $B$ .

pointes  $x$  et  $y$  de deux vis  $v$  : le plan d'oscillation du pendule est ainsi bien déterminé. En  $f$  se trouve une masse de fer doux recouverte d'une mince feuille



de carton; en T est soudée une plaque de zinc qui vient obturer exactement l'ouverture O, par laquelle pénètre la lumière dans l'appareil. La masse de fer  $f$  vient buter, aux extrémités de sa course, contre deux bobines  $b_1$  et  $b_2$ , et le carton mince qui l'entoure empêche qu'elle ne se colle d'une façon permanente aux noyaux de ces deux bobines; il est facile de trouver par tâtonnements l'épaisseur d'entrefer nécessaire pour que l'appareil fonctionne régulièrement. Les bobines  $b_1$  et  $b_2$  sont traversées par le courant continu de la ville, elles sont placées en série; comme leur résistance ( $30^\omega$  par bobine) n'atténuerait pas suffisamment le courant, on place en série, avec elles, deux lampes à incandescence L qui forment rhéostat.

Les bobines  $b_1$  et  $b_2$  permettent de commander le pendule T au moyen d'une deuxième pendule M. Les poses se font donc automatiquement; leurs durées sont égales à 1, 2, 3, ...,  $n$  fois la période d'oscillation du pendule M. Pour obtenir ce résultat, il suffit de suspendre au plafond de la salle où se fait l'expérience, ou dans une salle voisine, une lourde masse de plomb, au moyen de fils de bronze  $f, f_1$ . La masse M est munie à sa partie inférieure d'une pointe en acier qui vient frotter légèrement sur la surface d'un bain de mercure Hg contenu dans une cuvette en fer, placée elle-même dans une cuvette en porcelaine, dont la position peut être réglée vis-à-vis de la pointe  $p$ , au moyen d'un support convenable. Si le pendule M est dans une autre salle que l'opérateur, celui-ci fait usage d'une bobine d'induction B, dont le circuit secondaire contient un téléphone, qu'il suffit d'écouter pour déterminer le nombre d'oscillations du pendule M. L'opérateur, en même temps qu'il écoute dans le téléphone, doit manœuvrer l'interrupteur I qui permet de fixer la durée de pose, et un rhéostat qui permet de maintenir constante l'intensité du courant qui passe dans la lampe de Nernst.

Les connexions sont établies de la façon suivante: le courant du secteur S passe d'abord dans la bobine  $b_1$ , puis dans la bobine  $b_2$  et dans les lampes L, lorsque la manette de l'interrupteur I, à deux directions, se trouve placée sur le plot mort S, dans la position 3. Si la manette de l'interrupteur I est dans la position 1, le pendule M, quand la pointe  $p$  touche le mercure Hg, a pour effet de mettre en court-circuit la bobine  $b_1$ ; au contraire, quand la manette de l'interrupteur I se trouve dans la position 2, le pendule M met en court-circuit la bobine  $b_2$ . Le circuit primaire de la bobine d'induction B est traversé par les courants ainsi produits et c'est pour cela qu'on peut suivre le mouvement du pendule M sans le voir, en écoutant dans le téléphone T'.

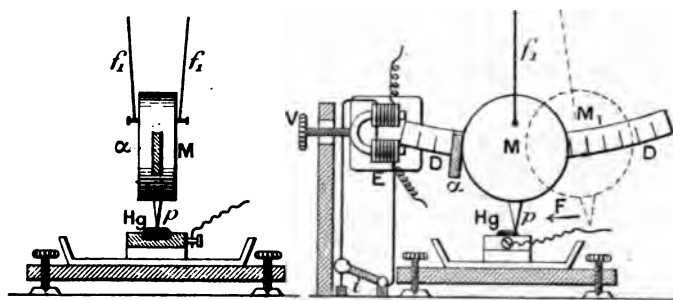
On peut aussi employer une autre méthode, qui consiste à placer les lampes L dans la même salle que l'interrupteur I; l'observateur placé dans cette salle voit l'éclat des lampes L varier périodiquement: à chaque court-circuit, le courant est augmenté, il en résulte une augmentation d'éclairement; pendant une oscillation double de M, il y a deux courts-circuits et, par conséquent, deux maxima d'inten-

sité des lampes L; la période d'oscillation du pendule M est 3,79 secondes à 15° C.; elle est assez longue pour que les lampes puissent indiquer nettement les divers courts-circuits. Cette remarque est nécessaire; on sait, en effet, qu'une lampe à incandescence soumise à un courant variant un peu rapidement aurait un éclat constant: une lampe à incandescence met, en effet, un temps très appréciable pour s'éteindre ou s'allumer.

Si le pendule M est dans l'obscurité, l'observateur placé dans son voisinage peut compter le nombre de ses oscillations en regardant les étincelles qui se produisent quand la pointe  $p$  quitte le bain de mercure; il y a deux étincelles à chaque oscillation complète du pendule M, mais il n'en voit qu'une seule, l'autre est cachée. Le nombre des étincelles vues est donc égal au nombre de périodes de M.

La méthode la plus souvent employée a été celle ci: un aide était chargé de faire les poses photographiques (et de maintenir constante la source employée); il observait le pendule M qui oscillait dans une salle éclairée, devant une graduation D; il comptait à haute voix le nombre de périodes. A la fin de chaque période un électro-aimant rattrapait le pendule M, sans lui donner de secousses. Cet électro-aimant E (*fig. 9*) était muni aux extrémités de son noyau de feuilles

Fig. 9.



E électro-aimant:  $z$  armature de l'électro-aimant E;  $i$  interrupteur permettant de mettre brusquement en court-circuit les bobines de l'électro-aimant E; V vis permettant de rapprocher de M l'électro-aimant E.

Dans la figure 9 M est en équilibre, la pointe  $p$  est en contact avec l'une des extrémités du bain de mercure.

D graduation permettant de mesurer l'amplitude de l'oscillation du pendule M.

de caoutchouc contre lesquelles l'armature  $z$ , portée par le pendule M, venait s'appliquer. Pour mettre le pendule en mouvement, on manœuvrait un interrupteur  $i$ , qui met en court-circuit l'électro-aimant. L'amplitude des oscillations de M décroissant légèrement pendant une pose photographique, il est nécessaire de faire avancer au moyen de la vis V la planche sur laquelle est fixé l'électro-aimant; quand on a rattrapé le pendule, on ramène l'électro-aimant dans sa position primitive, afin de maintenir *constante* l'amplitude des oscillations de M.



*Réglages divers.* — Le pendule  $\omega f T$  doit être réglé avec soin. Les deux vis  $v$  dont les pointes fixent l'axe d'oscillation doivent permettre au pendule d'osciller librement. Les bobines  $b_1$  et  $b_2$  sont bien symétriques par rapport au pendule dans sa position d'équilibre. L'interrupteur  $I$  étant dans la position 3, on amène le pendule dans la position 1, l'armature  $f$  reste collée contre le noyau de la bobine  $b_2$ ; on met la manette de l'interrupteur en 2, le pendule fait une oscillation simple et se colle sur  $b_1$ . La manette de l'interrupteur est placée en 1, le pendule fait une deuxième oscillation et se colle contre  $b_2$ . On répète ces deux manœuvres un grand nombre de fois pour être sûr que le pendule est bien réglé; il suffit de constater que le choc de l'armature  $f$  contre les deux noyaux de  $b_1$  et  $b_2$  donne un bruit de même intensité. Si cette condition n'est pas réalisée, on rapproche de la verticale  $\omega f T$  celle des bobines qui a donné le choc le plus faible.

Pour régler le pendule  $M$ , on fait affleurer la pointe  $f$  et le bord extrême du bain de mercure  $Hg$ ,  $M$  étant abandonné à lui-même. Le court-circuit qui produira les déplacements du pendule  $T$  correspondra au mouvement du pendule  $M$  dans le sens  $F$ . L'autre court-circuit ne sera pas utilisé pour la commande de  $T$ . On voit l'avantage de cette disposition, *le court-circuit utilisé se produira toujours au moment où le pendule  $M$  passe par la verticale*. La légère diminution d'amplitude du pendule  $M$  pendant une pose n'altérera pas la périodicité des courts-circuits. Quand l'appareil est bien réglé, la pointe  $p$  trace sur le mercure une ligne très fine à peine perceptible.

#### *Manœuvre de l'obturateur.*

Supposons que l'on veuille faire une pose égale à la durée de dix périodes du pendule  $M$ ; on met celui-ci en mouvement. Le pendule  $T$  est dans la position 1, l'ouverture  $O$  est obturée. La manette de l'interrupteur  $I$  est placée en 2 par un mouvement brusque, au moment où le pendule est en  $M_1$ . Le pendule redescend, passe par la verticale, à ce moment la bobine  $b_2$  est mise en court-circuit, le pendule  $T$  décrit une demi-oscillation et s'accroche contre  $b_1$ ; il faut remarquer que la mise en court-circuit de  $b_2$  n'est pas instantanée et que l'armature  $f$  met un certain temps pour quitter le noyau de  $b_2$ , mais le retard du départ de  $T$  par rapport au passage par la verticale est constant; ce retard est le même d'ailleurs quand  $T$  quitte  $b_1$  ou  $b_2$ , à cause de la symétrie de l'appareil. Le pendule  $T$  s'étant accroché au noyau de  $b_1$  on compte les passages de  $M$  par la verticale dans le sens de la flèche  $F$ . Un peu avant le onzième passage de  $M$  par la verticale, quand le pendule se trouve en  $M_1$ , on amène brusquement la manette de l'interrupteur  $I$  dans la position 1, le onzième court-circuit se produit aux bornes de la bobine  $b_1$ .

et ramène T dans la position 1; la pose est terminée, elle est exactement égale à dix périodes d'oscillation de M.

Cet appareil m'a rendu les plus grands services, il a fonctionné pendant un an sans se dérégler; il faut seulement tenir compte des variations de température qui altèrent la durée de la période de M. L'effet des variations de la température sur le pendule T est beaucoup moins important et n'intervient que dans le mouvement de T de la position 2 à la position 1.

On peut, au moyen de ce dispositif, faire des poses exactement connues et variables dans de grandes limites (depuis quelques secondes jusqu'à 30 minutes). Le pendule M peut commander à distance et simultanément plusieurs pendules T. Lorsqu'il est nécessaire de faire mouvoir l'obturateur dans un plan quelconque, autre qu'un plan vertical, on remplace le pendule par un obturateur mû par un ressort et actionné par les bobines  $b_1$  et  $b_2$ . Un pareil dispositif peut rendre des services dans les observatoires pour la photographie des étoiles, et la détermination de leur grandeur.

c. Châssis à mouvement micrométrique (voir p. 329).

d. Moyens d'atténuation employés.

Pour atténuer l'intensité de la lumière, j'ai employé deux méthodes :

1° Celle des variations de distance. L'intensité de la lumière qui tombe sur la plaque photographique varie en raison inverse du carré de la distance du filament de la lampe de Nernst à la fente. Un fil à plomb placé dans le prolongement du filament permet de lire cette distance sur une règle divisée. Ce procédé convient très bien quand il est nécessaire d'obtenir des intensités très faibles; il a l'inconvénient d'entraîner quelquefois des variations dans la source, à cause des courants d'air qui se produisent autour du filament quand on le déplace.

2° L'emploi d'une fente mue par une vis micrométrique donne également de bons résultats, surtout quand on veut mesurer des rapports  $\frac{1}{I}$  peu différents de l'unité.

Il est nécessaire de se rendre compte de l'ordre de grandeur des bavures de la fente vis-à-vis de sa largeur. La fente variable ne convient pas quand il faut atténuer beaucoup l'intensité de la lumière qui pénètre dans l'appareil. Il ne faut pas non plus ouvrir trop la fente, surtout si elle est dissymétrique (c'est-à-dire à un seul volet mobile), car, dans ce cas, l'image du filament de la lampe de Nernst ne se forme plus en des *points homologues* des diverses impressions photographiques, lorsqu'on étudie le cliché avec la pile thermo-électrique.

*Remarque.* — Pour une radiation déterminée, toute la lumière tombant sur la fente doit arriver sur la plaque photographique sans être arrêtée par les diaphragmes qui se trouvent sur les lentilles et les prismes.

*Étude de la fente. Détermination du zéro.*

On examine au microscope les bords de la fente, afin de chercher la région la meilleure, c'est-à-dire celle où les deux bords sont bien rectilignes et parallèles. On choisit la région où les bavures sont de peu d'importance. Les poussières sont enlevées en essuyant les bords avec un morceau de bois de fusain convenablement taillé et légèrement humecté. Il ne faut pas essuyer la fente avec un linge dont les fils s'attacheraient aux bords de la fente, surtout si elle est en platine, comme l'une de celles que j'ai utilisées.

Il est nécessaire de déterminer le zéro de la fente, c'est-à-dire la division du tambour de la vis micrométrique correspondant au contact des deux bords. Une méthode grossière consisterait à tourner la vis micrométrique de façon à fermer la fente et à s'arrêter au moment où l'on sent une résistance; si la fente est bonne, elle ne doit plus, à ce moment, laisser passer de lumière; mais, si les deux bords ne sont pas parallèles, le contact n'a lieu qu'à une extrémité de la fente, et à l'autre extrémité la lumière passe. Cette méthode ne peut être employée, car elle détériore la fente et sa vis micrométrique. Il est indispensable de ne jamais amener les deux bords de la fente au contact et d'employer pour la détermination du zéro une méthode indirecte, par exemple, celle qui suit :

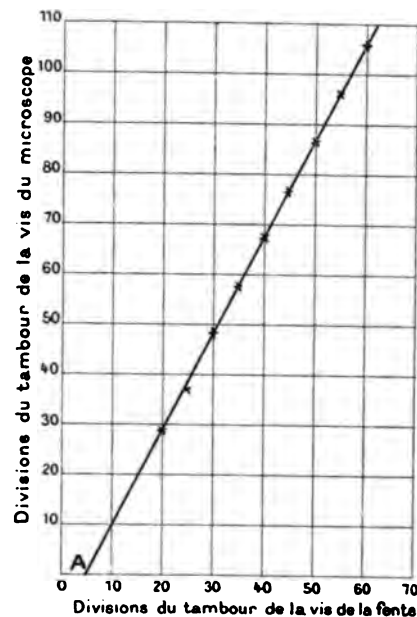
On dispose devant la fente un microscope de grossissement assez faible et possédant un réticule; un chariot micrométrique permet de déplacer le microscope normalement à son axe. On commence par ouvrir largement la fente en tournant convenablement la vis micrométrique dont elle est munie; on tourne ensuite cette vis en sens inverse d'une quantité suffisante pour qu'elle vienne buter contre son écrou et qu'elle l'entraîne. On s'arrête, et l'on détermine alors la largeur de la fente, en pointant avec le microscope successivement les deux bords de celle-ci, c'est-à-dire en amenant successivement l'image de chacun des deux bords en coïncidence avec la croisée des fils du réticule. On recommence la même détermination plusieurs fois, en ayant soin de tourner la vis de la fente toujours dans le même sens, pour éviter le temps perdu. On adopte comme sens de rotation de cette vis celui qui correspond à la fermeture de la fente et l'on peut ainsi amener les deux bords à une très faible distance l'un de l'autre. Au contraire, si l'on choisit l'autre sens de rotation, on ne peut pas approcher les deux bords d'une distance plus faible que le jeu de l'écrou par rapport à la vis : le zéro est moins bien déterminé et l'on risque d'abîmer la fente en amenant accidentellement les deux bords en contact et de changer en même temps le zéro. Il faut donc, dans les déterminations photométriques, adopter comme sens de rotation celui qui correspond à la fermeture de la fente : c'est pour ce sens de rotation que le zéro de la fente a été déterminé.

Voici un exemple de détermination du zéro :

Divisions du tambour de la vis de la fente.	Divisions du tambour de la vis du microscope.
60.....	106,0
55.....	96,0
50.....	87,0
45.....	76,5
40.....	68,0
35.....	57,5
30.....	48,5
25.....	37,0
20.....	29

La courbe (*fig. 10*) construite en prenant comme abscisses les divisions du tambour de la vis de la fente, et comme ordonnées les divisions correspondantes du tambour de la vis du microscope, est une droite; ce qui montre la régularité des deux vis dans les régions employées, on lit le point A où cette droite coupe

Fig. 10.



l'axe des abscisses, point qui indique le zéro; c'est la division 5,0 du tambour de la vis de la fente. La même détermination doit être faite assez souvent pour vérifier que le zéro ne change pas.

On emploie le même microscope pour vérifier la vis micrométrique de la fente;

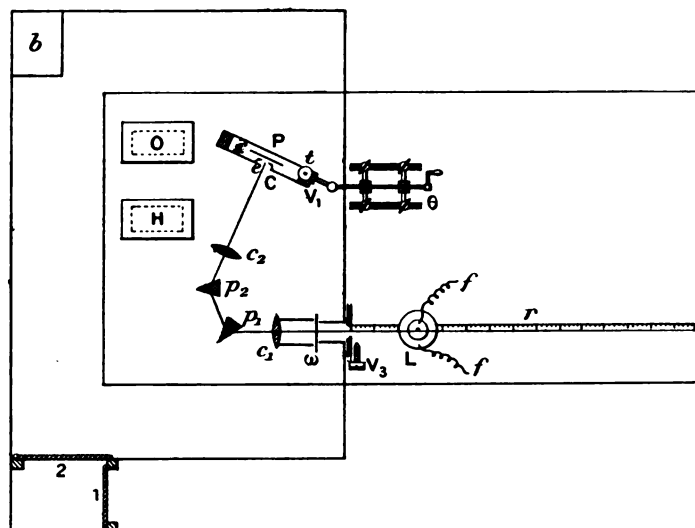
pour cela, on détermine diverses largeurs de la fente en fonction d'une région toujours la même de la vis micrométrique du microscope.

*e.* Précautions à prendre dans le développement, choix de la plaque (*voir* p. 327).

*f.* Exemples de mesures.

La figure 11 représente le spectrophotomètre photographique. La légende donne des explications suffisantes. L'appareil étant réglé comme un spectroscopie,

Fig. 11.



L lampe de Nernst qui se déplace sur une règle divisée  $r$ ;  $V_3$  vis micrométrique de la fente;  $c_1$  lentille collimatrice;  $p_1, p_2$  prismes réfringents;  $c_2$  lentille convergente dont le foyer est sur la plaque P; C chariot micrométrique, commandé par la transmission à la Cardan 0; H, O pendules très lourds pour balancer les cuvettes à oxalate et hyposulfite; 1, 2 double porte.

on amène une raie déterminée au milieu de l'ouverture  $e$ , qui limite la surface de la plaque qui sera impressionnée, on fixe solidement le châssis dans cette position et la vis  $V_1$  est reliée à la transmission à la Cardan mue de l'extérieur par une manivelle  $\theta$ .

*Premier exemple.* — On détermine le coefficient de transmission d'une plaque de verre jaune, pour la radiation de longueur d'onde 5351. La fente variable a son zéro à la division 27 du tambour. Le Tableau suivant et la courbe (*fig. 12*) suffisent pour expliquer la détermination. On remarque que la courbe 1 monte assez rapidement, ce qui prouve que, pendant l'expérience, la lampe à pétrole a baissé d'une façon régulière, sans empêcher de faire les mesures correctement.

Divisions de la règle  
qui repère le chariot  
micrométrique  
mũ par  $V_2$ .

Tambour de  $V_2$ .

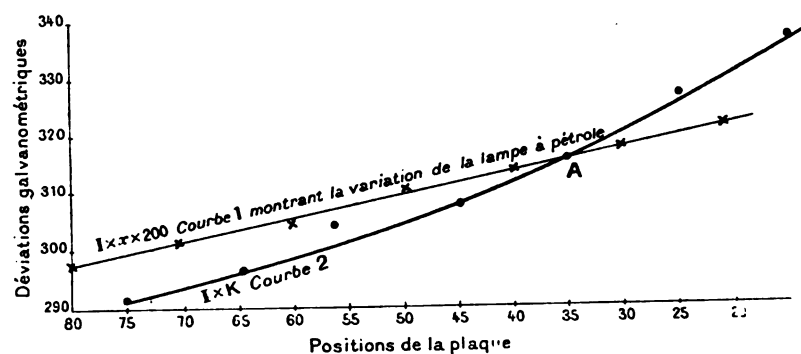
Position de  $v$ .

Déviations  
galvanométriques  $x$ .

80.....	27 (2 tours de $V_2$ )	lame	298,0
75.....	70 (1 tour $\frac{1}{2}$ environ de $V_2$ )	pas de lame	291,5
70.....	27 (2 tours de $V_2$ )	lame	302,0
65.....	72 "	pas de lame	297,0
60.....	27 "	lame	304,5
55.....	74 "	pas de lame	306,5
50.....	27 "	lame	311,5
45.....	76 "	pas de lame	308,0
40.....	27 "	lame	315,0
35.....	78 "	pas de lame	317,0
30.....	27 "	lame	319,0
25.....	80 "	pas de lame	328,0
20.....	27 "	lame	323,0
15.....	82 "	pas de lame	338,0

$v$  est la vis d'un chariot supportant la lame étudiée.

Fig. 12.

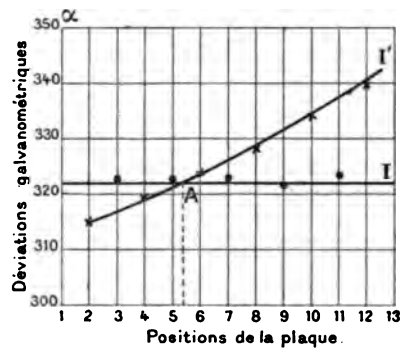


Le rapport  $x$  cherché (coefficient de transmission) est donné par l'équation

$$x = \frac{149}{200} = 0,745.$$

Même détermination. La lampe de Nernst employée est maintenue constante (fig. 13).

Fig. 13.



Numéros des impressions photographiques.	Sources.	$k$ .	$\alpha$ .	
1.....	$I \times x$	1	322	
2.....	$I' = I \times 0,79$	0,79	315	$I \times 0,79 > I \times x$
3.....	$I \times x$	1	323	
4.....	$I' = I \times 0,76$	0,76	319	$I \times 0,76 > I \times x$
5.....	$I \times x$	1	322,8	
6.....	$I' = I \times 0,73$	0,73	324	$I \times 0,73 < I \times x$
7.....	$I \times x$	1	323,4	
8.....	$I' = I \times 0,70$	0,70	328	$I \times 0,70 < I \times x$
9.....	$I \times x$	1	321,7	
10.....	$I' = I \times 0,67$	0,67	334	$I \times 0,67 < I \times x$
11.....	$I \times x$	1	324	

on trouve

$$x = 0,739.$$

### CHAPITRE III.

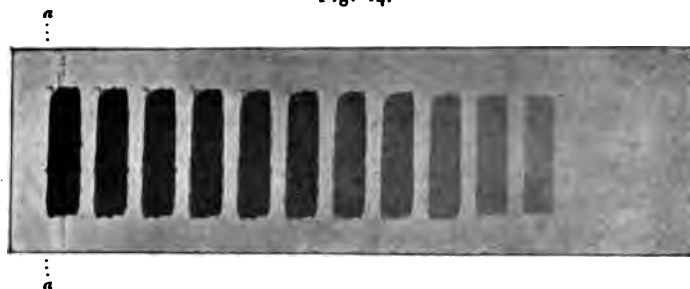
#### DÉTERMINATION DU DEGRÉ DE PRÉCISION DES EXPÉRIENCES SPECTROPHOTOMÉTRIQUES. AUGMENTATION DE LA SENSIBILITÉ PAR UN VOILE PRÉLIMINAIRE.

Pour se rendre compte du degré de précision des expériences spectrophotométriques fondées sur l'emploi de la plaque photographique et pour rechercher les conditions optima dans lesquelles il faut se placer autant que possible, il suffit de faire pour les diverses radiations l'expérience suivante :

On choisit une plaque photographique  $13 \times 18$ , on découpe dans la région du centre plusieurs bandes parallèles à la grande dimension de la plaque. Une de ces bandes est développée sans avoir été impressionnée, une deuxième est développée après avoir été impressionnée sur toute son étendue par un éclairage uniforme, ce sont les plaques témoins  $m$ ,  $n$ . Si elles paraissent bien homogènes à l'examen direct et à l'examen par la pile thermo-électrique, on emploie les autres bandes à la détermination de la précision. Les bandes extrêmes  $p$  et  $q$  sont jetées, leur homogénéité étant presque toujours défectueuse, même dans une plaque excellente:

Dans la région centrale de la bande choisie, on fait une série d'impressions photographiques, régulièrement placées; la figure 14 représente en vraie grandeur ce cliché. L'impression numérotée 0 est la plus forte, l'impression 11

Fig. 14.



n'est pas visible directement sur le cliché, mais la pile thermo-électrique manifeste très nettement son existence. La ligne  $aa$  indique la région où l'on a formé l'image réelle du filament de la lampe Nernst <sup>(1)</sup>.

Le Tableau ci-contre indique les déviations galvanométriques correspondant aux diverses impressions photographiques et à la plaque dans les régions où elle n'a pas reçu de lumière, les noirs varient de 21,5 pour la photographie n° 0, jusqu'à 0,035 pour la photographie n° 11.

Les expériences citées ici se rapportent à la lumière jaune du sodium, la durée de pose était 2 minutes environ (exactement  $30 \times 3,79 = 113,7$ ).

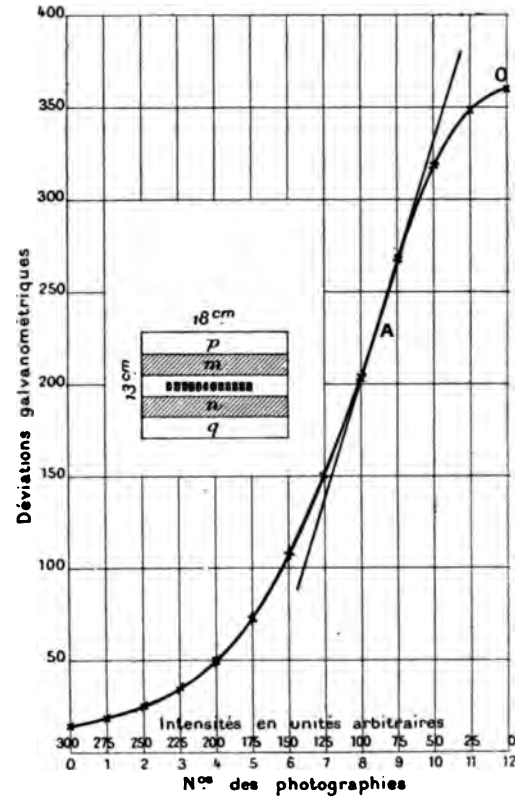
La courbe obtenue est régulière : elle montre que si l'intensité lumineuse varie à partir de zéro, l'impression photographique croît d'abord lentement, la tangente à l'origine 0 est très peu inclinée sur l'axe des abscisses; l'impression photographique s'accélère ensuite : la courbe possède en A un point d'inflexion et, dans cette région, elle se confond assez longtemps avec sa tangente; c'est pour cette région A, comprise entre les intensités 150 et 75, que les conditions expérimentales sont les meilleures. Après le point d'inflexion, la courbe descend moins rapidement, et elle tend vers une asymptote horizontale. Dans l'expérience précédente, les intensités et la durée de pose étaient insuffisantes pour produire le premier renversement. La courbe précédente est intéressante : elle montre que l'impression photographique, d'abord lente, croît ensuite brusquement; à ce moment-là doit se produire un phénomène d'allure explosive, que la température de la gélatine permettrait peut-être d'étudier. (On pourrait déterminer cette température au moyen d'une pile fer-constantan, ayant une capacité calorifique très faible et possédant un grand nombre de soudures, dont les unes seraient

(<sup>1</sup>)  $aa$  devrait être au milieu de la première impression.



laissées à l'air libre, les autres mises en contact intime avec la gélatine, sur laquelle

Fig. 15.



N° de photogr.	Intensités en unités arbitraires.	Déviation galvan.
0.....	300	16
1.....	275	20
2.....	250	26
3.....	225	34
4.....	200	48
5.....	175	71
6.....	150	108,5
7.....	125	150,5
8.....	100	204
9.....	75	268
10.....	50	320
11.....	25	348
12.....	0	360

Durée de pose : 2 minutes environ.

$$\lambda = 0^{\mu},5891.$$

Plaques Lumière, marque bleue.

on ferait tomber des rayons ultra-violet. L'expérience présente des difficultés, je n'ai pas encore eu l'occasion de la réaliser.)

Quand l'intensité de la lumière continue à croître, l'impression photographique se ralentit et finit par ne plus augmenter sensiblement.

En définitive, la courbe des noirs en fonction de l'intensité rappelle, par sa forme, les courbes d'aimantation.

Il faudra se placer, dans le cas cité, dans les conditions expérimentales suivantes : intensité comprise en 100 et 75<sup>(1)</sup>, pose 112 secondes; il sera facile, par l'emploi de la lampe de Nernst, de reproduire cette intensité avec une exactitude très suffisante. La courbe des noirs montre que l'on a

$$\frac{dI}{I} = \frac{1}{222} \quad \text{pour} \quad d\alpha = 1,$$

c'est-à-dire qu'une différence d'intensité égale à  $\frac{1}{222}$  correspond à une variation de 1 division pour la déviation galvanométrique (or, on évalue facilement le quart d'une division). On peut dire, par conséquent, que la précision des mesures sera limitée par la constance de la source, qu'il est difficile de maintenir constante avec une précision de plus du  $\frac{1}{300}$ .

Si l'expérience photométrique nécessite l'emploi d'intensités notablement différentes des intensités optima, dont on vient de voir la détermination, il sera indispensable, au moins dans des expériences définitives, de voiler la plaque afin d'atteindre la région A. C'est un procédé analogue à celui qui consiste à employer dans les relais des électro-aimants polarisés.

Voici une expérience mettant en évidence directement l'influence du voile : sur une même plaque photographique, on fait 2 impressions différentes, l'une sur une plaque non voilée, l'autre sur une plaque préalablement voilée. On obtient sur la première plaque une impression dont la transparence est représentée par une déviation galvanométrique :  $\alpha_1 = 230$ , alors que le fond sur lequel se détache cette photographie correspond à une transparence représentée par la déviation galvanométrique  $\alpha_2 = 273$ .

Sur la plaque préalablement voilée, la même radiation que dans le premier cas produit, avec une durée de pose identique, une impression dont la transparence est représentée par  $\alpha'_1 = 96$ , alors que le fond correspond à une transparence représentée par  $\alpha'_2 = 141$ .

Dans le premier cas le noir est 0,18; dans le second cas, sous l'influence du voile, le noir devient 0,47.

---

(1) Dans cette région, les déviations galvanométriques varient linéairement, en fonction de l'intensité de la lumière, ce qui est avantageux, pour la construction des courbes (voir p. 344).

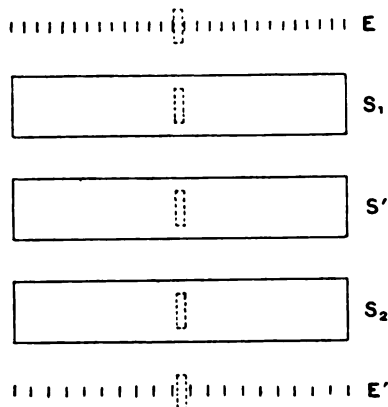
## CHAPITRE IV.

## AUTRES MÉTHODES.

*Emploi du spectrographe de Steinheil.*

Cet appareil m'a permis de réaliser la méthode suivante, qui paraît donner de bons résultats, mais sur laquelle j'ai fait peu d'essais <sup>(1)</sup>. Le châssis de ce spectrographe est muni d'un mouvement dans un sens parallèle à la fente, c'est-à-dire transversalement à la grande dimension des spectres. On commence par photographier : 1° l'échelle micrométrique E (fig. 16); 2° le spectre S<sub>1</sub> de la première

Fig. 16.



source de lumière; 3° le spectre S' de la source de lumière qu'on veut comparer à la première; 4° le spectre S<sub>2</sub> de la première source; 5° l'échelle micrométrique E'. Le chariot micrométrique est inutile. Ces cinq photographies s'obtiennent en déplaçant le châssis dans la glissière située au fond de la chambre photographique du spectrographe; à chaque déplacement un taquet arrête le châssis dans la position voulue. La plaque photographique replacée dans le même châssis après développement et fixage est observée ensuite avec la pile thermo-électrique. On amène l'image réelle du filament de la lampe sur une division déterminée de la photographie E du micromètre, on vérifie que l'image du filament tombe bien sur

(1) M. Cotton, dans le Mémoire cité, a indiqué plusieurs méthodes de photométrie photographique, d'ailleurs fort pratiques. Celle que je décris ici a l'avantage d'utiliser un appareil tel qu'il est livré par le constructeur.

la même division de la photographie E' du micromètre quand on déplace convenablement le cliché de bas en haut. La comparaison au moyen de la pile thermo-électrique des spectres  $S_1$  et  $S_2$  indique le degré d'homogénéité de la plaque. On cherche par tâtonnements sur quelle division du micromètre il faut placer l'image du filament pour que la transparence de  $S'$  soit égale à la moyenne des transparences de  $S_1$  et  $S_2$ .

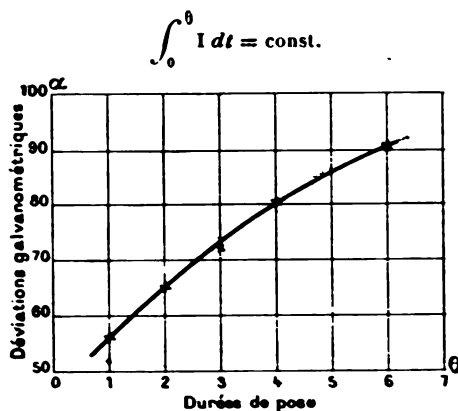
*Le noir est-il fonction de l'intégrale  $\int_0^{\theta} I dt$ , dans laquelle  $\theta$  désigne le temps de pose?*

Il y a plusieurs appareils photométriques qui sont fondés sur cette hypothèse : le noir est invariable si :  $\int_0^{\theta} I dt$  est constant.

Divers expérimentateurs l'ont admise, en particulier Simon (*Wied. Ann.*, t. LIX, 1896) dans ses recherches sur le spectre ultra-violet.

D'autre part, MM. Bouasse (*loc. cit.*) et Abney (*Phot. Journ.*, t. XVIII) ont trouvé que cette hypothèse était inexacte. M. Bouasse dit : « Le cliché est d'autant

Fig. 17.



plus dur que l'intensité est plus grande et le temps de pose plus court. . . Les clichés obtenus à l'aide d'intensités faibles sont toujours plus ou moins uniformément gris. »

C'est également à cette conclusion que Fizeau et Foucault étaient arrivés dans leurs recherches sur l'intensité de la lumière émise par le charbon dans l'expérience de Davy. Fizeau et Foucault formaient sur une couche sensible une série d'images, dont les intensités étaient en raison inverse de la durée de pose. Ils ont trouvé que les images successives ainsi obtenues sont sensiblement

égales tant que les durées de pose et les intensités varient entre les limites 1 et 10, c'est-à-dire tant que les rapports  $\frac{i}{i'} = \frac{\theta'}{\theta}$  n'atteignent pas une valeur plus grande que 10. Ils ont trouvé que, si l'on continue à faire varier l'intensité et le temps de pose au delà de cette limite, on s'aperçoit bientôt que les images ne sont plus égales. Pour les valeurs  $\theta' = 60\theta$  et  $i' = \frac{i}{60}$ , l'image obtenue avec l'intensité  $i'$  et dans le temps  $\theta'$  est incontestablement plus faible que celle qui a été produite par l'intensité  $i$  et dans le temps  $\theta$ .

J'ai appliqué la méthode précédemment décrite à l'étude de cette question, pour me rendre compte du degré d'inexactitude de cette hypothèse.

Voici quelques nombres (voir *fig. 17*) :

Numéros des impressions photographiques.	1. — Intensités en unités arbitraires.	0. — Temps de pose.	2. — Déviations galvanométriques.
	min.		
1.....	3,0	1	57,0
2.....	1,5	2	65,5
3.....	1,0	3	72,0
4.....	0,75	4	80,0
5.....	0,50	6	91,0

La courbe représentative montre que les noirs varient beaucoup : la transparence augmente avec la durée de pose.

Il n'est pas possible d'en déduire une méthode de mesure, même approximative.







# TABLE DES MATIÈRES (FASCICULE N° 5, 1905).

Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé; par MM. H. ROUSSE et Z. CARRIÈRE.....  
Étude expérimentale des actions photographiques; par M. C. CAMICHEL.....

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

**CAUCHY (A.). — Œuvres complètes d'Augustin Cauchy.** In-4.  
Chaque volume se vend séparément..... 25 fr.  
Prix pour les souscripteurs..... 20 fr.  
Les Tomes I, IV à XII de la 1<sup>re</sup> Série, et III à X de la 2<sup>e</sup> Série, ont été publiés précédemment. Le Tome V de la 2<sup>e</sup> Série vient de paraître.  
En souscription : 2<sup>e</sup> Série. TOME I. Mémoires extraits du *Journal de l'Ecole Polytechnique*..... 25 fr.  
Prix pour les souscripteurs..... 20 fr.

**FERMAT. — Œuvres de Fermat,** publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. In-4.

TOME I : Œuvres mathématiques diverses. — Observations sur Diophante. Avec 3 planches en héliogravure (Portrait de Fermat, fac-similé du titre de l'édition de 1679, et fac-similé d'une page de son écriture); 1891..... 22 fr.

TOME II : Correspondance de Fermat; 1894..... 22 fr.

TOME III : Traduction par M. PAUL TANNERY des écrits latins de Fermat, de l'*Inventum novum de Jacques de Billy*, du *Commercium epistolicum de Wallis*; 1896..... 28 fr.

**FOURIER. — Œuvres de Fourier,** publiées par les soins de Gaston Darboux, Membre de l'Institut, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique.

TOME I : *Théorie analytique de la chaleur*. In-4, xxviii-564 pages. 1888..... 25 fr.

TOME II : *Mémoires divers*. In-4, xvi-636 pages, avec un portrait de Fourier, reproduit par la photoglyptographie; 1890..... 25 fr.

**GOUSSAT (Edouard),** Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — *Cours d'Analyse mathématique.* (Cours de la Faculté des Sciences de Paris.) 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

TOME I. *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développement en séries. Applications géométriques.* Grand in-8 de vi-630 pages, avec 53 figures; 1902..... 20 fr.

TOME II. *Théorie des fonctions analytiques. Equations différentielles. Equations aux dérivées partielles. Éléments du calcul des variations;* 1904..... (Sous presse.)

**SALPHEN (G.-H.),** Membre de l'Institut. — *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.* 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

I<sup>re</sup> PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leur développement en séries;* 1886..... 15 fr.

II<sup>e</sup> PARTIE : *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géométrie et au Calcul intégral;* 1888..... 12 fr.

III<sup>e</sup> PARTIE : *Fragments.* (Quelques applications à l'Analyse, particulier à l'équation du 5<sup>e</sup> degré. Quelques applications des nombres. Questions diverses.) Publié par les soins de l'Académie des Sciences; 1891..... 12 fr.

**HUMBERT (G.),** Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — *Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique;* grand in-8 se vendant séparément :

TOME I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques;* 1902..... 12 fr.

TOME II : *Complément de la théorie des intégrales définies. Fonctions d'une variable imaginaire. Fonctions et applications d'équations différentielles;* 1904..... 12 fr.

**LAURENT (H.),** Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — *Cours d'Analyse.* 7 volumes in-8, avec figures.....

TOME I. — *Calcul différentiel. Applications analytiques;*

TOME II. — *Applications géométriques;* 1887.....

TOME III. — *Calcul intégral. Intégrales définies et indéfinies;* 1888.....

TOME IV. — *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales;* 1889.....

TOME V. — *Equations différentielles ordinaires;* 1890.....

TOME VI. — *Equations aux dérivées partielles. Objets divers;* 1891.....

TOME VII ET DERNIER. — *Applications géométriques de la théorie des équations différentielles;* 1891.....

**LEDEBUR (A.),** Professeur à l'Académie des Mines de Prusse. — *Traité de Technologie mécanique métallurgique.* 2<sup>e</sup> édition allemande par G. HUMBERT, Ingénieur en chef des Chemins de fer. Grand in-8 de iv-740 pages, avec 749 figures.....

**ROBIN (G.),** Chargé de Cours à la Faculté des Sciences. — *Œuvres scientifiques de Gustave Robin,* publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. Mémoires réunis et publiés par Louis RAFFY, chargé de Cours à la Faculté des Sciences. 3 volumes grand in-8, se vendant séparément :

MATHÉMATIQUES : *Nouvelle théorie des fonctions exponentielles et logarithmiques. Sur l'idée de nombre.* Un volume grand in-8; 1903.....

PHYSIQUE : Un volume grand in-8, en deux fascicules :

Physique mathématique (Distribution de l'Électricité, Mécanique, Fragments divers). Un fascicule grand in-8; 1904.....

Thermodynamique générale. (Équilibre et modifications de l'équilibre). Un fascicule grand in-8; 1901.....

CHIMIE : *Leçons de Chimie physique,* professées à la Faculté des Sciences de Paris. Un volume in-8..... (En préparation.)





ANNALES  
DE LA  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES  
SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,  
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1903.

---

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS,  
IMPRIMER-ÉDITEUR.

TOULOUSE.  
ED. PRIVAT,  
IMPRIMER-LIBRAIRE.

1903

(Ce Recueil paraît chaque trimestre.)

Quatrième fascicule.



---

# RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM.

---

## CINQUIÈME PARTIE.

LE THÉORÈME DE LAGRANGE ET LES CONDITIONS AUX LIMITES.

---

### CHAPITRE I.

LE THÉORÈME DE LAGRANGE ET LES LIQUIDES VISQUEUX.

---

§ 1. — EXTENSION DU THÉORÈME DE LAGRANGE AUX FLUIDES  
INCOMPRESSIBLES VISQUEUX.

On sait que Lagrange a énoncé, pour les fluides non visqueux, le théorème suivant, auquel il est d'usage de donner son nom :

*Si, pour une masse matérielle élémentaire du fluide, les trois quantités*

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

*sont égales à 0 à un instant quelconque du mouvement, elles restent égales à 0 pendant toute la durée du mouvement.*

Tout le monde connaît la belle démonstration que Cauchy a donnée de ce théorème, en prenant pour point de départ les équations hydrodynamiques de Lagrange, et la démonstration non moins élégante qu'en a donnée W. Thomson, au moyen des équations hydrodynamiques d'Euler.

Le théorème de Lagrange s'étend-il aux fluides visqueux? On a longtemps admis qu'il n'en était rien.

En 1869, de Saint-Venant <sup>(1)</sup> montra le premier que ce théorème pouvait s'étendre aux fluides visqueux; sa démonstration, qu'on pourrait peut-être souhaiter plus rigoureuse, s'étendait à tous les fluides; mais elle supposait que les rapports  $\frac{\lambda(\rho, T)}{\rho}$ ,  $\frac{\mu(\rho, T)}{\rho}$  étaient des constantes, ce qui n'est probablement vrai que dans les mouvements isothermiques des fluides incompressibles. En 1880, Bresse <sup>(2)</sup>, sans connaître le travail de Saint-Venant, dont il reconnut bientôt la priorité <sup>(3)</sup>, reprit une démonstration analogue. En 1893, M. H. Poincaré <sup>(4)</sup> donna, dans le même sens, de brèves indications. Enfin, en 1901, M. Hadamard publia <sup>(5)</sup> l'énoncé de ce théorème, dont il avait donné la démonstration dans son Cours du Collège de France.

Les démonstrations données par de Saint-Venant et par Bresse laissent peut-être quelque peu à désirer au point de vue de la rigueur.

Les brèves indications de M. Poincaré ne constituent pas une démonstration et M. Hadamard n'a pas publié jusqu'ici la démonstration qu'il a obtenue; nous allons donc faire connaître celle que nous avons donnée dans notre Cours, à la Faculté des Sciences de Bordeaux, pendant l'année scolaire 1900-1901.

Formons  $\frac{\partial \omega_x}{\partial t}$ .

Selon la première égalité (1), nous aurons

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> DE SAINT-VENANT, *Problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'une masse liquide, ou solide ductile, contenue dans un vase à parois verticales, pendant son écoulement par un orifice horizontal inférieur* (*Comptes rendus*, t. LXVIII, 1869, p. 221).

<sup>(2)</sup> BRESSE, *Fonction des vitesses, extension des théorèmes de Lagrange au cas d'un fluide imparfait* (*Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 501).

<sup>(3)</sup> BRESSE, *Réponse à une Note de M. Boussinesq* (*Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 857).

<sup>(4)</sup> H. POINCARÉ, *Théorie des tourbillons*, p. 193. Paris, 1893.

<sup>(5)</sup> J. HADAMARD, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, 1901.

ou bien, en tenant compte des égalités (1) et en posant

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$(2) \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{dv}{dt} - \omega_x \theta + \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ - u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - w \frac{\partial \omega_x}{\partial z}.$$

Les quantités  $\frac{\partial \omega_y}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \omega_z}{\partial t}$  sont susceptibles d'expressions analogues.

Ces expressions sont d'origine purement cinématique; elles sont donc entièrement générales.

Nous allons maintenant faire appel à des considérations dynamiques qui restreindront singulièrement la portée de nos raisonnements.

Nous supposons que le cas étudié est un des cas, définis au Chapitre III de la première Partie, où il existe une fonction  $\Lambda(x, y, z, t)$ . Les équations de l'hydrodynamique prendront alors la forme [1<sup>re</sup> Partie, égalités (157)]

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{du}{dt} - \frac{q_x}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \frac{dv}{dt} - \frac{q_y}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} + \frac{dw}{dt} - \frac{q_z}{\rho} = 0. \end{cases}$$

Supposons tout d'abord que le fluide soit *non visqueux*; on aura

$$q_x = 0, \quad q_y = 0, \quad q_z = 0,$$

et les égalités (3) donneront

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{du}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{dw}{dt} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{du}{dt} = 0. \end{cases}$$

Supposons maintenant que le fluide soit *non visqueux* et *quelconque* ou bien qu'il soit *visqueux*, mais qu'il soit *incompressible* et que sa *température soit, à chaque instant, uniforme*;  $\rho$  et  $T$  étant, dans ce dernier cas, indépendants

de  $x, y, z$ , nous aurons [I<sup>re</sup> Partie, égalités (58)]

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{q_x}{\rho} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta u, \\ \frac{q_y}{\rho} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v, \\ \frac{q_z}{\rho} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta w \end{cases}$$

et ces égalités peuvent encore s'écrire dans le premier cas, car alors les deux membres sont identiquement nuls.

Les égalités (3) et (5) donnent alors les égalités

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \omega_x, \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{du}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{dw}{dt} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \omega_y, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{du}{dt} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \omega_z, \end{cases}$$

qui renferment les égalités (4) comme cas particuliers.

En vertu de ces égalités (6), les égalités (2) deviennent

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = -\theta \omega_x + \frac{\partial u}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial u}{\partial y} \omega_y + \frac{\partial u}{\partial z} \omega_z - u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \omega_x, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Ces égalités (7) conduisent immédiatement au théorème suivant :

*Si l'on a, à l'instant  $t_0$ , pour tout point intérieur à un volume fini E,*

$$(8) \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0,$$

*on aura aussi à l'instant  $t_0$ , pour tout point intérieur à ce volume E,*

$$(9) \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial t} = 0.$$

Il est clair, d'ailleurs, qu'en tout point du domaine E, les dérivées des divers ordres par rapport à  $x, y, z$  de  $\frac{\partial \omega_x}{\partial t}, \frac{\partial \omega_y}{\partial t}, \frac{\partial \omega_z}{\partial t}$ , sont égales à 0.

Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

*Supposons qu'à l'instant  $t_0$  et pour tous les points intérieurs au volume E,*

les quantités

$$\begin{aligned}\omega_x, \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial t}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n \omega_x}{\partial t^n}, \\ \omega_y, \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial t}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n \omega_y}{\partial t^n}, \\ \omega_z, \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial t}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n \omega_z}{\partial t^n},\end{aligned}$$

soient toutes égales à 0, cas auquel il en est de même des dérivées de tous ordres de ces quantités par rapport à  $x, y, z$ . Nous aurons aussi à l'instant  $t_0$  et en tout point intérieur au volume E,

$$(10) \quad \frac{\partial^{n+1} \omega_x}{\partial t^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1} \omega_y}{\partial t^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1} \omega_z}{\partial t^{n+1}} = 0.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit de différentier  $n$  fois par rapport à  $t$  les égalités (7); tandis que les premiers membres deviennent identiques aux premiers membres des égalités (10), les seconds membres deviennent des fonctions linéaires et homogènes des diverses dérivées que nous savons être nulles.

En réunissant les deux théorèmes que nous venons de démontrer, nous parvenons à la proposition suivante :

*Si l'on a, à l'instant  $t_0$ , pour tout point intérieur au volume fini E,*

$$(8) \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0,$$

*les dérivées partielles de tous les ordres, par rapport à  $x, y, z, t$  de  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  sont nulles à l'instant  $t_0$ , en tout point intérieur au volume E.*

La formule

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z}$$

nous montre que  $\frac{d\omega_x}{dt}$  s'exprime en fonction linéaire et homogène des dérivées partielles du premier ordre de  $\omega_x$ .

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

*Si  $\frac{d^n \omega_x}{dt^n}$  s'exprime en fonction linéaire et homogène des dérivées partielles des  $n$  premiers ordres de  $\omega_x$ ,  $\frac{d^{n+1} \omega_x}{dt^{n+1}}$  s'exprime en fonction linéaire et homogène des  $(n+1)$  premiers ordres de  $\omega_x$ .*

On a, en effet,

$$\frac{d^{n+1}\omega_x}{dt^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{d^n \omega_x}{dt^n} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{d^n \omega_x}{dt^n} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{d^n \omega_x}{dt^n} + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{d^n \omega_x}{dt^n}.$$

Mais, par hypothèse,

$$\frac{d^n \omega_x}{dt^n} = \sum A_{pqrs} \frac{\partial^{p+q+r+s} \omega_x}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} \quad (p+q+r+s \leq n).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d^n \omega_x}{dt^n} &= \sum \left( A_{pqrs} \frac{\partial^{p+q+r+s+1} \omega_x}{\partial x^{p+1} \partial y^q \partial z^r \partial t^s} + \frac{\partial A_{pqrs}}{\partial x} \frac{\partial^{p+q+r+s} \omega_x}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{d^n \omega_x}{dt^n} &= \sum \left( A_{pqrs} \frac{\partial^{p+q+r+s+1} \omega_x}{\partial x^p \partial y^{q+1} \partial z^r \partial t^s} + \frac{\partial A_{pqrs}}{\partial y} \frac{\partial^{p+q+r+s} \omega_x}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{d^n \omega_x}{dt^n} &= \sum \left( A_{pqrs} \frac{\partial^{p+q+r+s+1} \omega_x}{\partial x^p \partial y^q \partial z^{r+1} \partial t^s} + \frac{\partial A_{pqrs}}{\partial z} \frac{\partial^{p+q+r+s} \omega_x}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{d^n \omega_x}{dt^n} &= \sum \left( A_{pqrs} \frac{\partial^{p+q+r+s+1} \omega_x}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^{s+1}} + \frac{\partial A_{pqrs}}{\partial t} \frac{\partial^{p+q+r+s} \omega_x}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} \right). \end{aligned}$$

Le théorème énoncé est alors évident.

On en tire de suite la proposition que voici :

*Les quantités  $\frac{d^n \omega_x}{dt^n}$ ,  $\frac{d^n \omega_y}{dt^n}$ ,  $\frac{d^n \omega_z}{dt^n}$  s'expriment, quel que soit  $n$ , en fonctions linéaires et homogènes des dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $n$  de  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ .*

Cette proposition, rapprochée de celle que nous avons précédemment démontrée, entraîne cette autre :

*Si l'on a à l'instant  $t_0$ , pour tous les points intérieurs à un certain espace E,*

$$(8) \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0,$$

*on a aussi au même instant, pour les mêmes points et quel que soit  $n$ ,*

$$(11) \quad \frac{d^n \omega_x}{dt^n} = 0, \quad \frac{d^n \omega_y}{dt^n} = 0, \quad \frac{d^n \omega_z}{dt^n} = 0.$$

Passons maintenant des notations d'Euler aux notations de Lagrange. Soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , à l'instant initial  $t_0$ , les coordonnées d'un point matériel appartenant au fluide; ses coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , à l'instant  $t$ , seront des fonctions de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $t$  :

$$x = x(a, b, c, t),$$

$$y = y(a, b, c, t),$$

$$z = z(a, b, c, t).$$



Considérons les points matériels qui, à l'instant  $t_0$ , se trouvent à l'intérieur du volume E; supposons que pour ces points matériels, entre les instants  $t_0$ ,  $t_1$ , les fonctions  $x(a, b, c, t)$ ,  $y(a, b, c, t)$ ,  $z(a, b, c, t)$  soient des fonctions analytiques de  $a, b, c, t$ .

Les égalités

$$u = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t}$$

montrent qu'il en est de même de  $u(a, b, c, t)$ ,  $v(a, b, c, t)$ ,  $w(a, b, c, t)$ .

On a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = & \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} \\ & - \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \end{aligned}$$

ou bien, selon les égalités (239) de la deuxième Partie de ces *Recherches*,

$$\begin{aligned} \omega_x = \frac{1}{\Omega} \left[ \frac{D(z, x)}{D(b, c)} \frac{\partial w}{\partial a} + \frac{D(z, x)}{D(c, a)} \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{D(z, x)}{D(a, b)} \frac{\partial w}{\partial c} \right. \\ \left. - \frac{D(x, y)}{D(b, c)} \frac{\partial v}{\partial a} - \frac{D(x, y)}{D(c, a)} \frac{\partial v}{\partial b} - \frac{D(x, y)}{D(a, b)} \frac{\partial v}{\partial c} \right]. \end{aligned}$$

De cette égalité et de deux égalités analogues relatives à  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , il résulte que, pour les points considérés et pendant le temps considéré,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  sont des fonctions analytiques de  $a, b, c, t$ .

Cela posé, supposons que, pour chacun des points considérés et à l'instant  $t_0$ , nous ayons

$$(8) \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0.$$

D'après ce que nous avons vu, nous aurons pour les mêmes points, au même instant et quel que soit  $n$ ,

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \omega_x(a, b, c, t) = 0, \\ \frac{\partial^n}{\partial t^n} \omega_y(a, b, c, t) = 0, \\ \frac{\partial^n}{\partial t^n} \omega_z(a, b, c, t) = 0, \end{cases}$$

en sorte que, pour ces mêmes points matériels, les égalités (8) demeureront constamment vérifiées entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ . D'où la proposition suivante :

*Si, à un instant donné  $t_0$ , les trois rotations sont nulles pour tous les points matériels qui remplissent un certain volume fini, elles demeureront nulles pour ces mêmes points tant que les coordonnées de chacun d'eux s'exprimeront en fonctions analytiques des variables de Lagrange.*

Peut-il arriver que, pour un point matériel M, pris parmi ceux que nous venons d'étudier, les quantités  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  cessent d'être toutes trois égales à 0 à partir d'un certain instant  $t_1$ , postérieur à  $t_0$ ? Il faudra pour cela qu'au moment où l'on traverse l'instant  $t_1$ , les coordonnées  $x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t)$  du point M cessent de varier analytiquement avec  $t$ ; il faudra donc qu'à l'instant  $t$  le mouvement de tous les points d'une masse d'étendue finie, dont fait partie le point M, cesse d'être analytique, ou bien que le point M se trouve sur une surface singulière, ou sur une ligne singulière, ou en un point singulier.

Examinons d'abord le cas où, à l'instant  $t$ , le point M se trouverait sur une surface singulière.

D'après ce que nous avons vu en la seconde Partie de ces *Recherches*, il existe deux sortes de surfaces singulières. Les surfaces de la première sorte passent sans cesse par les mêmes points matériels : elles peuvent se rencontrer en tous les fluides, sauf au sein des fluides visqueux, incompressibles et bons conducteurs de la chaleur. Les surfaces de la deuxième sorte *se propagent*; elles ne peuvent se rencontrer qu'au sein des fluides compressibles parfaits; ce sont ou bien des ondes de choc ou bien des ondes longitudinales.

Pour que le point M pût se trouver à l'instant  $t_1$  sur une onde de la première sorte, il faudrait qu'il s'y trouvât à l'instant  $t_0$ , ce que nous ne supposons pas; il nous reste donc à supposer que le fluide est compressible et parfait et à examiner ce qui arrive si une surface singulière, en se propageant, rencontre à l'instant  $t_1$  le point M; nous supposons, d'ailleurs, qu'aucune onde de choc ne parcourt le milieu, en sorte que la surface singulière considérée sera une onde au moins du premier ordre par rapport à  $u, v, w$ , et longitudinale.

Reprenons les notations employées aux Chapitres III et IV de la première Partie.

Lorsque le temps  $t$  s'approche de  $t_1$  par valeurs inférieures à  $t_1$ ,  $u, v, w$  tendent vers des limites  $u_1, v_1, w_1$ ;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  tendent vers des limites

$$\omega_{x1} = \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}, \quad \omega_{y1} = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \omega_{z1} = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Lorsque le temps  $t$  s'approche de  $t_1$  par valeurs supérieures à  $t_1$ ,  $u, v, w$  tendent

vers des limites  $u_2, v_2, w_2$ ;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  tendent vers des limites

$$\omega_{x2} = \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \quad \omega_{y2} = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad \omega_{z2} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

Mais l'onde étant au moins du premier ordre par rapport à  $u, v, w$ , il existe un vecteur  $(l_0, m_0, n_0)$  tel que l'on ait [1<sup>re</sup> Partie, égalités (211)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial y} &= \beta n_0, & \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial z} &= \gamma m_0, \\ \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial z} &= \gamma l_0, & \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial x} &= \alpha n_0, \\ \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x} &= \alpha m_0, & \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial y} &= \beta l_0 \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \omega_{x2} - \omega_{x1} &= \beta n_0 - \gamma m_0, \\ \omega_{y2} - \omega_{y1} &= \gamma l_0 - \alpha n_0, \\ \omega_{z2} - \omega_{z1} &= \alpha m_0 - \beta l_0. \end{aligned}$$

Mais l'onde étant longitudinale, on a [*loc. cit.*, égalités (223)]

$$\frac{l_0}{\alpha} = \frac{m_0}{\beta} = \frac{n_0}{\gamma}.$$

On a donc

$$(12) \quad \omega_{x2} = \omega_{x1}, \quad \omega_{y2} = \omega_{y1}, \quad \omega_{z2} = \omega_{z1}.$$

Comme on a, par hypothèse,

$$\omega_{x1} = 0, \quad \omega_{y1} = 0, \quad \omega_{z1} = 0,$$

on aura aussi

$$(13) \quad \omega_{x2} = 0, \quad \omega_{y2} = 0, \quad \omega_{z2} = 0.$$

Selon les égalités (12), l'onde considérée est onde au moins du premier ordre pour  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ; il existe donc trois quantités  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  telles que l'on ait

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial x} &= \alpha \Omega_x, & \frac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial y} &= \beta \Omega_x, & \frac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial z} &= \gamma \Omega_x, \\ & & \frac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial t} + \kappa \Omega_x &= 0, \end{aligned} \right.$$

et deux autres groupes analogues.

D'autre part, comme le fluide considéré est un fluide parfait, l'égalité (7),

vérifiée en tout point du fluide, devient simplement

$$(15) \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} = - \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \omega_x + \frac{\partial u}{\partial y} \omega_y + \frac{\partial u}{\partial z} \omega_z.$$

Les égalités (14) et (15) montrent sans peine que l'on a, en tout point de l'onde,

$$\begin{aligned} & (\alpha u + \beta v + \gamma w - \varkappa) \Omega_x \\ &= - \left[ \frac{\partial (v_2 - v_1)}{\partial y} + \frac{\partial (w_2 - w_1)}{\partial z} \right] \omega_x + \frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial y} \omega_y + \frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial z} \omega_z. \end{aligned}$$

Jointe aux égalités (13), cette égalité donne

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \varkappa) \Omega_x = 0.$$

Or, l'onde considérée se propage, en sorte que  $(\alpha u + \beta v + \gamma w - \varkappa)$  est assurément différent de 0; on a donc

$$\Omega_x = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (14),

$$(16) \quad \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial x} = \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial y} = \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial z} = \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial t} = \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial t},$$

et comme on a, par hypothèse,

$$\frac{\partial \omega_{x1}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial t} = 0,$$

on obtient le premier groupe d'égalités

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial y} = 0, & \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial z} = 0, & \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial y} = 0, & \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial z} = 0, & \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial y} = 0, & \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial z} = 0, & \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial t} = 0. \end{array} \right.$$

Les deux autres groupes se démontrent d'une manière analogue.

Nous allons étendre ces égalités aux valeurs prises, à l'instant  $t_1$  et au point M, par les dérivées partielles d'ordre quelconque de  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ .

Supposons, en effet, qu'elles soient démontrées pour les dérivées partielles de  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  jusqu'à l'ordre  $n$  inclusivement, et proposons-nous de les étendre aux dérivées partielles d'ordre  $(n+1)$  des mêmes quantités.

Considérons l'équation (15), qui est vérifiée en tout point du milieu, et diffé-

renions-la P fois par rapport à  $x$ , Q fois par rapport à  $y$ , R fois par rapport à  $z$ , P, Q, R vérifiant l'égalité

$$P + Q + R = n.$$

Elle nous donnera une égalité de la forme

$$\frac{\partial^{n+1}\omega_x}{\partial t \partial x^P \partial y^Q \partial z^R} + u \frac{\partial^{n+1}\omega_x}{\partial x^{P+1} \partial y^Q \partial z^R} + v \frac{\partial^{n+1}\omega_x}{\partial x^P \partial y^{Q+1} \partial z^R} + w \frac{\partial^{n+1}\omega_x}{\partial x^P \partial y^Q \partial z^{R+1}} = f,$$

$f$  étant une fonction linéaire et homogène de  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $n$  inclusivement; d'après ce que nous supposons démontré, la valeur de  $f$  au point M tend vers 0 lorsque le temps  $t$  s'approche de  $t_1$ , soit par valeurs inférieures à  $t_1$ , soit par valeurs supérieures à  $t_1$ .

Nous aurons donc, au point M et à l'instant  $t_1$ ,

$$(18) \quad \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x_2} - \omega_{x_1})}{\partial t \partial x^P \partial y^Q \partial z^R} + u \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x_2} - \omega_{x_1})}{\partial x^{P+1} \partial y^Q \partial z^R} + v \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x_2} - \omega_{x_1})}{\partial x^P \partial y^{Q+1} \partial z^R} + w \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x_2} - \omega_{x_1})}{\partial x^P \partial y^Q \partial z^{R+1}} = 0.$$

Mais, d'autre part, d'après ce que nous supposons démontré, l'onde qui passe au point M à l'instant  $t$  est une onde persistante dont l'ordre par rapport à  $\omega_x$  n'est pas inférieur à  $(n+1)$ . Il existe donc une grandeur  $\Omega_x$  telle que toutes les dérivées d'ordre  $(n+1)$  de  $(\omega_{x_2} - \omega_{x_1})$  soient données, au point M et à l'instant  $t_1$ , par la formule

$$(19) \quad \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x_2} - \omega_{x_1})}{\partial x^P \partial y^Q \partial z^R \partial t^S} = \alpha^P \beta^Q \gamma^R (-\mathcal{K})^S \Omega_x \quad (P + Q + R + S = n + 1).$$

Selon cette formule, l'égalité (18) devient

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathcal{K}) \alpha^P \beta^Q \gamma^R \Omega_x = 0.$$

L'onde étant une onde qui se propage,  $(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathcal{K})$  n'est pas égal à 0; l'égalité précédente exige donc que l'on ait

$$\Omega_x = 0,$$

en sorte que l'égalité (19) devient

$$\frac{\partial^{n+1}\omega_{x_2}}{\partial x^P \partial y^Q \partial z^R \partial t^S} = \frac{\partial^{n+1}\omega_{x_1}}{\partial x^P \partial y^Q \partial z^R \partial t^S}.$$

Mais, selon l'hypothèse faite, toutes les dérivées partielles de  $\omega_{x_1}$  sont nulles au point M et à l'instant  $t_1$ ; on a donc, en ce point et à cet instant,

$$\frac{\partial^{n+1}\omega_{x_2}}{\partial x^P \partial y^Q \partial z^R \partial t^S} = 0 \quad (P + Q + R + S = n + 1).$$

On démontrerait des égalités analogues pour  $\omega_{y_2}$  et  $\omega_{z_2}$ .

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

*Au point M, lorsque le temps  $t$  tend vers  $t_1$ , par valeurs supérieures à  $t_1$ , les dérivées partielles d'ordre quelconque de  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  tendent toutes vers 0.*

Dès lors, en vertu d'un lemme précédemment démontré, *il en est de même, quel que soit  $n$ , des quantités*

$$\frac{d^n \omega_x}{dt^n}, \quad \frac{d^n \omega_y}{dt^n}, \quad \frac{d^n \omega_z}{dt^n}.$$

Depuis l'instant  $t_1$  jusqu'à un instant postérieur  $t_2$ , les coordonnées  $x(a, b, c, t)$ ,  $y(a, b, c, t)$ ,  $z(a, b, c, t)$  du point M redeviendront fonctions analytiques de  $t$ . Dès lors, entre les instants  $t_1$ ,  $t_2$ , les trois rotations  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  relatives au point M resteront égales à zéro.

Lors donc qu'au sein d'un fluide parfait, une onde longitudinale interrompt le caractère analytique du mouvement, elle n'empêche point le théorème précédemment démontré de demeurer exact.

Dès lors, *considérons un fluide pris dans les conditions qui ont été énumérées au début de ce Paragraphe, et exempt d'onde de choc.*

*Mettons à part :*

1° *Les points matériels qui forment des surfaces singulières exemptes de propagation;*

2° *Les points matériels qui, pendant la durée du mouvement, seront rencontrés par des lignes singulières; en général, ces points formeront certaines surfaces;*

3° *Les points matériels qui, à un instant quelconque du mouvement, deviendront points singuliers; en général, ces points se succéderont sur certaines lignes.*

*Pour tout autre point matériel, si les quantités  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  sont égales à zéro au début du mouvement, elles sont égales à zéro pendant toute la durée du mouvement.*

Dans un fluide en repos,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  sont nuls en tout point; dès lors, le théorème précédent entraîne le corollaire que voici :

*Supposons qu'un fluide, pris dans les conditions qui ont été définies au début de ce paragraphe, et partant du repos, soit mis en mouvement sans qu'à aucun moment la vitesse d'aucun point matériel soit discontinue. A aucun instant du mouvement, on ne pourra trouver dans le fluide un volume*

*d'étendue finie en tout point duquel l'une des trois rotations  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  soit différente de zéro.*

Les deux propositions que nous venons d'énoncer sont subordonnées à une supposition fondamentale, hors de laquelle elles pourraient être fausses; elles supposent qu'AU COURS DU LAPSE DE TEMPS AUQUEL ON LES APPLIQUE, IL N'EXISTE AUCUN INSTANT  $t$  POUR LEQUEL LES COORDONNÉES  $x(a, b, c, t)$ ,  $y(a, b, c, t)$ ,  $z(a, b, c, t)$  DE TOUS LES POINTS MATÉRIELS QUI COMPOSENT UNE MASSE FINIE CESSERAIENT D'ÊTRE DES FONCTIONS ANALYTIQUES DE  $t$ .

Nous verrons dans la suite l'importance de cette restriction.

Cette restriction ne pèse pas sur le théorème de Lagrange lorsqu'on se borne à l'appliquer aux fluides parfaits; dans ce cas, en effet, la démonstration de Cauchy, aussi bien que la démonstration de W. Thomson sont applicables, et ces démonstrations supposent seulement que les dérivées partielles du second ordre de  $x(a, b, c, t)$ ,  $y(a, b, c, t)$ ,  $z(a, b, c, t)$  existent et sont finies pour le laps de temps et pour la masse fluide auxquels on applique le théorème.

## § 2. — FORME DES ACTIONS DE VISCOSITÉ LORSQUE LES ROTATIONS SONT NULLES.

Imaginons un milieu ayant en tout point même densité et même température. Les composantes du champ de viscosité, données par les égalités (58) de la première Partie, deviendront

$$q_x = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

$$q_y = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v,$$

$$q_z = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w,$$

tandis que les composantes, en chaque point de la surface, de la pression de viscosité seront données par les égalités (57) de la première Partie :

$$p_x = \lambda \theta \cos(n_i, x) + \mu \frac{\partial u}{\partial n_i} + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(n_i, z) \right],$$

$$p_y = \lambda \theta \cos(n_i, y) + \mu \frac{\partial v}{\partial n_i} + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(n_i, z) \right],$$

$$p_z = \lambda \theta \cos(n_i, z) + \mu \frac{\partial w}{\partial n_i} + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(n_i, z) \right].$$

Visiblement, ces six égalités peuvent être remplacées par les suivantes :

$$q_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right),$$

$$q_y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right),$$

$$q_z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right),$$

$$p_x = \lambda \theta \cos(n_i, x) + \mu [\omega_z \cos(n_i, y) - \omega_y \cos(n_i, z)] + 2\mu \frac{\partial u}{\partial n_i},$$

$$p_y = \lambda \theta \cos(n_i, y) + \mu [\omega_x \cos(n_i, z) - \omega_z \cos(n_i, x)] + 2\mu \frac{\partial v}{\partial n_i},$$

$$p_z = \lambda \theta \cos(n_i, z) + \mu [\omega_y \cos(n_i, x) - \omega_x \cos(n_i, y)] + 2\mu \frac{\partial w}{\partial n_i}.$$

Si nous considérons maintenant le fluide visqueux étudié au Paragraphe précédent, nous aurons, en tout point de ce fluide et à tout instant,

$$\theta = 0$$

par hypothèse, et

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0$$

par démonstration. Alors les égalités précédentes deviendront

$$(20) \quad q_x = 0, \quad q_y = 0, \quad q_z = 0$$

et

$$(21) \quad p_x = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n_i}, \quad p_y = 2\mu \frac{\partial v}{\partial n_i}, \quad p_z = 2\mu \frac{\partial w}{\partial n_i}.$$

Les égalités (20) nous montrent qu'*au sein d'un fluide visqueux, incompressible, dont tous les points sont à la même température et où les rotations sont nulles, les équations indéfinies du mouvement sont les mêmes que si le fluide était non visqueux.*





ligne fermée quelconque, tracée à la surface du solide, en supposant que  $u$ ,  $v$ ,  $w$  soient les composantes de la vitesse d'un point matériel appartenant au solide. Voyons si ce dernier résultat est, en général, acceptable.

L'expression  $(u dx + v dy + w dz)$  représente le produit de l'élément  $dL$ , appartenant à la courbe  $L$ , par la projection sur cet élément de la vitesse d'un point qui en fait partie. Pour obtenir ce produit, on peut décomposer comme l'on veut la vitesse du point  $M$ , former pour chacune de ses composantes le produit analogue et ajouter ensemble tous ces produits.

Or, la vitesse de tout point  $M$  du solide est la résultante des vitesses du même point en deux autres mouvements du même solide : un mouvement de rotation qui, dans le temps  $dt$ , fait tourner le solide d'un angle  $\theta dt$  autour d'une certaine droite  $D$ , et un mouvement de translation par lequel, dans le temps  $dt$ , tous les points du solide se déplacent d'une longueur  $\lambda dt$  parallèlement à la droite  $D$ .

Comme courbe fermée  $L$ , prenons l'intersection de la surface du solide par un plan perpendiculaire à la droite  $D$ . Soient  $O$  l'intersection de ce plan avec la droite  $D$ ;  $r$  la distance du point  $O$  au point  $M$ , origine de l'élément  $dL$ ;  $d\psi$  l'angle sous lequel, du point  $O$ , on voit l'élément  $dL$ .

Le produit géométrique de l'élément  $dL$  et de la vitesse du point  $M$  dans le premier mouvement est  $\theta r^2 d\psi$ ; quant au produit géométrique de l'élément  $dL$  et de la vitesse du point  $M$  dans le second mouvement, il est nul, car cette vitesse est perpendiculaire au plan de la courbe  $L$ .

Nous aurons donc

$$\int_L (u dx + v dy + w dz) = \theta \int_L r^2 d\psi = 2\mathfrak{A}\theta.$$

$\mathfrak{A}$  étant l'aire plane à laquelle la courbe  $L$  sert de contour.

Si  $\theta$  n'est pas nul, l'égalité (22) ne peut être vraie pour la courbe  $L$ .

*Donc, en général, un fluide dont le mouvement est exempt de rotations et qui baigne un solide en mouvement ne peut adhérer à la surface de ce solide.*

## § 2. — CONSÉQUENCES RELATIVES AUX FLUIDES PARFAITS.

Considérons, en premier lieu, un fluide entièrement dénué de viscosité.

Pour que ce fluide n'adhère pas à un solide qu'il baigne, il faut que le frottement au contact du solide et du fluide soit nul et qu'il en soit de même de la viscosité au contact de ces deux corps. Si ce frottement et cette viscosité ne sont pas nuls tous deux, le fluide adhère certainement au solide, en toutes circonstances, le long de leur commune surface.

Supposons, d'autre part, que le fluide étudié soit un fluide compressible ou non compressible, mais qui se meut dans des conditions telles qu'il existe une fonction  $\Lambda(x, y, z, t)$  (*Recherches sur l'Hydrodynamique*, I<sup>re</sup> Partie, Chap. III, § 2).

Supposons, enfin, qu'à l'instant initial, le fluide et le solide immergé soient en repos et qu'à partir de cet état de repos, ils se mettent en mouvement sans que la vitesse d'aucun point éprouve de variation brusque. Selon les démonstrations que Cauchy ou W. Thomson ont données du théorème de Lagrange, le fluide prendra un mouvement sans rotation. Donc, d'après le théorème démontré au Paragraphe 1, il ne pourra, en général, adhérer à la surface du solide.

Nous sommes ainsi conduits à la conclusion suivante :

*Si un fluide, compressible ou non compressible, mais entièrement dénué de viscosité, se meut de telle sorte qu'il existe une fonction  $\Lambda(x, y, z, t)$ , on ne peut admettre, en général, qu'il existe soit un frottement, soit une viscosité au contact de ce fluide et d'un solide qu'il baigne.*

Pour un système formé de pareils fluides, la seule forme logique que l'on puisse donner au problème hydrodynamique consiste à admettre que l'on a simplement, le long de la surface de contact d'un solide et du fluide, ou de deux fluides différents, la relation

$$(u_1 - u_2) \cos(N, x) + (v_1 - v_2) \cos(N, y) + (w_1 - w_2) \cos(N, z) = 0,$$

dont l'origine est purement cinématique.

C'est, en effet, sur ces fondements, logiquement irréprochables, mais souvent incapables de supporter une analyse ayant avec les faits d'expérience une suffisante affinité, que reposent la plupart des écrits classiques relatifs à l'Hydrodynamique.

### § 3. — LES LIQUIDES VISQUEUX ET L'EXISTENCE DU FROTTEMENT AUX SURFACES LIMITES.

Considérons maintenant un fluide visqueux incompressible et assujéti à garder, au cours de ses mouvements, une température invariable. Imaginons que ce fluide baigne certains solides mobiles.

Mettons le système en mouvement sans secousse brusque, de telle sorte que la vitesse de chaque point matériel varie d'une manière continue.

Les quantités  $p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}$ , en chaque point de la surface de contact S du solide et du fluide, partent de 0 et varient d'une manière continue avec  $t$ ; il en est de même de la projection du vecteur  $p_1$  sur la surface S.

*Si le frottement au contact du solide et du fluide n'est pas nul, cas auquel*

$\Gamma(\rho_1, \rho_2, \varpi, T)$  est assurément négatif, la projection du vecteur  $p_1$  sur la surface  $S$  demeure assurément inférieure à  $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, \varpi, T)$ , tant que  $t$  ne surpasse pas une certaine limite  $\theta$ . Donc, *tant que  $t$  ne surpasse pas une certaine limite  $\theta$ , le liquide demeure soudé au solide le long de leur commune surface.*

*Supposons, d'autre part, que les coordonnées des divers points matériels qui constituent le fluide varient analytiquement avec  $t$  depuis l'instant initial  $t = t_0$  jusqu'à l'instant  $t = \tau$ , la différence  $(\tau - t_0)$  étant finie.* D'après ce qui a été démontré au Paragraphe 1, le théorème de Lagrange s'appliquerait à notre liquide visqueux de l'instant  $t = t_0$  à l'instant  $t = \tau$ ; pendant ce temps, le fluide serait sans rotation.

*Donc on pourrait, à partir de l'instant initial  $t_0$ , déterminer un laps de temps fini pendant lequel le fluide serait dépourvu de rotation et adhérerait aux solides mobiles; en général, ces deux propositions sont contradictoires, comme nous l'avons vu au Paragraphe 1.*

*On ne peut lever cette contradiction qu'en admettant l'une au moins des deux hypothèses suivantes :*

1° *Il n'y a pas de frottement le long des surfaces de contact du solide et du fluide.*

2° *Pour  $t = t_0$ , les coordonnées des points du fluide ne sont pas fonctions analytiques de  $t$ .*

#### § 4. — LES LIQUIDES VISQUEUX ET LA VISCOSITÉ LE LONG DES SURFACES DE CONTACT AVEC LES SOLIDES IMMERGÉS.

Supposons que le liquide visqueux n'exerce aucun frottement à la surface des solides qu'il baigne; nous aurons alors, en tout point de la surface de contact du solide et du fluide,

$$(23) \quad \Gamma = 0, \quad \mathfrak{C} = 0.$$

Supposons, d'ailleurs, que la surface de contact ne soit pas exempte de viscosité, en sorte que l'on ait

$$(24) \quad f < 0.$$

Dans ce cas, le fluide ne demeure plus, en général, soudé au solide et la difficulté que nous avons rencontrée au Paragraphe précédent ne se rencontrera plus. Mais nous allons rencontrer une autre difficulté analogue, en traitant certains problèmes, le suivant par exemple :

*Considérons un solide de révolution immergé dans un fluide visqueux*

*indéfini. Imaginons que le système tout entier soit primitivement au repos, puis que, sans secousse, de manière que les vitesses de tous les points demeurent fonctions continues de  $t$ , le solide se mette à tourner autour de son axe de révolution.*

*Peut-il arriver que le liquide demeure immobile?*

Dans ce cas, les actions de viscosité demeureraient nulles en tout point de ce corps; en tout point de la surface de contact du solide et du fluide, on aurait

$$p_{1x} = 0, \quad p_{1y} = 0, \quad p_{1z} = 0.$$

Comme on aurait également

$$(25) \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0,$$

en tenant compte de l'égalité (23), on transformerait les égalités (80) de la troisième Partie en

$$(\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, x) = -f u_2,$$

$$(\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, y) = -f v_2,$$

$$(\Pi_1 - \varpi) \cos(n_1, z) = -f w_2.$$

Multiplions respectivement ces égalités par  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $w_2$  et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; en tenant compte des égalités (40 bis) de la troisième Partie, (24) et (25), nous trouverons l'égalité

$$u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = 0,$$

qui est absurde, puisque le solide n'est pas immobile.

Le fluide se mettra donc en mouvement et ce mouvement sera forcément symétrique autour de l'axe de révolution du solide pris pour axe des  $z$ .

Rapportons un point quelconque du système à des coordonnées cylindriques  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ .

Continuons à désigner par  $w$  la composante parallèle à  $Oz$  de la vitesse; soit  $R$  la composante centrifuge de la vitesse; soit  $\Theta$  la composante perpendiculaire aux deux précédentes. Nous aurons évidemment

$$u = R \cos \theta - \Theta \sin \theta,$$

$$v = R \sin \theta + \Theta \cos \theta.$$

Les trois quantités  $R$ ,  $\Theta$ ,  $w$  peuvent dépendre de  $r$  et de  $z$ , mais point de  $\theta$ .

Nous aurons alors

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{R \sin \vartheta + \Theta \cos \vartheta}{r} \sin \vartheta + \left( \frac{\partial R}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{\partial \Theta}{\partial r} \sin \vartheta \right) \cos \vartheta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{R \sin \vartheta + \Theta \cos \vartheta}{r} \cos \vartheta + \left( \frac{\partial R}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{\partial \Theta}{\partial r} \sin \vartheta \right) \sin \vartheta, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z} \cos \vartheta - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \sin \vartheta, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{R \cos \vartheta - \Theta \sin \vartheta}{r} \sin \vartheta + \left( \frac{\partial R}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cos \vartheta \right) \cos \vartheta, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{R \cos \vartheta - \Theta \sin \vartheta}{r} \cos \vartheta + \left( \frac{\partial R}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cos \vartheta \right) \sin \vartheta, \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z} \sin \vartheta + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cos \vartheta, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \vartheta, \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \vartheta, \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Ces relations permettraient d'obtenir les équations du mouvement du fluide.

Proposons-nous simplement de calculer, en chaque point de la surface de contact du solide et du fluide, la composante  $p_{i\theta}$  du vecteur  $p_i$  dans la direction de la vitesse  $\Theta$ .

Comme cette composante a évidemment une valeur indépendante de  $\theta$ , il suffira de la calculer pour  $\theta = 0$ , c'est-à-dire en un point du plan  $zOx$ ; elle se réduit alors à  $p_{ix}$  ou bien, selon les égalités (21), à

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial n_i} = 2\mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \sin(n_i, z) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(n_i, z) \right].$$

Les égalités (26), où l'on doit faire  $\theta = 0$ , transformant l'expression précédente en

$$2\mu \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial r} \sin(n_i, z) + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cos(n_i, z) \right] = 2\mu \frac{\partial \Theta}{\partial r_i}.$$

On a donc

$$(27) \quad p_{i\theta} = 2\mu \frac{\partial \Theta}{\partial n_i}.$$

Peut-il arriver que  $\Theta$  soit nul en tous les points du fluide? S'il en était ainsi, l'équation (27) que nous venons d'obtenir donnerait, en tout point de la surface

de contact du solide et du fluide,

$$p_n = 0,$$

et, par conséquent, en tout point de cette même surface, la vitesse relative du solide et du fluide serait située dans le méridien; mais ceci exigerait, contrairement à l'hypothèse faite, que  $\Theta$  fût, en chaque point de cette surface, égal à la vitesse avec laquelle le solide tourne autour de  $Oz$ .

$\Theta$  n'est donc pas nul, en général, au sein du fluide; si nous traçons une circonférence de rayon  $r$  ayant son centre sur  $Oz$ ,  $\Theta$  aura la même valeur en tous les points de cette circonférence et la circulation le long de cette circonférence aura pour valeur

$$C = 2\pi r\Theta.$$

Supposons maintenant qu'à partir de l'instant initial  $t_0$  et tant que  $t$  ne surpasse pas une certaine limite, le fluide se meuve de telle sorte que les coordonnées de chaque point matériel soient des fonctions analytiques de  $t$ ; nous pourrions faire usage du théorème démontré au Chapitre I, Paragraphe 1, les composantes  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  de la rotation seront nulles en tout point du fluide pour toute valeur de  $t$  inférieure à la limite considérée.

Les quantités  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  étant nulles dans tout le fluide, la circulation  $C$  ne peut être différente de 0 le long d'une courbe fermée que s'il existe une ligne singulière empêchant cette courbe fermée de se réduire à un point. Par raison de symétrie, il ne peut exister ici de ligne singulière aboutissant à la surface du solide autre que l'axe des  $z$ . On voit alors sans peine que la circulation le long d'une circonférence ayant son centre sur l'axe des  $z$  doit avoir pour valeur

$$C = K(t),$$

$K(t)$  ayant, à un même instant, la même valeur pour toutes les circonférences de ce genre que l'on peut tracer au sein du fluide, au voisinage de la surface du solide. On aurait donc, en tout point pris au sein du fluide,

$$(28) \quad \Theta = \frac{K(t)}{2\pi r}.$$

Considérons un point de la surface de contact du liquide et du solide; en ce point, l'égalité (7) serait applicable au liquide, tandis que la vitesse de rotation du solide serait  $\Omega(t)r$ , en désignant par  $\Omega(t)$  sa vitesse angulaire de rotation à l'instant  $t$ ; dès lors, les égalités (80) de la quatrième Partie, jointes aux égalités (2) et (7), donneraient, en tout point de la surface de contact du solide et du liquide, l'égalité

$$2\mu \frac{\partial \Theta}{\partial n_i} = -f[\Theta - \Omega(t)r]$$

que l'égalité (28) transforme en

$$(29) \quad \frac{\mu}{\pi} \frac{K(t)}{r^2} \cos(n_i, r) - f \frac{K(t)}{2\pi r} + f \Omega(t) r = 0.$$

Il est clair qu'une telle égalité ne saurait être, en général, vérifiée en tous les points du solide; voici, entre autres, un moyen de faire éclater aux yeux cette impossibilité :

Supposons que le solide présente plusieurs parallèles de rayon maximum ou minimum; soient  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , les rayons de ces parallèles, rayons que l'on peut se donner arbitrairement; en tout point d'un tel parallèle, on aurait  $\cos(n_i, r) = 1$ , et l'égalité (29) donnerait les égalités

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mu}{\pi r_1^2} - \frac{f}{2\pi r_1} \right) \frac{K(t)}{\Omega(t)} + f r_1 &= 0, \\ \left( \frac{\mu}{\pi r_2^2} - \frac{f}{2\pi r_2} \right) \frac{K(t)}{\Omega(t)} + f r_2 &= 0, \\ \left( \frac{\mu}{\pi r_3^2} - \frac{f}{2\pi r_3} \right) \frac{K(t)}{\Omega(t)} + f r_3 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

auxquelles, en général, il est impossible de satisfaire en disposant du seul rapport  $\frac{K(t)}{\Omega(t)}$ .

*La difficulté que nous venons de rencontrer en étudiant le mouvement d'un liquide visqueux exempt de frottement à la surface des solides qu'il baigne ne peut admettre que deux solutions :*

1° *Ou bien les surfaces de contact du liquide et des solides sont exemptes de viscosité :*

$$(30) \quad f = 0.$$

2° *Ou bien les coordonnées des points matériels qui constituent le fluide ne peuvent, à partir de l'instant initial  $t_0$  du mouvement, s'exprimer en fonctions analytiques de  $t$ .*

#### § 5. — EXAMEN DES RÉSULTATS OBTENUS AUX DEUX PARAGRAPHES PRÉCÉDENTS.

Si nous réunissons les résultats obtenus au Paragraphe 3 et au Paragraphe 4, nous pouvons énoncer la proposition que voici :

*Lorsqu'un système formé de solides mobiles et d'un liquide visqueux, de*

*température uniforme et invariable, part du repos et se met en mouvement sans secousse brusque, les lois de ce mouvement prêtent à contradiction, à moins que l'on admette l'une ou l'autre des hypothèses suivantes:*

1° *Les surfaces de contact des solides et du liquide ne sont affectées ni de viscosité, ni de frottement;*

2° *Il est impossible, à partir de l'instant initial  $t_0$  du mouvement, d'exprimer les coordonnées de chacun des points matériels qui composent le fluide en fonction analytique de  $t$ .*

Examinons successivement ces deux hypothèses.

Si nous admettons la première hypothèse, nous devons imaginer que le mouvement d'un liquide visqueux est assujéti, le long des parois fixes ou mobiles auxquelles il confine, à la seule condition

$$(31) \quad (u_1 - u_2) \cos(N, x) + (v_1 - v_2) \cos(N, y) + (w_1 - w_2) \cos(N, z) = 0,$$

qui est d'origine purement cinématique.

Mais un autre point est également hors de doute. La considération de la viscosité intrinsèque des liquides serait impuissante à fournir des équations comparables aux faits d'expérience les mieux constatés si l'on se bornait à l'emploi, le long des surfaces terminales, de la condition (31). Il pourrait même arriver que la solution de certains problèmes essentiels devînt alors indéterminée.

Examinons, par exemple, le célèbre problème de Poiseuille :

*Un liquide, parvenu à l'état de régime permanent, s'écoule par filets parallèles à l'intérieur d'un conduit cylindrique (Recherches, IV<sup>e</sup> Partie, Chap. III, § 4).*

Nous pourrions encore établir que la vitesse  $w$  vérifie l'équation aux dérivées partielles [*loc. cit.*, équation (132 bis)]

$$(32) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = K^2.$$

Mais la vitesse  $w$  étant, en chaque point, tangente à la paroi solide, la condition (31) sera vérifiée d'elle-même; nous n'aurons donc, pour déterminer  $w$ , que l'équation (32), qui ne saurait suffire à cette objet.

La première des deux hypothèses énoncées doit donc être rejetée et nous sommes contraints d'adopter la seconde, qui peut, plus explicitement, être formulée de la manière suivante :

*Au sein d'un liquide visqueux, en contact avec des solides fixes ou mobiles, il existe un domaine fini, contigu aux parois solides, où les coordonnées des*



*divers points matériels ne sont pas exprimables en fonctions analytiques du temps à partir de l'instant initial du mouvement. Ce domaine peut comprendre tout le fluide. S'il comprend seulement une partie du fluide, cette partie se compose des mêmes masses pendant toute la durée du mouvement.*

Cette proposition fondamentale a été découverte par M. Boussinesq <sup>(1)</sup>; dans un cas très simple, M. Boussinesq a pu donner, sous forme finie, les lois du mouvement d'un liquide qui part du repos et qui demeure adhérent à une paroi solide; la solution obtenue est, en effet, non analytique pour la valeur de  $t$  qui correspond au début du mouvement.

Il est permis de remarquer qu'aux difficultés que nous avons signalées une solution, différente de celle qu'a proposée M. Boussinesq, aurait pu se présenter comme acceptable. On aurait pu imaginer que les coordonnées de chacun des points matériels du fluide situés à distance finie des parois solides s'expriment en fonctions analytiques de  $t$ , à partir de l'instant initial du mouvement, et jusqu'à un certain instant; mais qu'en même temps, à l'instant initial du mouvement, une onde se détache de la paroi solide et se propage dans le fluide. Les rotations seraient alors, à un instant donné, nulles pour les points matériels que l'onde n'a pas encore atteints, et différentes de zéro pour les points matériels qu'elle a dépassés. En prouvant, dans la seconde Partie de ces *Recherches*, qu'une onde ne pouvait se propager au sein d'un fluide visqueux, nous avons rendu cette opinion inacceptable et, partant, mis hors de doute l'interprétation proposée par M. Boussinesq.

Mais une grave question se présente maintenant. Sera-t-il toujours possible de trouver, pour les équations du mouvement d'un fluide visqueux qui part du repos, des intégrales non analytiques à l'instant initial? Le problème que M. Boussinesq a pu résoudre dans un cas particulier admettra-t-il une solution en général? Il semble malaisé de répondre à cette question. Il est permis de se demander si l'étude du mouvement des fluides visqueux ne conduira pas, dans certains cas, à d'insurmontables contradictions.

---

(<sup>1</sup>) J. BOUSSINESQ, *Sur la manière dont les frottements entrent en jeu dans un fluide qui sort de l'état de repos, et sur leur effet pour empêcher l'existence d'une fonction des vitesses* (*Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 736). — *Quelques considérations à l'appui d'une Note du 29 mars sur l'impossibilité d'admettre, en général, une fonction des vitesses dans toute question d'Hydrodynamique où les frottements ont un rôle notable* (*Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 967).

## SIXIÈME PARTIE.

SUR LES DEUX COEFFICIENTS DE VISCOSITÉ ET LA VISCOSITÉ  
AU VOISINAGE DE L'ÉTAT CRITIQUE.

## CHAPITRE I.

DES DEUX COEFFICIENTS DE VISCOSITÉ  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$ .§ 1. — EXAMEN DES DIVERSES HYPOTHÈSES QUI ONT ÉTÉ FAITES  
TOUCHANT LES COEFFICIENTS DE VISCOSITÉ  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$ .

Au cours des *Recherches sur l'Hydrodynamique des fluides visqueux*, que nous avons développées dans les précédentes Parties, nous avons toujours traité les deux fonctions  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$  qui déterminent la viscosité d'un fluide comme n'ayant entre elles aucune relation forcée, et comme assujetties seulement aux deux conditions

$$(1) \quad \begin{cases} \mu(\rho, T) \geq 0, \\ 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) \geq 0, \end{cases}$$

hors desquelles la fonction dissipative pourrait devenir négative.

Or, certains auteurs, en traitant de la viscosité des fluides, ont fait des suppositions qui restreignent l'indétermination des deux fonctions  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$ ; entre ces deux fonctions, ils ont admis qu'il existait une relation nécessaire; d'ailleurs, comme nous l'avons déjà remarqué (*Recherches sur l'Hydrodynamique*, I<sup>re</sup> Partie, Chap. I, § 3), cette relation varie suivant les auteurs, qui ont hésité entre les trois formes suivantes :

$$(2) \quad \lambda(\rho, T) = \mu(\rho, T),$$

$$(3) \quad \lambda(\rho, T) = 0,$$

$$(4) \quad 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0.$$

Il importe que nous passions en revue les raisons invoquées en faveur de chacune de ces trois relations, afin de nous assurer qu'aucune de ces raisons n'est assez forte pour entraîner notre adhésion.

On dit souvent, dans les Traités, que la théorie de Navier est indépendante de

toute hypothèse sur la valeur du coefficient  $\lambda(\rho, T)$ , car elle traite des fluides incompressibles, en sorte que le coefficient  $\lambda$  disparaît des équations. Une telle opinion découle d'une lecture superficielle de l'œuvre de Navier.

Il est exact qu'à la fin de son Mémoire, Navier, traitant seulement des fluides incompressibles, simplifie ses équations en biffant tous les termes qui contiennent en facteur la dilatation en volume ou ses dérivées partielles; mais cette opération a été précédée d'une analyse générale, qui ne suppose pas le fluide incompressible; cette analyse conduit à une expression du travail virtuel de la viscosité <sup>(1)</sup> et, avec nos notations, cette expression s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_v = & \int \mu(\rho, T) \left[ \left( 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Delta u \right) \delta x + \left( 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \Delta v \right) \delta y + \left( 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \Delta w \right) \delta z \right] d\omega \\ & + \int \mu(\rho, T) \left\{ \left[ \left( \theta + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos(n_i, x) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n_i, y) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n_i, z) \right] \delta x \right. \\ & \quad + \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n_i, x) + \left( \theta + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos(n_i, y) + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(n_i, z) \right] \delta y \\ & \quad \left. + \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n_i, x) + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n_i, y) + \left( \theta + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cos(n_i, z) \right] \delta z \right\} dS. \end{aligned}$$

Cette expression coïncide avec celle que donnent les égalités (47) et (51) de la première Partie, pourvu que l'on fasse, en ces dernières,

$$(2) \quad \lambda(\rho, T) = \mu(\rho, T).$$

On doit donc regarder cette dernière relation comme exprimant l'opinion de Navier.

C'est au moyen d'hypothèses sur les actions moléculaires, assimilées à des forces centrales, que Navier est parvenu à la relation (3).

On sait du reste que l'hypothèse des forces centrales, introduite par Poisson dans l'étude de l'élasticité des corps solides, conduit à poser, entre les deux coefficients d'élasticité des corps isotropes, une relation semblable à l'égalité (2).

La relation ainsi introduite par Poisson dans l'étude de l'élasticité des corps isotropes n'est point, tant s'en faut, confirmée par l'expérience; de plus, elle est visiblement inapplicable aux liquides <sup>(2)</sup>, alors que rien, dans le développement des théories élastiques, ne permet d'exclure logiquement les liquides du nombre des corps isotropes. Aussi la nécessité d'éviter cette relation inacceptable est-elle

<sup>(1)</sup> *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, par M. NAVIER, lu à l'Académie des Sciences le 18 mars 1822 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 2<sup>e</sup> série, t. VI, 1823, p. 389).

<sup>(2)</sup> P. DUHEM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, p. 241. Paris, 1891.

une des raisons qui ont amené le rejet de l'hypothèse des forces centrales. Ainsi convaincue d'erreur et rejetée de l'étude de l'élasticité, cette hypothèse semble singulièrement aventureuse dans le domaine de la viscosité; et s'il est une de ses conséquences que l'on doive révoquer en doute, c'est bien la relation (2), homologue, en cette théorie, de l'égalité condamnée par la théorie de l'élasticité.

Cette égalité (2), on la retrouve d'ailleurs d'une manière nécessaire toutes les fois qu'on fait usage de l'hypothèse des forces centrales pour traiter de la viscosité; c'est ainsi qu'elle a été obtenue de nouveau par M. O.-E. Meyer (<sup>1</sup>).

Dans le Mémoire de M. O.-E. Meyer, l'analogie entre l'égalité (2) et l'égalité qui, selon Poisson, caractérise les corps élastiques isotropes est d'autant plus évidente que l'auteur y traite de la viscosité non pas au sein des milieux fluides, mais au sein des milieux élastiques isotropes et peu déformés; le même calcul lui donne alors, pour les actions élastiques, la relation de Poisson et, pour les actions de viscosité, la relation (2).

Cette relation (2), M. O.-E. Meyer l'a retrouvée plus tard (<sup>2</sup>) en se fondant sur la théorie cinétique des gaz, alors que, de cette théorie, d'autres auteurs ont, comme nous le verrons, tiré d'autres relations.

La relation

$$(3) \quad \lambda(\rho, T) = 0$$

se trouve seulement dans un Mémoire inédit que Cauchy avait présenté à l'Académie des Sciences en 1822 et dont il a reproduit les résultats, en 1828, dans les *Anciens Exercices de Mathématiques* (<sup>3</sup>); mais, aussitôt après avoir reproduit ces résultats, Cauchy remarque qu'on peut leur en substituer d'autres, plus généraux, où les coefficients  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$  ont des valeurs quelconques; l'illustre analyste n'attache donc aucune importance à la relation (3).

L'existence de deux coefficients de viscosité, indépendants l'un de l'autre, résulte également de la très curieuse théorie de la viscosité développée par Poisson en 1829 (<sup>4</sup>); les deux coefficients qu'il considère et qu'il désigne par  $\beta$  et  $\beta'$  sont

(<sup>1</sup>) O.-E. MEYER, *Zur Theorie der inneren Reibung* (*Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. LXXVIII, 1874, p. 130).

(<sup>2</sup>) O.-E. MEYER, *Die kinetische Theorie der Gase*, p. 325. Breslau, 1877.

(<sup>3</sup>) CAUCHY, *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique*, § 3. *Sur le mouvement intérieur d'un corps solide non élastique* (*Exercices de Mathématiques*, III<sup>e</sup> année, p. 183. Paris, 1828).

(<sup>4</sup>) POISSON, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, lu à l'Académie des Sciences le 12 octobre 1829 (*Journal de l'École Polytechnique*, XX<sup>e</sup> Cahier, t. XIII, 1831, p. 1-174).

liés à nos coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  par les relations

$$\begin{aligned}\lambda(\rho, T) &= -\beta', \\ \mu(\rho, T) &= -\beta.\end{aligned}$$

Poisson laisse entièrement quelconques les deux coefficients  $\beta$  et  $\beta'$ .

Cette opinion est aussi celle de Barré de Saint-Venant, bien que sa courte Note sur ce sujet <sup>(1)</sup> ait parfois été regardée comme favorable à la relation (4). Cette Note, en effet, prouve simplement qu'il doit exister une grandeur  $\varpi$ , définie en chaque point du fluide en mouvement, telle que l'on ait

$$\begin{aligned}v_x &= -\varpi - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & v_y &= -\varpi - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & v_z &= -\varpi - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_x &= -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \tau_y &= -\mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), & \tau_z &= -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

En terminant, Saint-Venant fait remarquer que ces formules conviennent aussi bien à la théorie de Navier qu'à la théorie de Poisson.

C'est Stokes <sup>(2)</sup> qui, le premier, a proposé la relation

$$(4) \quad 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0.$$

Cette relation signifie, comme nous l'avons vu (1<sup>re</sup> Partie, Chap. I, § 2) que le travail des actions de viscosité serait nul si chacun des éléments du fluide se dilatait en restant semblable à lui-même. Voici les brèves considérations par lesquelles Stokes la justifie :

« Il nous reste, dit-il, à considérer l'effet de la dilatation. Supposons, tout d'abord, qu'aucune déformation n'accompagne cette dilatation; il est aisé de voir que le mouvement relatif du fluide au point considéré sera le même en toute direction. Par conséquent, une telle dilatation ne peut avoir pour effet que d'ajouter à la pression que produisent les actions des molécules, supposées dans leur position d'équilibre relatif, une autre pression normale  $p'$ , la même en tout sens. Mais cette pression  $p'$  provient uniquement de l'ensemble des actions moléculaires mises en jeu par les déplacements que les molécules ont subi par rapport à leur position d'équilibre relatif; comme d'ailleurs, en moyenne, ces déplacements

<sup>(1)</sup> BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides, présenté à l'Académie des Sciences le 14 avril 1834* (*Comptes rendus*, t. XVII, 1843, p. 1240).

<sup>(2)</sup> STOKES, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids*, n° 3, lu le 14 avril 1845 à la Société philosophique de Cambridge (*Transactions of the Cambridge philosophical Society*, Vol. VIII, p. 287. — *Mathematical and physical Papers*, Vol. I, p. 87).

se produisent indifféremment en toute direction, il en résulte que les actions qui concourent à former  $p'$  se neutralisent les unes les autres et que  $p' = 0$ . On tirerait la même conclusion de l'hypothèse cinétique, en regardant, comme il est naturel de le faire, chaque secousse mise en action comme liée à un accroissement de pression en certaines directions et à une diminution de pression dans d'autres directions. »

Il est à peine besoin de faire remarquer l'insuffisance d'un tel raisonnement, dont un calcul plus complet eût démenti les conclusions. D'ailleurs, Stokes lui-même paraît avoir attaché à la conclusion ainsi obtenue une médiocre confiance; voici, en effet, ce qu'il écrit quelques lignes plus loin : « On peut poser  $3\lambda + 2\mu = 0$  si l'on suppose que, dans le cas d'un mouvement de dilatation uniforme, la pression à chaque instant dépend exclusivement de la densité et de la température à cet instant et nullement de la vitesse avec laquelle la première varie d'un instant à l'autre. Dans la plupart des cas auxquels il est intéressant d'appliquer la théorie de la viscosité, ou bien la densité du fluide est constante, ou bien l'on peut, sans erreur sensible, la regarder comme constante; elle change lentement de valeur. Les résultats sont exactement les mêmes dans le premier cas, et sensiblement les mêmes dans le second cas, que  $(3\lambda + 2\mu)$  soit ou non égal à zéro. Par conséquent, bien que la théorie et l'expérience soient d'accord en ces divers cas, on ne saurait regarder l'expérience comme vérifiant la partie de la théorie qui a trait à l'hypothèse  $3\lambda + 2\mu = 0$ . »

La relation (4) a été retrouvée par Maxwell <sup>(1)</sup> en faisant usage de la théorie cinétique des gaz et en assimilant les molécules gazeuses à des points dont la répulsion est inversement proportionnelle à la cinquième puissance de la distance; son analyse a été ensuite exposée plus rigoureusement par G. Kirchhoff <sup>(2)</sup> et par M. Boltzmann <sup>(3)</sup>. Mais, alors même que l'on n'opposerait pas une fin de non recevoir aux hypothèses sur lesquelles repose la théorie cinétique des gaz, il est permis de faire observer :

1° Que les mêmes calculs qui fournissent les équations du mouvement d'un fluide visqueux, complétées par la relation (4), exigent que le gaz suive les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, ce qui restreint aux gaz parfaits la portée des résultats obtenus;

<sup>(1)</sup> MAXWELL, *The Bakerian Lecture : On the viscosity or internal friction of air and other gases*, lu le 8 février 1868 à la Société Royale de Londres. (*Philosophical Transactions*, vol. CLVI. — *Scientific Papers*, vol. II, p. 69.)

<sup>(2)</sup> G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über die Theorie der Wärme*, p. 193. Leipzig, 1894.

<sup>(3)</sup> L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über Gastheorie*, I. Theil, p. 169 et p. 180. Leipzig, 1896. — *Leçons sur la Théorie des gaz*, traduites par A. GALLOTTI, I<sup>re</sup> Partie, p. 159 et p. 171. Paris, 1902. Dans le dernier des deux passages cités, M. Boltzmann signale le caractère arbitraire de plusieurs des hypothèses faites.

2° Que, selon ces mêmes calculs <sup>(1)</sup>, le rapport de la chaleur spécifique  $C$  sous pression constante à la chaleur spécifique  $c$  sous volume constant a pour valeur

$$\frac{C}{c} = \frac{5}{3} = 1,666, \quad \dots,$$

conclusion manifestement fausse puisque, pour tous les gaz parfaits bien étudiés, le rapport  $\frac{C}{c}$  a une valeur voisine de 1,40.

Si la théorie dont nous parlons fournit une valeur assurément fausse pour le rapport  $\frac{C}{c}$ , pourquoi fournirait-elle une valeur assurément juste pour la quantité  $(3\lambda + 2\mu)$ ?

Or, G. Kirchhoff ne trouve <sup>(2)</sup>, à la relation (4), aucun fondement en dehors de la théorie cinétique des gaz.

Enfin, M. L. Natanson, qui a donné récemment une théorie fort originale de la viscosité, termine son exposé par cette déclaration <sup>(3)</sup> : « En conclusion, nous dirons que la relation de Stokes,  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ , s'accorde parfaitement avec l'ensemble de nos hypothèses; mais rien ne nous oblige à les considérer comme un corollaire qui découlerait avec nécessité de notre théorie. »

Il ressort clairement de cet exposé historique qu'aucune raison péremptoire n'impose une relation particulière entre les deux quantités  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$ ; tout au plus, les physiciens qui regardent comme légitime la théorie cinétique des gaz pourraient-ils, en vertu de cette théorie, regarder la relation (4), proposée par M. Stokes, comme exacte pour les gaz parfaits monoatomiques et, *peut-être*, pour les autres gaz parfaits; ils ne sauraient, en tous cas, la regarder comme établie pour les fluides en général.

Nous allons voir que si l'on avait tenu, dans l'étude de la viscosité, à être rigoureusement conséquent avec la définition du mot *fluide*, on aurait été amené à assujettir les fonctions  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$  à des conditions toutes différentes de celles qui ont été proposées jusqu'ici.

<sup>(1)</sup> G. KIRCHHOFF, *loc. cit.*, p. 196. — L. BOLTZMANN, *loc. cit.* (trad. Gallotti), p. 170 et p. 179.

<sup>(2)</sup> G. KIRCHHOFF, *loc. cit.*, p. 116.

<sup>(3)</sup> L. NATANSON, *Sur les lois de la viscosité* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie : Classe des Sciences mathématiques et naturelles*, février 1901, p. 110).

§ 2. — FORME NÉCESSAIRE DES ACTIONS DE VISCOSITÉ AU SEIN D'UN FLUIDE  
PROPREMENT DIT. IMPOSSIBILITÉ DES LIQUIDES VISQUEUX.

Revenons à la définition du mot *fluide*.

Un milieu continu est dit *fluide* si l'état de chaque élément est entièrement défini par la connaissance des coordonnées  $x, y, z$  d'un point de chaque élément, par la densité  $\rho$  de cet élément et par la température  $T$  qui y règne. Pour déterminer entièrement la modification réelle ou virtuelle éprouvée par un tel élément, il suffit de connaître le changement réel ou virtuel de la position qu'il occupe dans l'espace, et les variations virtuelles de la température et de la densité; il est totalement inutile de connaître la déformation que cet élément a pu subir durant la modification considérée.

Du moment que l'on convient de tenir compte, pour définir la modification subie par un élément d'un certain milieu, non seulement du changement de densité de cet élément, mais encore des déformations qu'il a éprouvées; du moment que deux états où l'élément a même densité, même température, mais des formes différentes, sont regardés non comme deux états identiques, mais comme deux états distincts, on ne doit plus dire que le milieu considéré est un *milieu fluide*; on doit dire que l'on étudie les propriétés d'un *milieu élastique* <sup>(1)</sup>.

Dès lors, il est facile de déterminer la forme que doivent avoir les actions de viscosité au sein d'un corps fluide si l'on veut, dans la détermination de cette forme, rester rigoureusement conséquent avec la définition précédente.

Les composantes  $u, v, w$  de la vitesse sont supposées fonctions continues de  $x, y, z$ ; les divers éléments qui composent le fluide sont donc soudés entre eux; dès lors, le travail virtuel  $d\bar{\epsilon}_v$  des actions de viscosité au sein de la masse fluide est la somme des travaux virtuels des viscosités intrinsèques de chaque élément fluide. Si donc on désigne par  $d\tau_v d\omega$  le travail virtuel des viscosités intrinsèques à l'élément de volume  $d\omega$ , on aura [I<sup>re</sup> Partie, égalité (41)]

$$(4 \text{ bis}) \quad d\bar{\epsilon}_v = \int d\tau_v d\omega,$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments  $d\omega$  du volume occupé par le fluide.

Quant à la forme de  $d\tau_v d\omega$ , elle est bien aisée à déterminer. Indépendamment de sa position absolue dans l'espace et de sa température absolue  $T$ , l'élément  $d\omega$  est entièrement déterminé par une seule variable normale, sa densité  $\rho$ ; dès lors,

---

(1) Nous avons déjà insisté sur cette définition dans les feuilles autographiées de notre Cours : *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique* (t. II, p. 205), professé à Lille en 1890-1891.



si l'on fait usage des principes posés au Chapitre I, § 1, de la première Partie de ces *Recherches*, on voit que

$$(5) \quad d\tau_v d\omega = \int f\left(\rho, T, \frac{d\rho}{dt}\right) \frac{d\rho}{dt} \partial\rho d\omega,$$

$f\left(\rho, T, \frac{d\rho}{dt}\right)$  étant une quantité essentiellement négative. Si l'on admet, en outre, la supposition que nous avons appelée l'*hypothèse approximative*, on devra regarder  $f$  comme indépendant de  $\frac{d\rho}{dt}$ , ce qui donnera

$$(6) \quad d\tau_v d\omega = \int f(\rho, T) \frac{d\rho}{dt} \partial\rho d\omega.$$

Mais on a

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \partial\rho = -\rho \left( \frac{\partial \partial x}{\partial x} + \frac{\partial \partial y}{\partial y} + \frac{\partial \partial z}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Si donc on pose

$$\rho^2 f(\rho, T) = -\lambda(\rho, T),$$

cas auquel, puisque  $f(\rho, T)$  est essentiellement négatif,  $\lambda(\rho, T)$  est essentiellement positif :

$$(8) \quad \lambda(\rho, T) > 0,$$

on aura, en vertu des égalités (4) à (7),

$$(9) \quad d\tau_v = - \int \lambda(\rho, T) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \partial x}{\partial x} + \frac{\partial \partial y}{\partial y} + \frac{\partial \partial z}{\partial z} \right) d\omega.$$

*Telle est la forme nécessaire du travail virtuel de la viscosité en un milieu fluide.*

Mais, s'il s'agit d'un fluide incompressible, on a constamment, en vertu des égalités (7),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \partial x}{\partial x} + \frac{\partial \partial y}{\partial y} + \frac{\partial \partial z}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

en sorte que l'égalité (136) devient

$$d\tau_v = 0$$

*Le travail virtuel des actions de viscosité, au sein d'un fluide incompressible, est identiquement nul; en d'autres termes, LA SUPPOSITION D'UN LIQUIDE VISQUEUX EST CONTRADICTOIRE AVEC LA DÉFINITION DU MOT FLUIDE.*

Dès lors, les difficultés auxquelles nous a conduits l'étude des liquides visqueux cessent d'être surprenantes.

### § 3. — PROPRIÉTÉS DES FLUIDES COMPRESSIBLES VISQUEUX.

Mais si la définition du mot *fluide* nous empêche de considérer des fluides incompressibles visqueux, elle nous permet de traiter des *fluides compressibles visqueux* et, par l'égalité (10), elle nous fait connaître la forme qu'affecte nécessairement, en de pareils fluides, le travail virtuel de viscosité.

Si, selon l'usage, nous posons

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

l'égalité (9) pourra s'écrire

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathcal{E}_v &= \int \left[ \frac{\partial(\lambda\theta)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial(\lambda\theta)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial(\lambda\theta)}{\partial z} \delta z \right] d\omega \\ &+ \int \lambda\theta [\cos(n_i, x) \delta x + \cos(n_i, y) \delta y + \cos(n_i, z) \delta z] dS, \end{aligned} \right.$$

la première intégrale s'étendant au volume occupé par le fluide et la seconde à la surface qui le limite. Cette forme rentre, comme cas particulier, dans celle qui a été donnée en l'égalité (47) de la première Partie, à la condition de faire

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} v_x = v_y = v_z &= -\lambda(\rho, T)\theta, \\ \tau_x = \tau_y = \tau_z &= 0. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on compare ces égalités aux égalités (51) de la première Partie, on voit qu'elles découlent de ces dernières pourvu que l'on y fasse

$$(12) \quad \mu(\rho, T) = 0.$$

Donc, la seule théorie des fluides visqueux qui soit compatible avec la définition du mot fluide est un cas particulier de la théorie habituellement admise; ce cas particulier est celui où le coefficient  $\mu(\rho, T)$  est égal à 0.

Les propriétés de ces fluides sont alors aisées à établir; pour les obtenir, il suffit d'égaliser à 0 le coefficient  $\mu(\rho, T)$  dans les équations de la théorie classique.

Dès lors, les équations (58), (74) et (75) de la première Partie de ces *Recherches*

nous montrent que l'on a, en tout point de la masse fluide,

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(\rho, T)\theta] = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e - \gamma_y) - \frac{\partial}{\partial y} [\lambda(\rho, T)\theta] = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e - \gamma_z) - \frac{\partial}{\partial z} [\lambda(\rho, T)\theta] = 0, \end{cases}$$

$$(14) \quad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0.$$

Selon les égalités (57) de la première Partie, les grandeurs  $p_x, p_y, p_z$  se réduiront à

$$(15) \quad \begin{cases} p_x = \lambda(\rho, T)\theta \cos(n_i, x), \\ p_y = \lambda(\rho, T)\theta \cos(n_i, y), \\ p_z = \lambda(\rho, T)\theta \cos(n_i, z). \end{cases}$$

Si un élément  $dS$  de la surface qui limite le fluide est soumis à une force dont les composantes sont  $P_x dS, P_y dS, P_z dS$ , on devra avoir, en vertu de ces égalités (15) et des égalités (76) de la première Partie,

$$(16) \quad \begin{cases} \Pi \cos(n_i, x) = P_x + \lambda(\rho, T) \cos(n_i, x), \\ \Pi \cos(n_i, y) = P_y + \lambda(\rho, T) \cos(n_i, y), \\ \Pi \cos(n_i, z) = P_z + \lambda(\rho, T) \cos(n_i, z), \end{cases}$$

ce qui nous apprend que le vecteur  $P_x, P_y, P_z$  doit être normal à la surface  $S$ .

Enfin, les égalités (15) nous enseignent que le vecteur  $p_x, p_y, p_z$  doit être, en tout point, normal à la surface qui limite le fluide; cette proposition simplifie singulièrement la discussion de ce qui se passe à la surface de contact d'un solide et d'un fluide ou à la surface de contact de deux fluides. Il est inutile d'examiner si, le long d'une telle surface, il se produit une viscosité ( $f < 0$ ), mais point de frottement ( $\mathfrak{F} = 0$ ) ou bien, au contraire, si les deux corps au contact frottent l'un sur l'autre ( $\mathfrak{F} < 0$ ). Ce que nous avons vu au Chapitre II de la quatrième Partie nous enseigne que, quelle que soit l'hypothèse faite, les deux corps resteront soudés l'un à l'autre le long de leur surface de contact. Si  $u_1, v_1, w_1$  sont les composantes de la vitesse en un point de l'un des deux corps et  $u_2, v_2, w_2$  les composantes de la vitesse en un point de l'autre corps, on aura, en tout point de leur surface de contact,

$$(17) \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2.$$

Les résultats auxquels nous venons de parvenir peuvent se mettre sous une

forme peu différente, mais susceptible d'une interprétation intéressante.

Posons

$$(18) \quad P = \Pi - \lambda(\rho, T) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Les équations (13) deviendront

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} - \rho(X_i + X_e - \gamma_y) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \rho(X_i + X_e - \gamma_z) = 0. \end{cases}$$

Les équations (16) deviendront

$$(20) \quad P_x = P \cos(n_i, x), \quad P_y = P \cos(n_i, y), \quad P_z = P \cos(n_i, z).$$

Enfin, l'équation (14) deviendra

$$P + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + \lambda(\rho, T) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

ou bien, en vertu de la première égalité (7),

$$(21) \quad P + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Les relations (19) et (20) ont exactement la même forme qu'en un fluide parfait où  $P$  serait la pression. Seule l'égalité (21) a une forme différente de celle qu'elle aurait en un tel fluide parfait; elle en diffère par la présence, au premier membre, du terme  $-\frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ . On peut donc, si l'on veut, énoncer la proposition suivante :

*Les équations du mouvement d'un fluide visqueux ne diffèrent des équations du mouvement d'un fluide parfait que par la forme de l'équation dite de compressibilité et de dilatation; l'équation relative aux fluides visqueux se tire de l'équation relative aux fluides parfaits en retranchant de la pression le terme  $\frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ .*

Bornons-nous à considérer le cas où les actions qui s'exercent sur le fluide sont newtoniennes; on a alors

$$A_i = c, \quad A_e = 0,$$

et l'équation (21) se réduit à la forme

$$(22) \quad P - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

*Les lois du mouvement d'un fluide compressible, visqueux, soumis à des actions newtoniennes, ne diffèrent qu'en un point des lois du mouvement d'un fluide compressible, parfait, soumis aux mêmes actions; il n'existe plus de relation en termes finis entre la densité  $\rho$ , la pression  $P$  et la température  $T$ ; cette relation est remplacée par une équation différentielle qui, à la densité  $\rho$ , à la pression  $P$  et à la température  $T$ , relie la vitesse  $\frac{d\rho}{dt}$  avec laquelle varie la densité.*

A cette manière de concevoir les fluides visqueux nous étions parvenus dès 1898 (<sup>1</sup>).

Discutons l'égalité (22).

Soit  $\rho_0$  la densité qu'aurait le fluide sous la pression  $P$ , à la température  $T$ , si la viscosité n'existait pas; cette densité  $\rho_0$ , donnée par l'égalité

$$(23) \quad P - \rho_0^2 \frac{\partial \zeta(\rho_0, T)}{\partial \rho_0} = 0,$$

est la densité que prendrait le fluide *en équilibre* sous la pression  $P$ , à la température  $T$ .

En désignant par  $\rho'$  une certaine valeur de  $\rho$  comprise entre  $\rho$  et  $\rho_0$ , on peut écrire, en vertu des égalités (22) et (23),

$$(24) \quad (\rho_0 - \rho) \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[ \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} \right] - \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Pour maintenir le fluide en équilibre à la température  $T$  et avec la densité  $\rho'$ , il faut le soumettre à une pression  $\Pi$  que donne l'égalité

$$\Pi = \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'}.$$

Cette égalité peut être considérée comme une équation définissant  $\rho'$  en fonction de  $\Pi$  et de  $T$ ; si, sans faire varier  $T$ , on fait croître  $\Pi$  de  $d\Pi$ , cette fonction croît de  $\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T d\Pi$ , et l'on a

$$(25) \quad \left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[ \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} \right]} = F(\rho', T).$$

---

(<sup>1</sup>) *Traité élémentaire de Mécanique chimique fondée sur la Thermodynamique*, Livre IV, Chap. I, § 7, t. II, p. 163. Paris, 1898.

Selon l'égalité (25), l'égalité (24) devient

$$(26) \quad \frac{d\rho}{dt} = - \frac{\rho}{\lambda(\rho, T)F(\rho, T)} (\rho - \rho_0).$$

L'inégalité (18) nous enseigne que  $\lambda(\rho, T)$  est essentiellement positif; d'autre part, nous savons que, pour un fluide susceptible d'équilibres stables, la quantité

$$\left( \frac{d\rho}{d\Pi} \right)_T = F(\rho, T)$$

doit être essentiellement positive <sup>(1)</sup>.

L'égalité (26) nous enseigne donc que  $\frac{d\rho}{dt}$  est constamment de signe contraire à  $(\rho - \rho_0)$ ; d'où la proposition suivante :

*En chaque point d'un fluide compressible parfait, où la température est T et la pression P, la densité  $\rho$  a, à chaque instant du mouvement, la valeur  $\rho_0$  qu'elle aurait au sein d'un fluide homogène, en équilibre à la température T et sous la pression uniforme P. Il n'en est plus de même au sein d'un fluide visqueux en mouvement; mais, pour chaque point matériel et à chaque instant, la vitesse de variation de la densité est d'un sens tel qu'elle tende à rapprocher la densité  $\rho$  de la valeur de  $\rho_0$  qui convient à ce point et à cet instant.*

Supposons que la compressibilité du fluide, mesurée par la fonction  $F(\rho, T)$ , ne soit pas extrêmement grande dans les conditions où se trouve le fluide étudié et que le coefficient de viscosité  $\lambda(\rho, T)$  ait une très petite valeur. Si  $(\rho - \rho_0)$  n'a pas une très petite valeur absolue, l'équation (26) donnera pour  $\frac{d\rho}{dt}$  une très grande valeur absolue; mais la première égalité (7) montre qu'il n'en peut être ainsi, dans le cas où les composantes  $u, v, w$  de la vitesse ne varient pas très rapidement d'un point au point voisin. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

*Au sein d'un fluide peu visqueux où la vitesse n'éprouve pas de très grandes variations lorsque l'on passe d'un point au point voisin, la densité  $\rho$ , en chaque point et à chaque instant, diffère très peu de la valeur  $\rho_0$  qui correspond au même point et au même instant.*

On voit bien ainsi comment les fluides parfaits sont la forme limite des fluides peu visqueux.

Pour établir plus simplement les diverses propositions que nous venons

---

<sup>(1)</sup> Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5<sup>e</sup> série, t. III, p. 174, condition (63); 1897].

d'énoncer, nous avons supposé que le fluide était soumis à des actions newtoniennes; mais cette restriction n'est pas essentielle et nous pouvons ne pas la faire.

Considérons les fonctions  $\mathfrak{A}_i(R, x, y, z, t)$ ,  $\mathfrak{A}_e(R, x, y, z, t)$  (1<sup>re</sup> Partie, Chap. I, § 4) dans lesquelles il suffit de faire

$$R = \rho(x, y, z, t)$$

pour obtenir les fonctions  $\mathfrak{A}_i(x, y, z, t)$ ,  $\mathfrak{A}_e(x, y, z, t)$ .

L'égalité (148) peut s'écrire

$$P + \rho^2 [\mathfrak{A}_i(\rho, x, y, z, t) + \mathfrak{A}_e(\rho, x, y, z, t)] - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Considérons, d'autre part, la fonction  $\rho_0(x, y, z, t)$  que définit l'équation

$$P + \rho_0^2 [\mathfrak{A}_i(\rho_0, x, y, z, t) + \mathfrak{A}_e(\rho_0, x, y, z, t)] - \rho_0^2 \frac{\partial \zeta(\rho_0, T)}{\partial \rho_0} = 0,$$

lorsqu'on y remplace P et T par leurs expressions en fonctions de  $x, y, z, t$ . Retranchons ces deux équations membre à membre. Si nous désignons par  $\rho'(x, y, z, t)$  une valeur comprise entre  $\rho(x, y, z, t)$  et  $\rho_0(x, y, z, t)$ , le résultat obtenu pourra s'écrire

$$(27) \quad \left\{ 2\rho' \left[ \mathfrak{A}_i(\rho', x, y, z, t) + \mathfrak{A}_e(\rho', x, y, z, t) - \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} \right] + \rho'^2 \left[ \frac{\partial \mathfrak{A}_i(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} + \frac{\partial \mathfrak{A}_e(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} - \frac{\partial^2 \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'^2} \right] \right\} (\rho - \rho_0) - \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Mais nous avons admis, à plusieurs reprises (1<sup>re</sup> Partie, Chap. I, § 11), que, pour toute valeur de  $\rho'$  comprise parmi celles que peut atteindre la densité du fluide, on avait l'inégalité

$$2\rho' \left[ \mathfrak{A}_i(\rho', x, y, z, t) + \mathfrak{A}_e(\rho', x, y, z, t) - \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} \right] + \rho'^2 \left[ \frac{\partial \mathfrak{A}_i(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} + \frac{\partial \mathfrak{A}_e(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} - \frac{\partial^2 \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'^2} \right] < 0.$$

Dès lors, il est aisé de déduire de l'égalité (27) des conclusions semblables à celles que nous avons déduites de l'égalité (26).

#### § 4. — RETOUR AUX FORMULES GÉNÉRALES DE LA VISCOSITÉ.

COMBINAISON DES CONSIDÉRATIONS PRÉCÉDENTES ET DE L'HYPOTHÈSE DE STOKES

Selon ce que nous avons vu au Paragraphe 2, le physicien qui, dans ses raisonnements, demeurerait fermement attaché à la définition du mot *fluide* serait conduit à cette conséquence : un fluide incompressible ne peut pas être visqueux.

Cette conséquence suffit à prouver que les propriétés des corps que l'expérimentateur nomme *fluides visqueux* ne peuvent être représentées par une théorie où l'on regarderait ces corps comme étant rigoureusement fluides. Force nous est de traiter les fluides visqueux comme des milieux élastiques, mais comme des milieux élastiques très aisément déformables.

Sans approfondir ici cette notion, que nous retrouvons en un autre travail, nous remarquerons que l'on peut, sans absurdité, regarder le potentiel interne du système comme différant très peu du potentiel interne d'un fluide proprement dit, tandis que le calcul du travail de viscosité exigerait que l'on tînt compte des déformations de chaque élément. On est alors conduit aux équations qui ont été développées au Chapitre I de la première Partie de ces *Recherches*; mais ces équations apparaissent comme des formules approchées, et non plus comme des lois rigoureuses. Ce caractère entraîne l'illégitimité de certaines déductions, par exemple de la démonstration du théorème de Lagrange donnée en la cinquième Partie de ces *Recherches*, au Paragraphe I du Chapitre I.

Ces remarques, qui nous ramènent aux équations générales de la viscosité, ne font cependant pas disparaître l'intérêt des considérations qui ont été développées au Paragraphe précédent.

Posons

$$(28) \quad P = \Pi - \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

et les lois du mouvement des fluides visqueux, développées au Chapitre I de la première Partie de nos *Recherches*, pourront être présentées sous la forme suivante :

1° En tout point de la surface qui limite le fluide, on a [*loc. cit.*, égalités (57) et (76)]

$$\left\{ \begin{array}{l} P_x = P \cos(n, x) - \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\theta}{3} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, z) \right], \\ P_y = P \cos(n, y) - \mu \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, x) + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, z) \right], \\ P_z = P \cos(n, z) - \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, y) + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\theta}{3} \right) \cos(n, z) \right]; \end{array} \right.$$

2° En tout point du fluide, on a [*loc. cit.*, égalités (49), (51) et (74)]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\theta}{3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e - \gamma_y) - \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e - \gamma_z) - \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\theta}{3} \right) = 0; \end{array} \right.$$



3° En tout point du fluide, également, en vertu de l'égalité (75) de la première Partie de ces *Recherches* et de l'égalité (28) de la présente Partie, on a

$$P + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (7),

$$(31) \quad P + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Pour un instant, faisons abstraction de l'égalité (31) et ne considérons que les égalités (29) et (30); ces égalités sont précisément celles que nous aurions obtenues si nous avions étudié un fluide visqueux pour lequel la fonction  $\mu(\rho, T)$  aurait la même valeur que pour le fluide dont nous nous occupons, mais au sein duquel l'hypothèse de Stokes, exprimée par l'égalité (4), serait vérifiée; la pression serait seulement représentée par la lettre P dans nos dernières formules, au lieu d'y être représentée par la lettre  $\Pi$ .

En chaque point de la surface de contact du fluide qui nous occupe et d'une paroi solide nous avons

$$(32) \quad \begin{cases} p_x = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \theta \cos(n, x) + \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\theta}{3} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, z) \right], \\ p_y = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \theta \cos(n, y) + \mu \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, x) + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, z) \right], \\ p_z = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \theta \cos(n, z) + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, y) + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\theta}{3} \right) \cos(n, z) \right] \end{cases}$$

Que si l'on propose de calculer la projection du vecteur  $(p_x, p_y, p_z)$  sur la surface, on obtiendra le même résultat que si l'on avait pris simplement

$$(33) \quad \begin{cases} p_x = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\theta}{3} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, z) \right], \\ p_y = \mu \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, x) + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, z) \right], \\ p_z = \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, y) + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\theta}{3} \right) \cos(n, z) \right]. \end{cases}$$

Or ces dernières égalités sont celles que l'on obtiendrait si l'on admettait l'hypothèse de Stokes. D'ailleurs l'étude de l'adhérence ou du glissement du fluide sur la paroi solide dépend uniquement de la projection du vecteur  $(p_x, p_y, p_z)$  sur cette paroi; cette étude est donc la même en nos deux problèmes.

Ainsi, un fluide visqueux quelconque est, de tout point, comparable à un

*fluide au sein duquel la relation de Stokes*

$$(4) \quad 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0$$

*serait vérifiée, mais où la densité en chaque point, au lieu de dépendre uniquement de la pression P et de la température T en ce point, et d'en dépendre par la même relation*

$$(14 \text{ bis}) \quad P + \rho^2(\Lambda_t + \Lambda_c) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0$$

*que si le fluide était en équilibre, doit vérifier à chaque instant la relation*

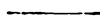
$$(31) \quad P + \rho^2(\Lambda_t + \Lambda_c) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Cette relation (31) prête évidemment à toutes les considérations qui ont été développées au sujet de la relation (21).



## CHAPITRE II.

### LES PHÉNOMÈNES DE VISCOSITÉ AU VOISINAGE DE L'ÉTAT CRITIQUE.



#### § 1. — LES EFFETS DE LA VISCOSITÉ, AU VOISINAGE DU POINT CRITIQUE, EN UN CORPS RIGOREUSEMENT FLUIDE.

La discussion, donnée au Paragraphe 3 du Chapitre précédent, de la relation (21) et des relations (22), (24) et (26) qui s'y rattachent, est liée à cette hypothèse : La quantité  $\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T$  ne prend pas des valeurs extrêmement grandes. La même restriction pèserait évidemment sur la discussion de l'égalité (31), laquelle devrait être menée exactement comme la discussion de l'égalité (21). Or cette hypothèse n'est pas vérifiée en toutes circonstances; *lorsque la température T et la densité  $\rho'$  du fluide tendent vers la température critique et la densité critique du fluide, la quantité  $\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T$  croît au delà de toute limite.*

Nous sommes donc amenés à compléter l'étude faite au Chapitre précédent en

examinant les propriétés d'un corps compressible visqueux où

$$\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T = F(\rho', T)$$

a de très grandes valeurs.

Comme au Chapitre précédent, pour rendre cette discussion plus claire, nous imaginerons tout d'abord que le corps étudié se conforme rigoureusement à la définition du mot *fluide*, qui entraîne l'égalité

$$(12) \quad \mu(\rho, T) = 0.$$

Nous étendrons ensuite les résultats obtenus aux corps que l'on traite habituellement comme fluides visqueux.

*Dans ce qui va suivre, nous supposerons qu'en tout point du fluide et à tout instant :*

*La température T soit assez voisine de la température critique,*

*Les densités  $\rho$ ,  $\rho_0$  et, partant, la densité intermédiaire  $\rho'$  assez voisines de la densité critique,*

*Pour que la fonction  $F(\rho', T)$  soit, en chaque point du fluide et à chaque instant, très grande par rapport à  $\frac{1}{\lambda(\rho, T)}$ .*

Dès lors, le produit  $F(\rho', T)\lambda(\rho, T)$  ayant une très grande valeur, à une valeur finie de la différence  $(\rho - \rho_0)$  l'égalité (26) fera correspondre une valeur extrêmement petite de  $\frac{d\rho}{dt}$ .

Ainsi donc, moyennant les suppositions indiquées, *la densité d'un élément fluide varie avec une extrême lenteur bien que sa valeur diffère notablement de la valeur qui conviendrait à l'équilibre dans les conditions de température et de pression où se trouve cet élément.*

Dès lors, rien n'empêche que l'on observe au sein du fluide des ÉTATS DE QUASI-ÉQUILIBRE; *en un tel état, les trois composantes de la vitesse sont très petites en chaque point et à chaque instant; cependant la densité en ce point et à cet instant diffère notablement de celle que l'équation d'équilibre ferait correspondre à la température et à la pression qui règnent en ce point et à cet instant.*

En un tel état, on a approximativement

$$\gamma_x = 0, \quad \gamma_y = 0, \quad \gamma_z = 0.$$

D'ailleurs, comme les forces agissantes sont supposées newtoniennes, il existe

deux fonctions  $V_i(x, y, z, t)$ ,  $V_e(x, y, z, t)$  telles que

$$\begin{aligned} X_i &= -\frac{\partial V_i}{\partial x}, & Y_i &= -\frac{\partial V_i}{\partial y}, & Z_i &= -\frac{\partial V_i}{\partial z}, \\ X_e &= -\frac{\partial V_e}{\partial x}, & Y_e &= -\frac{\partial V_e}{\partial y}, & Z_e &= -\frac{\partial V_e}{\partial z}. \end{aligned}$$

Les équations (146) se résument alors dans l'égalité approximative

$$dP + \rho d(V_i + V_e) = 0.$$

Cette égalité nous montre que l'on a approximativement

$$\rho = f(V_i + V_e).$$

*Dans un état de quasi-équilibre, la distribution des densités au sein du fluide est telle que les points situés sur une même surface de niveau aient sensiblement la même densité.*

En particulier, si les forces agissantes se réduisent à la pesanteur, le fluide en quasi-équilibre sera formé de couches horizontales dont chacune aura sensiblement la même densité en tout point.

Un tel état ne sera pas un état permanent; la densité qui correspond à chaque élément fluide variera très lentement jusqu'au moment où la densité aura, en chaque point, la valeur  $\rho_0$  que l'équation

$$(23) \quad P - \rho_0 \frac{\partial \zeta(\rho_0)}{\partial \rho_0} = 0$$

fait correspondre à la pression  $P$  et à la température  $T$  qui règnent en ce point.

Au lieu d'observer le système à l'état de quasi-équilibre, on peut l'observer animé d'un mouvement sensible; les composantes  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$  de l'accélération doivent alors figurer dans les équations (19), car elles ont des valeurs notables. La densité de chaque élément matériel varie avec une extrême lenteur; si l'on considère deux instants,  $t_0$ ,  $t$ , qui ne sont pas très éloignés l'un de l'autre, un même élément matériel a sensiblement même densité à l'instant  $t_0$  et à l'instant  $t$ .

Considérons l'état du fluide à un instant  $t_0$  et, selon le procédé de Lagrange, caractérisons chaque point matériel par ses coordonnées  $a, b, c$  à cet instant; à ce même instant, la distribution des densités au sein du fluide est quelconque;  $r(a, b, c)$  est la densité du point matériel  $(a, b, c)$ .

Proposons-nous d'étudier le mouvement du fluide à partir de l'instant  $t_0$ , et pendant un laps de temps qui ne soit pas très long. Pour déterminer ce mouvement, nous devons faire usage des équations (19), que nous pourrions mettre sous

la forme employée par Lagrange :

$$\frac{\partial P}{\partial a} + \rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial a} + \frac{\partial V_e}{\partial a} \right) + \rho \left( \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial b} + \rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial b} + \frac{\partial V_e}{\partial b} \right) + \rho \left( \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial b} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial c} + \rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial c} + \frac{\partial V_e}{\partial c} \right) + \rho \left( \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial c} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) = 0.$$

En outre, nous devons considérer l'équation de continuité, mise également sous la forme de Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho D = 0.$$

Enfin, tant que la différence  $(t - t_0)$  n'excédera pas une certaine limite, nous aurons sensiblement

$$\rho(a, b, c, t) = r(a, b, c).$$

Cette égalité jouera le rôle d'équation supplémentaire et ramènera l'équation de continuité à la forme

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0.$$

Il est un problème, très différent du précédent au point de vue de la Physique, mais qui se traduit exactement par des équations de même forme; ce dernier problème peut donc servir à *illustrer* le premier; voici ce problème :

Dans un fluide incompressible, un corps est dissous; la concentration  $a$ , pour les divers éléments matériels, des valeurs très différentes et, comme la densité est fonction de la concentration, il en est de même de la densité.

On suppose que le corps dissous se diffuse dans le dissolvant avec une extrême lenteur; si l'on désigne par  $s$  la concentration qui correspond à un élément déterminé du dissolvant,  $\frac{ds}{dt}$  aura, pour cet élément, une très petite valeur; il en sera de même de  $\frac{d\rho}{dt}$ .

Considérons le fluide à un instant  $t_0$ ; soient, à cet instant,  $a, b, c$  les coordonnées d'un élément du dissolvant, coordonnées dont la connaissance permettra à tout instant de reconnaître cet élément; la densité, au sein de cet élément, est  $r(a, b, c)$  à l'instant  $t_0$  et  $\rho(a, b, c, t)$  à l'instant  $t$ ; si le laps de temps  $(t - t_0)$  n'est pas extrêmement grand,  $\rho(a, b, c, t)$  diffère très peu de  $r(a, b, c)$ , et le mouvement au sein de la dissolution est régi par les équations précédemment écrites.

Tous ceux qui ont observé, au sein d'un fluide, les stries et les traînées qui se manifestent au voisinage du point critique; qui ont observé également les mouvements qui se produisent au sein d'une dissolution de concentration très peu uniforme, ont pu remarquer l'extrême ressemblance de ces phénomènes. L'analyse précédente précise cette analogie.

La variation de la densité  $\rho$  d'un fluide dont l'état avoisine l'état critique, ordinairement très lente, prend une vitesse notable si l'on agite vivement le liquide. Les considérations précédentes permettent encore de rendre compte de ce fait.

Un certain espace contient un fluide que nous supposons dans un état de quasi-équilibre, en sorte que nous avons sensiblement

$$\gamma_x = 0, \quad \gamma_y = 0, \quad \gamma_z = 0.$$

Les équations (19) se réduisent alors à

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho(X_i + x_e), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho(Y_i + Y_e), \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho(Z_i + Z_e).$$

Supposons les sommes  $(X_i + X_e)$ ,  $(Y_i + Y_e)$ ,  $(Z_i + Z_e)$  assez petites pour que les variations de  $P$ , d'un point à l'autre de l'espace considéré, soient très petites; cela aura lieu, en particulier, si l'espace considéré a les dimensions généralement employées dans les recherches sur le point critique et si le champ agissant se réduit à celui de la pesanteur. Toutes les valeurs de  $P$  sont supposées voisines de la pression critique.

La température est également supposée presque uniforme dans l'espace considéré et, partout, très voisine de la température critique.

La densité  $\rho_0$ , donnée par l'égalité (23), n'en présente pas moins, au sein de l'espace considéré, des variations notables; mais, visiblement, toutes les valeurs de  $\rho_0$  au sein de cet espace demeurent au nombre de celles pour lesquelles  $F(\rho_0, T)$  a une valeur extrêmement grande.

Pour que notre état de quasi-équilibre soit possible il faut que les valeurs de  $\rho$ , aux divers points de l'espace considéré, soient aussi telles que  $F(\rho, T)$  ait une valeur extrêmement grande; nous supposons qu'il en soit ainsi.

Si l'on désigne par  $\varepsilon$  la valeur très petite que prend le produit  $\frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ , pour un élément matériel donné, en cet état d'équilibre, on a, selon l'égalité (22),

$$(34) \quad P - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = \varepsilon.$$

Supposons qu'on laisse cet état de quasi-équilibre non troublé jusqu'à l'instant  $t$ . A partir de ce moment, on produit dans l'espace considéré une vive agitation.

Considérons un instant  $t'$ , postérieur à  $t$ , et tel que la différence  $(t' - t)$  ne soit pas très grande.

A l'instant  $t'$ , les composantes  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  ont, en général, aux divers points du fluide, des valeurs notables que nous supposerons grandes par rapport aux  $X, Y, Z$ ; si, par exemple, la seule force agissante est la pesanteur,  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  seront supposés grands par l'intensité de la pesanteur; selon les égalités (19), il en sera de même de  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}$ ;  $P$  subira donc, d'un point à l'autre de l'espace, des variations notables; sa valeur ne pourra être partout très voisine de la pression critique.

Dès lors, à l'instant  $t'$ , pour un élément matériel donné,  $P$  a, en général, une valeur  $P'$  notablement différente de la valeur prise par la même grandeur, pour le même élément, à l'instant  $t$ , cette dernière différant très peu de la pression critique.

Quant à la température  $T'$  au sein de l'élément considéré, à l'instant  $t'$ , nous supposerons qu'elle continue à différer très peu de la température critique et, partant, de  $T$ .

S'il en est ainsi, on voit sans peine que  $\frac{d\rho}{dt}$  n'a pu, pour l'élément considéré, demeurer sans cesse très petit de l'instant  $t$  à l'instant  $t'$ .

En effet, nous avons à l'instant  $t'$ , pour l'élément considéré,

$$(22 \text{ bis}) \quad P' - \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'} = \frac{\lambda(\rho', T')}{\rho'} \frac{d\rho'}{dt'}.$$

Si, à l'instant  $t'$ ,  $\frac{d\rho'}{dt'}$  a une valeur notable, la proposition est démontrée, il nous reste donc à examiner le cas où  $\frac{d\rho'}{dt'}$  a une très petite valeur, cas auquel  $\frac{\lambda(\rho', T')}{\rho'} \frac{d\rho'}{dt'}$  a aussi une très petite valeur que nous désignerons par  $\epsilon'$ .

Les égalités (22 bis) et (34) nous donnent

$$P' - P + \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'} - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = \epsilon' - \epsilon.$$

D'ailleurs,  $T'$  différant très peu de  $T$ , et  $\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T}$  n'étant jamais extrêmement grand,  $\rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'}$  diffère extrêmement peu de  $\rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}$ . Si donc nous désignons par  $\eta$  une très petite grandeur, l'égalité précédente devient

$$P' - P + \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = \eta$$

ou bien

$$P' - P + \int_t^{t'} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} \right] \frac{d\rho}{dt} dt = \eta.$$

$\tau_i$  a une valeur très petite;

$(P' - P)$  a une valeur notable;

$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} \right]$  n'a une valeur très grande que pour un fluide très peu compressible, ce qui n'a pas lieu dans le cas étudié;

par hypothèse,  $(t' - t)$  n'est pas extrêmement grand;

l'égalité précédente ne saurait avoir lieu si, entre les instants  $t$  et  $t'$ ,  $\frac{d\rho}{dt}$  était demeuré toujours très petit.

Notre théorème est donc établi.

§ 2. — EXTENSION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS AUX CORPS HABITUELLEMENT NOMMÉS FLUIDES VISQUEUX. — COMPARAISON AVEC LES FAITS D'EXPÉRIENCE.

Il n'est pas malaisé d'étendre les considérations précédentes aux corps que l'on nomme habituellement *fluides visqueux*; il suffit, en effet, de suivre la voie qui a été indiquée au Paragraphe 4 du Chapitre précédent. A l'égalité (22) nous devons substituer l'égalité

$$(35) \quad P - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$$

qui est la forme prise par l'égalité (31) lorsque les actions sont newtoniennes; cette égalité (35) se discutera d'ailleurs comme l'égalité (22); elle nous montrera encore que, en un fluide dont l'état diffère très peu de l'état critique, la densité de chaque masse élémentaire ne varie qu'avec une extrême lenteur.

Si donc on étudie le mouvement du fluide pendant un laps de temps de peu de durée, on pourra regarder la densité de chacune des masses élémentaires comme sensiblement constante; le fluide se mouvra à peu près comme un fluide hétérogène et incompressible; mais ce dernier fluide, au lieu d'être dénué de viscosité comme il arrivait au Paragraphe précédent, sera ici un fluide visqueux; il sera inutile d'ajouter que les actions de viscosité vérifient, au sein de ce dernier fluide, l'hypothèse de Stokes, car en un fluide incompressible les équations de la viscosité sont indépendantes de la relation qui peut exister entre les fonctions  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$ .

Le *modèle* qui nous a servi à *illustrer* le mouvement d'un fluide compressible



dont l'état avoisine l'état critique peut encore être employé, mais il doit être complété; nous devons supposer que notre dissolution mal mélangée et à diffusion lente est, en outre, une dissolution visqueuse. Ainsi complété, ce modèle fournit une image saisissante des stries et des traînées qui apparaissent, en un fluide, au voisinage de l'état critique.

De nombreux observateurs ont remarqué ces stries et ces traînées, ont étudié les états de quasi-équilibre que manifeste un fluide placé en des circonstances peu différentes des conditions critiques, ont remarqué l'extrême lenteur avec laquelle s'établissait l'équilibre proprement dit. Sans détailler tous les faits d'expérience qui ont été signalés, bornons nous à citer ceux qui les ont le plus soigneusement notés : ce sont MM. Cailletet et Colardeau <sup>(1)</sup>, M. de Heen <sup>(2)</sup>; le prince Boris Galitzine, soit seul <sup>(3)</sup>, soit en collaboration avec M. J. Wilip <sup>(4)</sup>; M. Gouy <sup>(5)</sup>, M. F.-V. Dwelshauvers-Déry <sup>(6)</sup>, M. Traube <sup>(7)</sup>. Parmi ces nombreux travaux, ceux de M. Gouy méritent une mention spéciale; seuls, ils ont nettement mis en évidence la notion de *quasi-équilibre*.

Ces phénomènes ont donné lieu à des interprétations diverses et parfois assez étranges. Dès 1898 <sup>(8)</sup>, nous avons indiqué sommairement les principes que nous venons de développer et qui nous paraissent rendre un compte satisfaisant des particularités que présente un fluide au voisinage de l'état critique; mais nous avons cru nécessaire de supposer que  $\lambda(\rho, T)$  devenait infini au point critique; on voit, par ce qui précède, que cette supposition est inutile; pour que nos raisonnements valent, il suffit que  $\lambda(\rho, T)$  (au § 1) ou que  $[3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)]$  (au § 2) ne s'annule pas au point critique.

(1) CAILLETET et COLARDEAU, *Journal de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. VIII, 1889, p. 389. — *Annales de Chimie et de Physique*, 6<sup>e</sup> série, t. XVIII, 1889, p. 269.

(2) DE HEEN, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXIV, 1892, p. 267. — *Les légendes du point critique*, Liège, 1901. — *Les dernières mésaventures du point critique*, Liège, 1901.

(3) BORIS GALITZINE, *Wiedemann's Annalen*, Bd. L, 1893, p. 251.

(4) BORIS GALITZINE et J. WILIP, *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, t. XI, n° 3. — *Rapports présentés au Congrès international de Physique*, t. I, Paris, 1900, p. 668.

(5) GOUY, *Comptes rendus*, t. CXVI, 1893, p. 1289.

(6) F.-V. DWELSHAUVERS-DÉRY, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXX, 1895, p. 570.

(7) TRAUBE, *Drude's Annalen*, Bd. VIII, 1902, p. 267. — On trouvera un exposé très complet de ces recherches et des théories, distinctes de la présente explication, auxquelles elles ont donné lieu dans : E. MATHIAS, *Le point critique des corps purs*, Paris, 1904. Chapitre X.

(8) *Traité élémentaire de Mécanique chimique fondée sur la Thermodynamique*, t. II, 1898, p. 163.

Il ne paraît pas que notre explication ait été remarquée de la plupart des physiciens; ceux, en petit nombre, qui l'ont remarquée, ne semblent pas l'avoir comprise; ils ont cru y voir une *viscosité d'un nouveau genre* et l'ont considérée comme étant en désaccord avec la théorie générale de la viscosité; bien au contraire, elle est une conséquence nécessaire de cette théorie; elle ne heurte même pas l'opinion des physiciens qui, sur la foi de la théorie cinétique des gaz, regarderaient la relation de Stokes

$$(4) \quad 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0$$

comme exacte pour les gaz parfaits.

---

## NOTE.

### SUR LA VISCOSITÉ ET LE FROTTEMENT AU CONTACT DE DEUX LIQUIDES PARFAITS (1).

---

Au Paragraphe 2 du Chapitre II de la cinquième Partie, nous avons établi le théorème suivant :

*Un fluide parfait, c'est-à-dire dénué de toute viscosité interne, ne peut, en général, être affecté ni de viscosité, ni de frottement au contact d'une paroi solide.*

Nous nous proposons de montrer ici que, *au contact de deux liquides parfaits, il ne peut, en général, se manifester ni viscosité, ni frottement.*

En effet, si la viscosité et le frottement n'étaient pas nuls tous deux le long de la surface par laquelle un fluide parfait confine à un autre fluide, visqueux ou parfait, les deux fluides seraient *soudés* l'un à l'autre le long de la surface de contact (*Recherches*, IV<sup>e</sup> Partie, Chap. II, § 2); chacune des trois composantes de la vitesse demeurerait continue au travers de cette surface.

Cela posé, considérons deux fluides parfaits et incompressibles 1 et 2, se touchant le long de la surface S; supposons que, jusqu'à l'instant  $t = 0$ , ces deux fluides soient en équilibre sous l'action de certaines forces extérieures dérivant d'une fonction potentielle; la surface S coïncide alors avec une certaine surface d'égal niveau potentiel.

---

(1) *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 19 février 1903.

A l'instant  $t = 0$ , mettons le système en mouvement sans imprimer à aucun élément matériel une variation brusque de vitesse. Le théorème de Lagrange s'appliquera à chacun de nos deux liquides; chacun d'eux admettra une fonction potentielle des vitesses, que nous désignerons par  $\varphi_1$  pour le fluide 1, et par  $\varphi_2$  pour le fluide 2. Les composantes de la vitesse seront, au sein du fluide 1,

$$(1) \quad u_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad v_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad w_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$$

et, au sein du fluide 2,

$$(1 \text{ bis}) \quad u_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad v_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad w_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}.$$

Au sein du fluide 1, la fonction  $\varphi_1$  vérifiera la condition

$$(2) \quad \Delta \varphi_1 = 0,$$

tandis que, au sein du fluide 2, la fonction  $\varphi_2$  vérifiera la condition

$$(2 \text{ bis}) \quad \Delta \varphi_2 = 0.$$

Les deux fluides ne devant, le long de la surface S, ni se compénétrer, ni se séparer l'un de l'autre, on devra avoir, en tout point de cette surface et à tout instant,

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} = 0,$$

$n_1, n_2$  étant les deux demi-normales à la surface S, respectivement dirigées vers l'intérieur des fluides 1 et 2.

Soit  $\theta$  une direction quelconque tangente, à l'instant  $t$ , à la surface S. La condition nécessaire et suffisante pour que, à cet instant, les deux fluides ne glissent pas l'un sur l'autre, s'exprime par l'égalité

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = 0.$$

Cette égalité exprime que, à l'instant considéré  $t$ , la différence  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  a même valeur en tout point de la surface S. En d'autres termes, le long de la surface de contact des deux fluides, la différence  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  a une valeur qui dépend seulement de  $t$  :

$$(4) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = f(t).$$

Mais, à la fonction  $\varphi_1$ , je puis, comme fonction potentielle des vitesses du

fluide 1, substituer la fonction  $\varphi_1 + f(t)$ , que je désignerai maintenant par  $\varphi_1$ . Les égalités (1), (1 bis), (2), (2 bis) et (3) subsistent, tandis que l'égalité (4) devient

$$(5) \quad \varphi_1 = \varphi_2.$$

Les égalités (2), (2 bis), (3) et (5) nous enseignent, selon un théorème bien connu, que les deux fonctions potentielles  $\varphi_1, \varphi_2$  forment une fonction analytique unique  $\varphi$  dans toute l'étendue du volume occupé par les deux fluides 1 et 2. En d'autres termes, le mouvement du système sera le même que si ce volume était occupé par un fluide unique ayant partout même densité. .

Il est clair, sans aucun calcul, que cette conclusion est inadmissible. Nous en serons encore mieux convaincus par un exemple.

Supposons que les deux fluides remplissent en entier un vase clos; soient  $U, V, W$  les composantes de la vitesse d'un point  $M$ , pris sur la surface interne de la paroi; soit  $n$  la normale à cette surface dirigée vers l'intérieur du fluide. Nous aurons, en tout point de la paroi,

$$(6) \quad U \cos(n, x) + V \cos(n, y) + W \cos(n, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

en même temps que nous aurons, en tout point de l'espace que cette paroi circonscrit,

$$(7) \quad \Delta \varphi = 0.$$

Si, pour tout point  $M$  de la surface de la paroi et pour tout instant  $t$ , on se donne  $U, V, W$ , les égalités (6) et (7) déterminent la fonction  $\varphi$  à une fonction près de  $t$  et, par conséquent, déterminent complètement le mouvement des deux fluides.

Supposons que le mouvement imprimé au vase se réduise à une translation, d'ailleurs quelconque :

$$U = \xi(t), \quad V = \eta(t), \quad W = \zeta(t).$$

Les égalités (6) et (7) nous donneraient

$$\varphi = -[\xi(t)x + \eta(t)y + \zeta(t)z] + \psi(t),$$

$\psi(t)$  étant une fonction arbitraire de  $t$ , et ce serait la seule forme possible de  $\varphi$ , en sorte que toutes les parties du fluide subiraient la même translation que la paroi.

Or, on peut choisir les fonctions  $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$  qui sont, jusqu'ici, entière-

ment arbitraires, de telle sorte que, tout en demeurant continues, elles s'annulent à partir de l'instant  $t = t_1$ , tandis que les trois quantités

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \xi(t) dt, \quad B = \int_{t_0}^{t_1} \eta(t) dt, \quad C = \int_{t_0}^{t_1} \zeta(t) dt$$

auront telles valeurs que l'on voudra. A partir de cet instant  $t_1$ , le fluide sera en équilibre; la surface S, qui aura subi une simple translation de composantes A, B, C, devra, à l'instant  $t = t_1$ , coïncider avec une surface d'égal niveau potentiel.

On parviendrait donc à la conclusion suivante : *Si des forces dérivent d'une fonction potentielle, une portion quelconque d'une surface d'égal niveau potentiel se trouve encore, après une translation quelconque, sur une surface d'égal niveau potentiel.*

Visiblement, cette conclusion est absurde.



---

SUR UN PROBLÈME  
RELATIF A LA  
THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES  
DU SECOND ORDRE,  
PAR M. É. GOURSAT.

---

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes,

$$(E) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

le problème classique, appelé généralement *problème de Cauchy*, consiste à déterminer une intégrale  $z = \Phi(x, y)$ , de telle façon que la surface  $S$ , représentée par cette équation, passe par une courbe donnée  $\Gamma$  et admette en chaque point de cette courbe un plan tangent déterminé. L'étude de ce problème conduisait tout naturellement à se poser la question plus générale suivante : *Déterminer une surface intégrale de l'équation (E), passant par deux courbes données*. Les premières recherches dans cette voie paraissent dues à M. Darboux, auquel on doit la proposition suivante <sup>(1)</sup> :

*Étant donnée l'équation linéaire*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

*dont les coefficients  $a, b, c$  sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de  $x - x_0, y - y_0$ , il existe une solution de l'équation aux dérivées partielles se réduisant, pour  $y = y_0$ , à une fonction déterminée  $\varphi(x)$  de  $x$ , développable suivant les puissances de  $x - x_0$ , et*

---

<sup>(1)</sup> *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II, 1889, p. 92.

pour  $x = x_0$ , à une fonction  $\psi(y)$  de  $y$ , développable suivant les puissances de  $y - y_0$ .

En restant dans le domaine des fonctions analytiques et en supposant réalisées les conditions habituelles relatives à la convergence des séries entières employées, je démontrerais quelques années plus tard que par deux courbes  $\Gamma, \Gamma_1$  ayant un point commun  $O$ , sans être tangentes en ce point, on pouvait toujours faire passer une surface intégrale et une seule, *pourvu que ces courbes soient tangentes respectivement aux deux directions caractéristiques de l'élément qu'elles déterminent* <sup>(1)</sup>.

Ce théorème avait de nombreuses et importantes conséquences pour la théorie des caractéristiques. Peu après, une modification bien simple de la démonstration primitive me permettait d'étendre la conclusion au cas où *une seule des courbes  $\Gamma, \Gamma_1$  est tangente à une direction caractéristique* <sup>(2)</sup>.

L'extension de la méthode et des résultats à des cas plus généraux, en conservant l'hypothèse fondamentale ou une hypothèse analogue, ne présentait pas des difficultés bien sérieuses. Parmi les différentes applications ou généralisations, je citerai celles que l'on doit à MM. Beudon <sup>(3)</sup>, Le Roux <sup>(4)</sup>, Hadamard <sup>(5)</sup>, Riquier <sup>(6)</sup>.

Je dois rappeler aussi que M. Picard a traité les mêmes problèmes pour une équation de la forme  $s = f(x, y, z, p, q)$  au moyen d'approximations successives, et en faisant le minimum d'hypothèses sur la fonction  $f$  et sur les conditions initiales <sup>(7)</sup>.

Il restait donc à traiter le cas général où aucune des deux courbes données  $\Gamma, \Gamma_1$  n'est tangente à une direction caractéristique. La solution complète paraît offrir des difficultés beaucoup plus grandes que les cas particuliers déjà connus. J'ai montré le rôle important que joue dans cette question le rapport anharmonique des tangentes aux deux courbes données  $\Gamma, \Gamma_1$ , et des tangentes caractéristiques

<sup>(1)</sup> *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Comptes rendus*, t. CXX, 1<sup>er</sup> avril 1895). — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, Chap. IV.

<sup>(2)</sup> *Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles, par certaines conditions initiales* (*Comptes rendus*, t. CXXV; 2 novembre 1897). — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, Chap. X.

<sup>(3)</sup> *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXV, p. 116.

<sup>(4)</sup> *Journal de Mathématiques*, t. VI, 5<sup>e</sup> série, p. 397.

<sup>(5)</sup> *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXIX, p. 60. — *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, 1903 (*passim*).

<sup>(6)</sup> *Acta Mathematica*, t. XXIII; 1900.

<sup>(7)</sup> Note du Tome IV des *Leçons sur la Théorie des surfaces* de M. Darboux, 1896.

issues du point O dans l'élément déterminé par les tangentes aux deux courbes <sup>(1)</sup>. Le présent travail est consacré à l'étude du problème pour une équation de la forme

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

les coefficients A, B, C ne dépendant que des variables  $x$  et  $y$ .

En me bornant d'abord aux solutions analytiques, et *en supposant les courbes données réelles*, je montre que les résultats obtenus sont absolument différents suivant que l'équation proposée appartient au type hyperbolique ou au type elliptique. Tandis que toute équation du type hyperbolique admet une intégrale passant par deux courbes réelles données ayant un point commun O sans être tangentes en ce point (sauf dans un cas exceptionnel), la méthode employée est impuissante à établir le même théorème pour une équation du type elliptique dans le cas le plus général.

Dans un second Mémoire, j'étudierai le même problème pour une équation du type hyperbolique  $s = f(x, y, z, p, q)$ , en faisant le minimum d'hypothèses sur les conditions aux limites. Les principaux résultats de ce travail et de celui qui le suivra ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 8 juin 1903).

1. Étant donnée une variable complexe  $x$ , nous appellerons domaine  $\mathfrak{D}(R)$  l'ensemble des valeurs de  $x$  dont le module est inférieur à  $R$ . Une fonction  $f(x)$ , holomorphe dans ce domaine, est développable en une série entière ordonnée suivant les puissances positives de  $x$  et convergente pour tous les points de ce domaine. Si le module de  $f(x)$  reste inférieur à un nombre fixe  $\mu$  dans  $\mathfrak{D}(R)$ , le module du coefficient  $c_n$  de  $x^n$  dans cette série satisfait à l'inégalité

$$|c_n| \leq \frac{\mu}{r^n},$$

$r$  étant un nombre positif quelconque, *inférieur* à  $R$ . On en déduit

$$r \leq \sqrt[n]{\frac{\mu}{|c_n|}},$$

et cette inégalité doit être vérifiée par tous les nombres inférieurs à  $R$ , ce qui exige que l'on ait aussi

$$R \leq \sqrt[n]{\frac{\mu}{|c_n|}},$$

---

<sup>(1)</sup> Sur un problème relatif à la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles (*Comptes rendus*, t. CXXI, 11 novembre 1895, p. 671).



ou

$$|c_n| \leq \frac{\mu}{R^n}.$$

La fonction  $\frac{\mu}{1 - \frac{x}{R}}$  est donc une fonction majorante pour  $f(x)$ , et cette conclusion n'exige pas que la fonction  $f(x)$  reste continue sur le cercle C de rayon R qui limite le domaine  $\mathfrak{D}(R)$ .

Soient de même  $x$  et  $y$  deux variables complexes indépendantes. Nous appellerons domaine  $\mathfrak{D}(R, R')$  l'ensemble des systèmes de valeurs de  $x$  et de  $y$  qui satisfont aux inégalités

$$|x| < R, \quad |y| < R'.$$

Si une fonction  $f(x, y)$  est holomorphe dans ce domaine, et si  $|f(x, y)|$  reste inférieur dans  $\mathfrak{D}(R, R')$  à un nombre fixe  $\mu$ , on voit comme tout à l'heure qu'elle admet comme fonction majorante la fonction

$$\frac{\mu}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{y}{R'}\right)}.$$

En effet, soit  $c_{mn}$  le coefficient de  $x^m y^n$  dans le développement de  $f(x, y)$ . On a toujours, en désignant par  $r$  et  $r'$  deux nombres positifs, inférieurs à  $R$  et à  $R'$  respectivement,

$$|c_{mn}| \leq \frac{\mu}{r^m r'^n},$$

ce qui peut encore s'écrire, en posant  $r = R - \varepsilon$ ,  $r' = R' - \varepsilon'$ ,

$$(R - \varepsilon)^m (R' - \varepsilon')^n \leq \frac{\mu}{|c_{mn}|}.$$

Cette inégalité ne peut avoir lieu, aussi petits que soient les nombres positifs  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ , que si l'on a aussi

$$R^m R'^n \leq \frac{\mu}{|c_{mn}|}$$

ou

$$|c_{mn}| \leq \frac{\mu}{R^m R'^n};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

2. Soit  $\pi(x)$  une fonction de la variable complexe  $x$ , holomorphe dans un cercle C de rayon R décrit de l'origine pour centre. Proposons-nous de *déter-*

*miner une autre fonction  $\varphi(x)$ , holomorphe dans le voisinage de l'origine, et satisfaisant à la relation*

$$(1) \quad \varphi(\alpha x) - \varphi(x) = \pi(x),$$

*où  $\alpha$  est une constante donnée, dont le module est différent de l'unité.*

Il est permis de supposer  $|\alpha| > 1$ , car si l'on change  $x$  en  $\frac{x}{\alpha}$  dans la relation précédente elle devient

$$(2) \quad \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \varphi(x) = -\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right);$$

c'est une relation de même forme que la première, et qui s'en déduit en remplaçant  $\alpha$  par  $\frac{1}{\alpha}$ , et  $\pi(x)$  par  $-\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ . Or, si l'on a  $|\alpha| < 1$ , il est clair qu'inversement  $\left|\frac{1}{\alpha}\right|$  est  $> 1$ .

Cela posé, soient

$$(3) \quad \pi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$(4) \quad \varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

les développements en séries entières de la fonction donnée  $\pi(x)$  et de la fonction inconnue  $\varphi(x)$ .

En remplaçant  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(\alpha x)$  et  $\pi(x)$  par leurs développements dans la relation (1), et en identifiant les deux membres, on obtient une infinité de conditions que l'on peut écrire

$$(5) \quad c_n(\alpha^n - 1) = a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

La première de ces conditions, qui correspond à  $n = 0$ , se réduit à  $a_0 = 0$ . Le terme indépendant de  $x$  dans  $\pi(x)$  doit donc être nul pour que le problème soit possible, ce qui était évident *a priori*, et le coefficient  $c_0$  de  $\varphi(x)$  reste arbitraire. Si  $n > 1$ , le coefficient  $c_n$  est déterminé et a pour expression

$$(6) \quad c_n = \frac{a_n}{\alpha^n - 1}.$$

La fonction cherchée  $\varphi(x)$  est donc déterminée à une constante près. Pour fixer les idées, nous supposons  $\varphi(0) = 0$ ; nous avons alors

$$(7) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{\alpha^n - 1}.$$

La série ainsi obtenue est convergente dans le cercle de rayon  $R|\alpha|$  ayant pour centre l'origine.

En effet, soit  $r$  un nombre positif inférieur à  $R$ , et soit  $M$  un nombre positif supérieur à tous les produits  $|a_n| r^n$ . La série (7) admet pour fonction majorante la fonction

$$(8) \quad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M x^n}{r^n (|\alpha|^n - 1)},$$

car on a toujours

$$|\alpha^n - 1| \geq |\alpha|^n - 1.$$

Cette série (8) est convergente pourvu que l'on ait  $|x| < r|\alpha|$ , car si l'on pose  $x = r|\alpha|z$ , la nouvelle série

$$\sum \frac{M |\alpha|^n}{|\alpha|^n - 1} z^n$$

admet pour cercle de convergence le cercle de rayon  $un$  ayant pour centre l'origine, le rapport  $\frac{|\alpha|^n}{|\alpha|^n - 1}$  ayant pour limite l'unité lorsque  $n$  croît indéfiniment.

Le nombre  $r$  pouvant être pris aussi voisin de  $R$  qu'on le voudra, il s'ensuit que la série (7) est convergente dans le cercle  $C'$  de rayon  $R|\alpha|$  décrit de l'origine pour centre. Elle ne peut être convergente dans un cercle de rayon supérieur à  $R|\alpha|$ ; autrement  $\varphi(\alpha x) - \varphi(x)$ , et par suite  $\pi(x)$ , serait une fonction holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que  $R$ , contrairement à l'hypothèse. La relation (1) est donc vérifiée par la fonction obtenue  $\varphi(x)$  pour toutes les valeurs de  $x$  de module inférieur à  $R$ .

En résumé, pour que le problème proposé admette une solution, il faut et il suffit que l'on ait  $\pi(0) = 0$ . Toutes les fonctions répondant à la question s'obtiennent en ajoutant une constante arbitraire à la fonction  $\varphi(x)$  définie par la série (7).

3. Les calculs précédents ne s'appliquent plus lorsque l'on a  $|\alpha| = 1$ . Nous avons encore deux cas à distinguer suivant que  $\alpha$  est racine de l'unité ou n'est pas racine de l'unité. Supposons  $\alpha$  racine de l'unité et soit  $m$  le plus petit nombre entier positif tel que  $\alpha^m = 1$ . Les relations (5) font connaître  $c_n$  lorsque  $n$  n'est pas multiple de  $m$ , mais si  $n = pm$ , le coefficient de  $c_n$  est nul et la relation (5) se réduit à  $a_n = 0$ . Le problème n'est donc possible que si tous les coefficients  $a_{pm}$  de  $\pi(x)$  sont nuls. Lorsqu'il en est ainsi, la série  $\varphi(x)$  obtenue en supposant nuls tous les coefficients  $c_{pm}$  est encore convergente dans le cercle  $C$  de rayon  $R$ . Il suffit de reprendre le raisonnement qui précède en observant que  $\frac{1}{\alpha^n - 1}$  ne peut

prendre que  $m - 1$  valeurs différentes lorsque  $n$  n'est pas un multiple de  $m$ . En ajoutant à cette fonction  $\varphi(x)$  une série entière en  $x^m$ , soit  $\psi(x^m)$ , convergente dans le voisinage de l'origine, on obtient encore une fonction vérifiant la relation (1). Le problème admet donc une infinité de solutions lorsque tous les coefficients de  $\pi(x)$  dont l'indice est un multiple de  $m$ , y compris  $a_0$ , sont nuls.

Par exemple, si  $\alpha = -1$ , l'équation

$$\varphi(-x) - \varphi(x) = \pi(x)$$

n'admet de solutions que si  $\pi(x)$  est une fonction impaire et, dans ce cas, elle en admet une infinité.

Lorsque  $\alpha$  n'est pas racine de l'unité,  $|\alpha|$  étant égal à un, les équations (5) déterminent encore les coefficients  $c_n$ , si l'on a  $a_0 = 0$ . Mais la méthode précédente ne suffit pas pour décider si la série obtenue est convergente, car la limite inférieure de  $|\alpha^n - 1|$  est égale à zéro.

Soit  $\alpha = e^{i\theta}$ , le rapport  $\frac{\theta}{\pi}$  étant incommensurable. La relation (5) donne

$$c_n = \frac{a_n}{e^{n\theta i} - 1} = \frac{a_n}{2i \sin \frac{n\theta}{2} \left\{ \cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right\}}$$

Pour savoir si la série  $\sum c_n x^n$  a un rayon de convergence différent de zéro, il suffit d'examiner si la plus grande des limites de  $\sqrt[n]{|c_n|}$ , ou de

$$\frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{\left| \sin \frac{n\theta}{2} \right|}},$$

a une valeur finie. Nous supposons que la plus grande des limites de  $\sqrt[n]{|a_n|}$  est égale à  $L$ , et que la plus petite des limites de  $\sqrt[n]{|a_n|}$  est un nombre positif  $l$ , de sorte que, à partir d'une valeur assez grande de  $n$ ,  $\sqrt[n]{|a_n|}$  restera compris entre deux nombres positifs  $m$  et  $M$ . C'est un cas qui se présente fréquemment dans la pratique.

Cela posé, soit  $\mu$  la plus petite des limites de  $\sqrt[n]{\left| \sin \frac{n\theta}{2} \right|}$ . Si  $\mu = 0$ , la série  $\sum c_n x^n$  est toujours divergente, sauf pour  $x = 0$ . En effet,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitraire, on a, pour une infinité de valeurs de  $n$ ,

$$\sqrt[n]{\left| \sin \frac{n\theta}{2} \right|} < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \left| \sin \frac{n\theta}{2} \right| < \varepsilon^n.$$

D'autre part, on a, pour ces valeurs de  $n$ ,

$$\sqrt[n]{|a_n|} > m \quad \text{ou} \quad |a_n| > m^n.$$

Le module  $|c_n|$  est donc supérieur à  $\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^n$  pour une infinité de valeurs de  $n$ , aussi petit que soit  $\varepsilon$ . La série  $\sum c_n x^n$  est donc divergente, sauf pour  $x = 0$ .

Au contraire, si  $\mu$  est positif, à partir d'une valeur de  $n$  assez grande, on aura

$$\sqrt[n]{\left|\sin \frac{n\theta}{2}\right|} > \mu' > 0,$$

$\mu'$  étant un nombre positif inférieur à  $\mu$ . Comme on a, d'autre part,

$$\sqrt[n]{|a_n|} < M,$$

pourvu que  $n$  soit supérieur à un nombre  $N$ , on voit qu'à partir d'un certain rang l'on a toujours

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{M}{\mu'} \quad \text{et} \quad |c_n| < \left(\frac{M}{\mu'}\right)^n.$$

La série  $\sum c_n x^n$  sera donc certainement convergente si l'on a

$$|x| < \frac{\mu'}{M}.$$

Dans le cas général considéré, on voit que la conclusion dépend uniquement de la plus petite des limites de l'expression  $\sqrt[n]{\left|\sin \frac{n\theta}{2}\right|}$ , c'est-à-dire de l'angle  $\theta$ , et non de la série donnée  $\pi(x)$ .

Les remarques suivantes, que je dois à M. Hadamard, permettent de trouver aisément des valeurs de  $\omega$  pour lesquelles la plus petite des limites de  $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$  est égale à zéro, et d'autres pour lesquelles il n'en est pas ainsi.

1<sup>o</sup> Supposons que l'incommensurable  $\frac{\omega}{\pi}$  soit un nombre algébrique de degré  $d$ . D'après un théorème dû à Liouville, on a,  $n$  et  $k$  étant deux nombres entiers quelconques tels que la fraction  $\frac{k}{n}$  soit comprise dans un intervalle  $(\alpha, \beta)$  renfermant  $\frac{\omega}{\pi}$ , l'inégalité

$$(c) \quad \left| n \frac{\omega}{\pi} - k \right| > \frac{A}{n^{d-1}},$$

A étant un nombre fixe qui ne dépend que de l'intervalle  $(\alpha, \beta)$ . A tout nombre

entier positif  $n$  faisons correspondre le nombre entier  $k$  compris entre  $n \frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2}$  et  $n \frac{\omega}{\pi} + \frac{1}{2}$ , de façon que l'on ait

$$n \frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2} < k < n \frac{\omega}{\pi} + \frac{1}{2},$$

et par suite

$$\frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2n} < \frac{k}{n} < \frac{\omega}{\pi} + \frac{1}{2n}.$$

La fraction  $\frac{k}{n}$  est donc comprise dans l'intervalle  $\left(\frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2n}, \frac{\omega}{\pi} + \frac{1}{2n}\right)$ , et le nombre  $A$  qui figure dans l'inégalité (e) est fixé par là même. D'après la façon dont on choisit le nombre  $k$ , on a

$$\frac{A}{n^{d-1}} < \left| n \frac{\omega}{\pi} - k \right| < \frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{A \pi}{n^{d-1}} < |n \omega - k \pi| < \frac{\pi}{2};$$

on en déduit que l'on a aussi

$$|\sin n \omega| > \sin \left( \frac{A \pi}{n^{d-1}} \right).$$

Lorsque  $n$  augmente indéfiniment,  $\frac{A \pi}{n^{d-1}}$  tend vers zéro; à partir d'une valeur de  $n$  assez grande, on aura donc,  $\lambda$  étant un nombre positif inférieur à l'unité,

$$|\sin n \omega| > \frac{\lambda A \pi}{n^{d-1}}$$

et, par suite,

$$\sqrt[n]{|\sin n \omega|} > \frac{\sqrt[n]{\lambda A \pi}}{n^{\frac{d-1}{n}}}.$$

Lorsque  $n$  croît indéfiniment,  $n^{\frac{d-1}{n}}$  tend vers l'unité (car son logarithme tend vers zéro); comme  $|\sin n \omega|$  est  $< 1$ , on en conclut que  $\sqrt[n]{|\sin n \omega|}$  a pour limite l'unité.

Lorsque  $\frac{\omega}{\pi}$  est un nombre algébrique non rationnel, la série  $\sum \frac{a_n}{\sin n \omega} x^n$  a donc le même rayon de convergence que la série  $\sum a_n x^n$ .

La même propriété a lieu pour une infinité de nombres transcendants. On sait,

en effet, qu'il existe une infinité de nombres transcendants  $\alpha$  tels que l'on ait

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \frac{1}{10\,000\,q^2},$$

quels que soient les nombres entiers  $p$  et  $q$  <sup>(1)</sup>. Si le rapport  $\frac{\omega}{\pi}$  est égal à un de ces nombres transcendants, les raisonnements qui précèdent s'appliquent sans modification, et l'expression  $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$  a pour limite l'unité.

2° Pour que la plus petite des limites de  $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$  soit zéro, il faut et il suffit que l'on ait, pour une infinité de valeurs de  $n$ ,

$$(e') \quad \left| n \frac{\omega}{\pi} - k \right| < \varepsilon^n,$$

$k$  étant entier et  $\varepsilon$  désignant un nombre positif arbitraire. On déduit en effet de cette inégalité, en supposant  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ,

$$|\sin n\omega| < \sin(\pi\varepsilon^n) < \pi\varepsilon^n$$

et par suite

$$\sqrt[n]{|\sin n\omega|} < \varepsilon\pi^{\frac{1}{n}}.$$

Supposons  $\omega > 0$ ; si l'incommensurable  $\frac{\omega}{\pi}$  est réduit en fraction continue, on a

$$\left| q_\lambda \frac{\omega}{\pi} - p_\lambda \right| < \frac{1}{q_{\lambda+1}},$$

$\frac{p_\lambda}{q_\lambda}$  et  $\frac{p_{\lambda+1}}{q_{\lambda+1}}$  étant deux réduites consécutives. Pour que l'inégalité (e') ait lieu pour une infinité de valeurs de  $n$ , aussi petit que soit  $\varepsilon$ , il suffira que l'on ait, pour une infinité de valeurs de l'entier  $\lambda$ ,

$$q_{\lambda+1} > A\varepsilon^\lambda,$$

$A$  étant une fonction de  $\lambda$  qui augmente indéfiniment avec  $\lambda$ . On peut évidemment satisfaire à cette condition d'une infinité de manières. Il y a donc une infinité de nombres transcendants  $\beta$  tels que, si l'on pose  $\omega = \pi\beta$ , la plus petite des limites de  $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$  soit égale à zéro. On voit aisément qu'il existe une infinité de nombres transcendants de cette espèce dans tout intervalle.

Pour ces valeurs de  $\omega$ , la série

$$\sum \frac{a_n}{\sin n\omega} x^n$$

---

<sup>(1)</sup> E. BOREL, *Leçons sur la Théorie des fonctions*, p. 32.

sera divergente, sauf pour  $x = 0$ , si, à partir d'une valeur assez grande de  $n$ ,  $\sqrt[n]{|a_n|}$  reste supérieur à un nombre fixe  $m > 0$ .

4. Nous avons encore à traiter deux problèmes préliminaires analogues au premier.

*Soit  $F(x, y)$  une fonction holomorphe des variables indépendantes  $x$  et  $y$  dans le domaine du point  $x = 0, y = 0$ . Déterminer une fonction holomorphe  $\varphi(x)$  de la variable  $x$ , et une fonction holomorphe  $\psi(y)$  de la variable  $y$ , de telle façon que la fonction*

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$$

*se réduise identiquement à zéro quand on y remplace  $y$  par  $x$  ou par  $\alpha x$ ,  $\alpha$  étant une constante dont le module est différent de l'unité.*

Supposons, pour fixer les idées,  $|\alpha| > 1$ . Choisissons un nombre positif  $R$  assez petit pour que la fonction  $F(x, y)$  soit holomorphe dans le domaine  $\mathfrak{D}(R, |\alpha|R)$  ou, plus simplement,  $\mathfrak{D}(R)$ , défini par les inégalités

$$|x| < R, \quad |y| < R|\alpha|,$$

et que  $|F(x, y)|, \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|$  restent inférieurs respectivement à trois nombres fixes  $\mu, \mu_1, \mu_2$ , lorsque les variables  $x$  et  $y$  satisfont aux inégalités précédentes. Les deux fonctions  $\varphi(x)$  et  $\psi(y)$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad \psi(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n y^n,$$

doivent satisfaire aux deux équations de condition

$$(9) \quad F(x, x) + \varphi(x) + \psi(x) = 0,$$

$$(10) \quad F(x, \alpha x) + \varphi(x) + \psi(\alpha x) = 0.$$

Soient

$$(11) \quad F(x, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad F(x, \alpha x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n;$$

lorsque l'on a  $|x| < R$ ,  $|\alpha x|$  est  $< R|\alpha|$ , et les deux fonctions  $F(x, x)$ ,  $F(x, \alpha x)$  de la seule variable  $x$  sont holomorphes dans le cercle  $C$  de rayon  $R$  décrit de l'origine comme centre. De plus, le module de chacune de ces fonctions



reste inférieur à  $\mu$ , et l'on a, par conséquent ( $n^o$  1),

$$(12) \quad |a_n| \leq \frac{\mu}{R^n}, \quad |b_n| \leq \frac{\mu}{R^n}.$$

Les conditions (9) et (10) développées conduisent aux relations suivantes, pour déterminer les coefficients inconnus  $c_n$  et  $d_n$ ,

$$c_n + d_n + a_n = 0, \quad c_n + d_n x^n + b_n = 0.$$

On a évidemment

$$a_0 = F(0, 0) = b_0,$$

et, pour  $n = 0$ , les deux relations précédentes se réduisent à une seule

$$c_0 + d_0 + a_0 = 0.$$

Or, on ne change pas le problème en retranchant de  $F(x, y)$  une constante arbitraire  $K$ , à condition d'ajouter à  $\varphi(x)$  et à  $\psi(y)$  deux autres constantes dont la somme est égale à  $K$ . Pour achever de préciser le problème, nous supposons que les trois fonctions  $F(x, y)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(y)$  sont nulles pour  $x = y = 0$ ; on aura donc

$$c_0 = d_0 = 0.$$

Pour  $n > 0$ , les coefficients  $c_n$  et  $d_n$  ont les valeurs suivantes :

$$(13) \quad c_n = \frac{b_n - a_n x^n}{x^n - 1}, \quad d_n = \frac{a_n - b_n}{x^n - 1}.$$

D'après les formules (12), on a

$$|c_n| \leq \frac{\mu}{R^n} \frac{|x|^n + 1}{|x|^n - 1}, \quad |b_n| \leq \frac{2\mu}{R^n (|x|^n - 1)}.$$

Lorsque  $n$  croît indéfiniment, les deux expressions  $\frac{|x|^n + 1}{|x|^n - 1}$  et  $\frac{|x|^n}{|x|^n - 1}$  tendent vers l'unité puisque nous avons supposé  $|x| > 1$ . Soit  $K$  un nombre positif satisfaisant aux deux conditions

$$\frac{|x|^n + 1}{|x|^n - 1} < K, \quad \frac{2|x|^n}{|x|^n - 1} < K,$$

pour toutes les valeurs positives du nombre entier  $n$ .

Les séries  $\varphi(x)$  et  $\psi(y)$  admettent respectivement pour fonctions majorantes

les deux séries

$$(14) \quad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu K}{R^n} x^n, \quad \Psi(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu K}{R^n |\alpha|^n} y^n.$$

La série  $\varphi(x)$  est donc convergente dans le cercle de rayon  $R$ , et la série  $\psi(y)$  dans le cercle de rayon  $R|\alpha|$ , et la fonction obtenue

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$$

est holomorphe dans le même domaine  $\Omega$  que la fonction  $F(x, y)$ .

5. Nous aurons besoin pour la suite d'avoir des limites supérieures des modules de ces deux fonctions  $\varphi(x)$ ,  $\psi(y)$ , et de leurs dérivées  $\varphi'(x)$ ,  $\psi'(y)$ , dans les domaines précédents. On les obtient aisément, en tenant compte des relations (9) et (10).

Supposons d'abord

$$|x| \leq \frac{R}{|\alpha|};$$

on a évidemment

$$|\varphi(x)| < \Phi\left(\frac{R}{|\alpha|}\right),$$

c'est-à-dire

$$|\varphi(x)| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu K}{|\alpha|^n} = \frac{\mu K}{|\alpha| - 1}.$$

D'autre part, si nous changeons  $x$  en  $\alpha x$  dans l'équation (9), elle devient

$$F(\alpha x, \alpha x) + \varphi(\alpha x) + \psi(\alpha x) = 0,$$

et cette relation a lieu pourvu que l'on ait

$$|\alpha x| < R \quad \text{ou} \quad |x| < \frac{R}{|\alpha|}.$$

En retranchant l'équation (10) de cette nouvelle relation, il vient

$$\varphi(\alpha x) = \varphi(x) + F(x, \alpha x) - F(\alpha x, \alpha x).$$

Lorsque  $|x|$  est  $< \frac{R}{|\alpha|}$ ,  $|\alpha x|$  est  $< R$  et les deux fonctions  $F(x, \alpha x)$ ,  $F(\alpha x, \alpha x)$  ont leurs modules inférieurs à  $\mu$ . On a donc

$$|\varphi(\alpha x)| < \frac{\mu K}{|\alpha| - 1} + 2\mu = \mu \left\{ 2 + \frac{K}{|\alpha| - 1} \right\}$$

lorsque  $| \alpha x |$  est inférieur à  $R$ . Cela revient à dire que l'on a

$$(15) \quad | \varphi(x) | < \mu \left\{ 2 + \frac{K}{| \alpha | - 1} \right\},$$

lorsque  $| x |$  est plus petit que  $R$ .

On a de même, si  $| x | < R$ ,

$$| \psi(x) | < \Psi(R),$$

c'est-à-dire

$$| \psi(x) | < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu K}{| \alpha |^n} = \frac{\mu K}{| \alpha | - 1}.$$

D'autre part, on tire des relations (9) et (10)

$$\psi(\alpha x) = \psi(x) + F(x, x) - F(x, \alpha x);$$

lorsque  $| x |$  est  $< R$ ,  $| \alpha x |$  est  $< R | \alpha |$ , et l'on a encore

$$| \psi(\alpha x) | < \frac{\mu K}{| \alpha | - 1} + 2\mu = \mu \left\{ 2 + \frac{K}{| \alpha | - 1} \right\}.$$

Cela revient à dire que l'on a

$$(16) \quad | \psi(y) | < \mu \left\{ 2 + \frac{K}{| \alpha | - 1} \right\}$$

lorsque  $| y |$  est inférieur à  $R | \alpha |$ .

Cherchons encore une limite supérieure du module de  $\varphi'(x)$  et de  $\psi'(y)$ . La fonction  $\varphi'(x)$  a pour fonction majorante

$$\Phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \mu K}{R^n} x^{n-1},$$

et, par conséquent, si  $| x |$  est  $< \frac{R}{| \alpha |}$ ,

$$| \varphi'(x) | < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \mu K}{R | \alpha |^{n-1}} = \frac{\mu K}{R} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{| \alpha |^{n-1}} = \frac{\mu K}{R} \frac{| \alpha |^2}{(| \alpha | - 1)^2}.$$

D'autre part, on tire de l'une des relations écrites plus haut

$$\alpha \varphi'(\alpha x) = \varphi'(x) + F'_x(x, \alpha x) + \alpha F'_y(x, \alpha x) - \alpha F'_x(\alpha x, \alpha x) - \alpha F'_y(\alpha x, \alpha x),$$

où  $F'_y(x, \alpha x)$  représente la dérivée  $F'_y(x, y)$  où l'on aurait remplacé  $y$  par  $\alpha x$  après la différentiation.

Si l'on suppose  $|x| < \frac{R}{|\alpha|}$ ,  $|\alpha|x$  est  $< R$ , et les modules des fonctions  $F'_x(x, \alpha x)$ ,  $F'_x(\alpha x, \alpha x)$  sont inférieurs à  $\mu_1$ , ceux des fonctions  $F'_y(x, \alpha x)$ ,  $F'_y(\alpha x, \alpha x)$  inférieurs à  $\mu_2$ . On a donc, *pourvu que*  $|x|$  *soit*  $< |R|$ ,

$$|\varphi'(x)| < \frac{1}{|\alpha|} \left\{ \frac{\mu K}{R} \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha| - 1)^2} + |\alpha| (2\mu_2 + \mu_1) + \mu_1 \right\}$$

ou

$$(17) \quad |\varphi'(x)| < \frac{\mu K}{R} \frac{|\alpha|}{(|\alpha| - 1)^2} + 2\mu_2 + \mu_1 \frac{1 + |\alpha|}{|\alpha|}.$$

La fonction  $\psi'(x)$  admet de même pour fonction majorante la série

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \mu K}{R^n |\alpha|^n} x^{n-1}.$$

Si l'on suppose  $|x| < R$ , on aura donc

$$|\psi'(x)| < \frac{\mu K}{R} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{|\alpha|^n} = \frac{\mu K}{R} \frac{|\alpha|}{(|\alpha| - 1)^2}.$$

D'autre part, de la relation

$$\psi(\alpha x) = \psi(x) + F(x, x) - F(x, \alpha x)$$

on tire

$$\alpha \psi'(\alpha x) = \psi'(x) + F'_x(x, x) + F'_y(x, x) - F'_x(x, \alpha x) - \alpha F'_y(x, \alpha x).$$

Lorsque  $|x| < R$ ,  $|\alpha x|$  est  $< |\alpha|R$  et, par suite, *pour toutes les valeurs de y telles que*  $|y| < |\alpha|R$ , on a

$$|\psi'(y)| < \frac{1}{|\alpha|} \left\{ \frac{\mu K}{R} \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha| - 1)^2} + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_2 |\alpha| \right\}$$

ou

$$(18) \quad |\psi'(y)| < \frac{\mu K}{R} \frac{|\alpha|}{(|\alpha| - 1)^2} + \frac{2\mu_1}{|\alpha|} + \mu_2 \frac{1 + |\alpha|}{|\alpha|}.$$

La fonction  $z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$  est donc holomorphe dans le domaine  $\mathfrak{D}$  et l'on a, dans ce domaine,

$$|z| < \mu \left[ \tilde{z} + \frac{2K}{|\alpha| - 1} \right],$$

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < \frac{\mu K}{R} \frac{|\alpha|}{(|\alpha| - 1)^2} + 2\mu_2 + \mu_1 \left( 2 + \frac{1}{|\alpha|} \right),$$

$$\left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < \frac{\mu K}{R} \frac{|\alpha|}{(|\alpha| - 1)^2} + \frac{2\mu_1}{|\alpha|} + \mu_2 \left( 2 + \frac{1}{|\alpha|} \right).$$

Ces inégalités peuvent s'écrire sous forme abrégée

$$(19) \quad \begin{cases} |z| < A\mu, & \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < \frac{B\mu}{R} + C\mu_1 + D\mu_2, \\ & \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < E \frac{\mu}{R} + F\mu_1 + G\mu_2, \end{cases}$$

A, B, C, D, E, F, G étant des constantes positives dont on a trouvé l'expression, qui ne dépendent que de  $|\alpha|$  <sup>(1)</sup>.

6. Le second problème préliminaire que nous avons encore à traiter est le suivant :

*Soit  $f(x, y)$  une fonction holomorphe dans le domaine du point  $x = y = 0$ . Déterminer une intégrale de l'équation*

$$(20) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

*qui s'annule identiquement quand on y remplace  $y$  par  $x$ , ou par  $\alpha x$ ,  $\alpha$  étant une constante dont le module est plus grand que l'unité.*

Désignons toujours par  $\Omega(R)$  le domaine défini par les inégalités  $|x| < R$ ,  $|y| < |\alpha| R$ ; nous supposons que la fonction  $f(x, y)$  est holomorphe dans ce domaine et que  $|f(x, y)|$  reste inférieur à un nombre positif M pour tout point de  $\Omega$ . L'équation (20) admet l'intégrale particulière

$$(21) \quad F(x, y) = \int_0^x dx \int_0^y f(x, y) dy,$$

qui est holomorphe dans le même domaine et qui s'annule pour  $x = 0$ , quel que soit  $y$ , et pour  $y = 0$ , quel que soit  $x$ . De la formule (21) on tire

$$(22) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^y f(x, y) dy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^x f(x, y) dx.$$

(1) Lorsque  $\alpha$  est de la forme  $\alpha = e^{i\theta}$ , l'angle  $\theta$  étant incommensurable avec  $\pi$ , et tel que la limite de  $\sqrt[n]{\left| \sin \frac{n\theta}{2} \right|}$  soit l'unité pour  $n$  infini, les deux séries obtenues pour  $\varphi(x)$  et  $\psi(y)$  sont encore convergentes dans le cercle de rayon R, mais les formules qui donnent les limites supérieures de  $|\varphi(x)|$ ,  $|\varphi'(x)|$ ,  $|\psi(y)|$ ,  $|\psi'(y)|$  dans ce domaine deviennent illusoires.

Si le point  $(x, y)$  est situé dans un domaine  $\mathfrak{D}(r)$  défini par les inégalités  $|x| < r$ ,  $|y| < |\alpha| r$ , où  $r \leq R$ , on a dans ce domaine, d'après les formules (22),

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| < M |\alpha| r, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| < M r$$

et, par suite,

$$|F(x, y)| < M |\alpha| r^2.$$

Toute autre intégrale de l'équation (20) est donnée par la formule

$$(23) \quad z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

$\varphi(x)$  et  $\psi(y)$  étant des fonctions arbitraires, et il n'y a plus qu'à choisir ces fonctions de façon que l'intégrale ainsi obtenue s'annule identiquement quand on y remplace  $y$  par  $x$  ou par  $\alpha x$  : ce qui fait précisément l'objet du problème précédent. Nous avons vu comment on pouvait obtenir une intégrale satisfaisant à ces conditions, et holomorphe dans le même domaine  $\mathfrak{D}(R)$  que  $f(x, y)$ . Pour avoir une limite supérieure du module de cette intégrale  $z$  dans le domaine  $\mathfrak{D}(r)$ , ainsi que des modules des dérivées partielles  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , il suffira de remplacer, dans les formules (19),  $R$ ,  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  par  $r$ ,  $M|\alpha|r^2$ ,  $M|\alpha|r$ ,  $Mr$  respectivement. On aura donc, dans le domaine  $\mathfrak{D}(r)$ ,

$$(24) \quad |z| < MHr^2, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < MH_1 r, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < MH_2 r,$$

$H, H_1, H_2$  étant trois constantes positives qui ne dépendent que de  $|\alpha|$ .

7. Arrivons maintenant au problème qui est l'objet essentiel de cette étude.

Soient  $f(x, y, z, p, q)$  une fonction des cinq variables  $x, y, z, p, q$ , régulière dans le voisinage des valeurs  $x = y = z = p = q = 0$ , et  $\alpha$  une constante dont le module est supérieur à 1 ; trouver une intégrale de l'équation

$$(25) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

qui soit régulière dans le domaine du point  $x = y = 0$ , et qui s'annule identiquement quand on y remplace  $y$  par  $x$  ou par  $\alpha x$ .

Pour fixer les idées, supposons que la fonction  $f(x, y, z, p, q)$  soit holomorphe dans le domaine défini par les inégalités

$$|x| < R, \quad |y| < |\alpha| R, \quad |z| < Z, \quad |p| < P, \quad |q| < Q,$$

Fac. de T., 2<sup>e</sup> S., V.

$R, Z, P, Q$  étant des nombres positifs, et que dans ce domaine le module de  $f(x, y, z, p, q)$  reste plus petit qu'un nombre positif  $M$ . Posons  $z_0 = 0$ , et considérons les équations successives

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = f(x, y, 0, 0, 0), \\ \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}\right), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right), \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

en imposant à toutes les fonctions  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  la condition de s'annuler pour  $y = x$  et pour  $y = \alpha x$ . Supposons que dans le domaine  $\mathfrak{D}(R')$ , où  $R' \leq R$ , on ait

$$(27) \quad |z_{n-1}| < Z, \quad |p_{n-1}| < P, \quad |q_{n-1}| < Q,$$

alors la fonction

$$f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})$$

sera holomorphe dans ce domaine  $\mathfrak{D}(R')$ , et son module restera inférieur à  $M$ . Il s'ensuit que la fonction  $z_n$  sera elle-même holomorphe dans  $\mathfrak{D}(R')$ , et l'on aura dans ce domaine

$$|z_n| < MR'^2 H, \quad |p_n| < MR' H_1, \quad |q_n| < MR' H_2.$$

Si l'on a choisi  $R'$  assez petit pour que l'on ait à la fois

$$MR'^2 H < Z, \quad MR' H_1 < P, \quad MR' H_2 < Q,$$

la fonction  $z_n$  satisfera aux mêmes inégalités (27) que  $z_{n-1}$ ; on peut donc imaginer que l'on continue indéfiniment les opérations précédentes, et l'on obtient ainsi une suite indéfinie de fonctions

$$(28) \quad z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, \dots,$$

qui sont holomorphes dans le domaine  $\mathfrak{D}(R')$ , et qui s'annulent identiquement quand on remplace  $y$  par  $x$  ou par  $\alpha x$ . Chacune d'elles satisfait, dans le domaine  $\mathfrak{D}(R')$ , aux conditions

$$|z_i| < Z, \quad \left| \frac{\partial z_i}{\partial x} \right| < P, \quad \left| \frac{\partial z_i}{\partial y} \right| < Q.$$

Pour reconnaître si  $z_n$  tend vers une limite lorsque  $n$  augmente indéfiniment, il suffit d'examiner si la série

$$z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) + \dots$$

est convergente. Or on déduit des équations (26)

$$(29) \quad \frac{\partial^2(z_n - z_{n-1})}{\partial x \partial y} = f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2});$$

le second membre de cette formule est holomorphe dans le domaine  $\mathfrak{O}(R')$ , et il est facile de trouver une limite supérieure de son module. On peut, en effet, d'après le théorème des accroissements finis généralisé, trouver trois nombres positifs constants  $U, V, W$  tels que l'on ait

$$\begin{aligned} & |f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2})| \\ & \leq U |z_{n-1} - z_{n-2}| + V |p_{n-1} - p_{n-2}| + W |q_{n-1} - q_{n-2}|, \end{aligned}$$

lorsque  $x, y, z_{n-1}, z_{n-2}, p_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-1}, q_{n-2}$  satisfont respectivement aux inégalités

$$\begin{aligned} |x| & < R', & |y| & < R', & |z_{n-1}| & < Z, & |z_{n-2}| & < Z, \\ |p_{n-1}| & < P, & |p_{n-2}| & < P, & |q_{n-1}| & < Q, & |q_{n-2}| & < Q. \end{aligned}$$

Soit  $\pi_{n-1}$  une limite supérieure du module des trois différences  $z_{n-1} - z_{n-2}$ ,  $p_{n-1} - p_{n-2}$ ,  $q_{n-1} - q_{n-2}$  dans le domaine  $\mathfrak{O}(R')$ . D'après l'inégalité précédente, on a, dans le même domaine,

$$|f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2})| < (U + V + W) \pi_{n-1}.$$

Or, l'intégrale considérée  $z_n - z_{n-1}$  de l'équation auxiliaire (29) est nulle pour  $y = x$  et pour  $y = \alpha x$ . Il s'ensuit que dans un domaine  $\mathfrak{O}(r)$ , où  $r \leq R'$ , on a les inégalités

$$\begin{aligned} |z_n - z_{n-1}| & < (U + V + W) \pi_{n-1} r^2 H, \\ |p_n - p_{n-1}| & < (U + V + W) \pi_{n-1} r H_1, \\ |q_n - q_{n-1}| & < (U + V + W) \pi_{n-1} r H_2. \end{aligned}$$

Choisissons  $r$  assez petit pour que l'on ait

$$(U + V + W) r^2 H < \lambda, \quad (U + V + W) r H_1 < \lambda, \quad (U + V + W) r H_2 < \lambda,$$

$\lambda$  étant un nombre positif inférieur à l'unité. Alors, en désignant par  $\pi_n$  la limite supérieure des trois différences  $|z_n - z_{n-1}|$ ,  $|p_n - p_{n-1}|$ ,  $|q_n - q_{n-1}|$  pour un



point  $(x, y)$  du domaine  $\mathcal{D}(r)$ , on aura, d'après ce qui précède,

$$\pi_n < \lambda \pi_{n-1}$$

et, par suite,

$$|z_n - z_{n-1}| < \pi_1 \lambda^n, \quad |p_n - p_{n-1}| < \pi_1 \lambda^n, \quad |q_n - q_{n-1}| < \pi_1 \lambda^n,$$

$\pi_1$  étant le plus grand des trois nombres  $Z, P, Q$  définis plus haut. Il en résulte que les quatre séries

$$z_0 + (z_1 - z_0) + \dots + (z_n - z_{n-1}) + \dots,$$

$$p_0 + (p_1 - p_0) + \dots + (p_n - p_{n-1}) + \dots,$$

$$q_0 + (q_1 - q_0) + \dots + (q_n - q_{n-1}) + \dots,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + \dots + \left( \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} \right) + \dots,$$

sont uniformément convergentes dans le domaine  $\mathcal{D}(r)$ . Si  $\omega(x, y)$  est la somme de la première, les sommes des trois autres sont respectivement  $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$ .

La relation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right)$$

devient donc à la limite, quand on fait croître  $n$  indéfiniment,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}\right).$$

Cette fonction  $\omega(x, y)$  est holomorphe dans le domaine  $\mathcal{D}(r)$ , et elle s'annule quand on y remplace  $y$  par  $x$  ou par  $\alpha x$ , puisqu'il en est ainsi de tous les termes de la série

$$z_0 + (z_1 - z_0) + \dots + (z_n - z_{n-1}) + \dots;$$

elle satisfait donc à toutes les conditions de l'énoncé.

La solution de l'équation (25), dont on vient de démontrer l'existence, est développable en série entière, ordonnée suivant les puissances positives des variables  $x$  et  $y$ . On peut calculer les coefficients de ce développement par une méthode directe, sans passer par les fonctions intermédiaires  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ . On sait, en effet, que l'équation (25), jointe à celles que l'on en déduit par des différentiations successives, permet d'exprimer toutes les dérivées partielles  $p_{ik}$  (où  $i > 0, k > 0$ ) au moyen de  $x, y, z$  et des dérivées  $p_{n0}$  et  $p_{0n}$ , où  $n$  est au plus égal à  $i + k - 1$ . Supposons que l'on ait évalué les valeurs initiales pour  $x = y = 0$  de toutes les dérivées d'ordre inférieur à  $n$  de l'intégrale cherchée.

On connaîtra par là même les valeurs initiales des dérivées  $p_{n-1,1}$ ,  $p_{n-2,2}$ , ...,  $p_{1,n-1}$ . Pour calculer  $p_{n0}$  et  $p_{0n}$ , remarquons que le groupe des termes de degré  $n$  dans le développement de l'intégrale cherchée est égal à

$$\frac{1}{1.2 \dots n} \left\{ p_{n0} x^n + \frac{n}{1} p_{n-1,1} x^{n-1} y + \dots + p_{0n} y^n \right\},$$

et le coefficient de  $x^n$  doit être nul quand on y remplace  $y$  par  $x$  ou par  $\alpha x$ . On a donc deux équations de la forme

$$p_{n0} + p_{0n} = K, \quad p_{n0} + \alpha^n p_{0n} = K_1,$$

$K$  et  $K_1$  ne dépendant que des autres dérivées d'ordre  $n$ ,  $p_{n-1,1}$ ,  $p_{n-2,2}$ , ...,  $p_{1,n-1}$ . Puisque  $\alpha$  n'est pas racine de l'unité, on en déduira  $p_{n0}$  et  $p_{0n}$ . On pourra donc calculer de proche en proche, sans être jamais arrêté, les coefficients du développement.

Il est à remarquer que ce développement existe toujours, et qu'il est unique, pourvu que  $\alpha$  ne soit pas racine de l'unité, alors même que l'on aurait  $|\alpha| = 1$ . Mais la convergence n'est démontrée jusqu'ici que si l'on a  $|\alpha| > 1$ ; nous allons voir tout à l'heure qu'elle l'est aussi si  $|\alpha| < 1$ .

La démonstration de la convergence par la méthode habituelle des fonctions majorantes présenterait dans ce cas des difficultés spéciales, car les expressions des dérivées  $p_{0n}$ ,  $p_{n0}$  en fonction des précédentes ne s'obtiennent pas par des additions et des multiplications seulement. L'emploi des approximations successives nous a permis d'éviter ces difficultés.

8. Nous allons maintenant généraliser le résultat obtenu, en remplaçant les conditions limites considérées jusqu'ici par d'autres d'un caractère moins particulier. Tout d'abord, on peut se proposer de déterminer une intégrale de l'équation (25), régulière dans le domaine du point  $x = y = 0$ , et s'annulant identiquement quand on y remplace  $y$  par  $cx$  ou par  $c'x$ ,  $c$  et  $c'$  étant deux constantes telles que  $\left| \frac{c'}{c} \right|$  soit différent de l'unité. Supposons, pour fixer les idées,  $\left| \frac{c'}{c} \right| > 1$ ; si l'on fait le changement de variable  $cx = x'$ , l'équation (25) est remplacée par une équation de même forme et l'intégrale de la nouvelle équation doit s'annuler identiquement quand on y remplace  $y$  par  $x'$  ou par  $\frac{c'}{c} x'$ ; nous sommes donc ramenés au problème particulier qui a été traité.

Soit, en second lieu, à déterminer une intégrale de l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

courbes planes  $C, C_1$

$$C_1^1 y = \pi(x), \quad C_1^1 y' = \pi_1(x),$$

soient remplacées par deux lignes droites

$$C^1 y' = \gamma x', \quad C_1^1 y' = \gamma_1 x',$$

$\gamma, \gamma_1$  étant deux coefficients constants, tels que  $\left| \frac{\gamma}{\gamma_1} \right|$  soit différent de l'unité. On peut évidemment, sans diminuer la généralité, supposer  $\gamma_1 = 1$ .

Pour que la transformation (31) change la courbe  $C$  en la courbe  $C'$  et la courbe  $C_1$  en la courbe  $C_1'$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$(32) \quad \Phi(\pi(x)) = \gamma F(x), \quad \Phi(\pi_1(x)) = F(x),$$

et, par suite,

$$(33) \quad \Phi(\pi(x)) = \gamma \Phi(\pi_1(x)).$$

Cette dernière relation ne renferme plus qu'une fonction inconnue  $\Phi$ , puisque  $\pi(x)$  et  $\pi_1(x)$  sont des fonctions connues de  $x$ ; par hypothèse, ces deux fonctions sont développables en séries entières

$$\pi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$\pi_1(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots,$$

Les deux coefficients  $a_1$  et  $b_1$  n'étant pas nuls. Si nous posons  $\pi_1(x) = X$ , inversement  $x$  est une fonction holomorphe de  $X$  dans le voisinage de  $X = 0$ ,

$$x = \frac{1}{b_1} X + \alpha_2 X^2 + \dots,$$

et  $\pi(x)$  se change à son tour en une fonction holomorphe  $\omega(X)$

$$\omega(X) = \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_n X^n + \dots$$

Le premier coefficient  $\beta_1$  étant égal à  $\frac{a_1}{b_1}$ . La relation (33) prend la forme

$$(34) \quad \Phi(\omega(X)) = \gamma \Phi(X).$$

Nous voulons montrer que l'on peut satisfaire à cette relation en prenant pour  $\Phi(X)$  une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine

$$\Phi(X) = A_1 X + A_2 X^2 + \dots + A_n X^n + \dots,$$

holomorphe dans le domaine du point  $x = y = 0$ , se réduisant à une fonction donnée  $\varphi(x)$  quand on remplace  $y$  par  $cx$  et à une autre fonction donnée  $\psi(x)$  quand on remplace  $y$  par  $c'x$ .

Les deux fonctions  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  sont supposées holomorphes dans le voisinage de l'origine et satisfont à la condition  $\varphi(0) = \psi(0)$ ; et plus nous supposons, comme tout à l'heure, que  $\left|\frac{c'}{c}\right|$  est différent de l'unité, les valeurs  $z_0$ ,  $p_0$ ,  $q_0$  de l'intégrale cherchée et de ses dérivées partielles en  $x = y = 0$  sont fournies immédiatement par les relations

$$z_0 = \varphi(0), \quad p_0 + q_0 c = \psi'(0);$$

nous supposons que la fonction  $\varphi(x)$  est régulière dans le voisinage du système de valeurs

$$x = 0, \quad y = 0, \quad p = p_0, \quad q = q_0.$$

Cela étant, la fonction

$$Z = \frac{[\varphi(x) - \varphi(0)](y - c'x)}{(c - c')x} + c' \frac{\left[\psi\left(\frac{y}{c'}\right) - \psi(0)\right](y - cx)}{(c' - c)y} + \varphi(0)$$

est régulière dans le domaine de l'origine, et satisfait aux mêmes conditions que l'intégrale cherchée (1).

La transformation  $z = Z + u$  conduit à une équation de même forme que l'équation proposée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

où, d'après les hypothèses faites sur la fonction  $f(x, y, z, p, q)$ , le second membre  $F(x, y, u, u'_x, u'_y)$  est régulier dans le voisinage des valeurs

$$x = y = u = u'_x = u'_y = 0.$$

Il suffira encore de déterminer une intégrale holomorphe de la nouvelle équation, s'annulant identiquement quand on y remplace  $y$  par  $cx$  ou par  $c'x$ .

L'existence d'une intégrale de l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

(1) Il est clair qu'il y a une infinité d'autres fonctions possédant les mêmes propriétés, par exemple

$$\varphi\left(\frac{y - c'x}{c - c'}\right) + \psi\left(\frac{y - cx}{c' - c}\right) - \varphi(0).$$

satisfaisant aux conditions énoncées, sous les hypothèses admises, est donc établie. Pour calculer les coefficients du développement en série entière de cette intégrale, on procédera comme il a été expliqué plus haut. Il suffit de pouvoir calculer les valeurs initiales des dérivées  $p_{no}, p_{on}$ , au moyen des valeurs initiales des dérivées  $p_{ik}$  (où  $i + k \leq n - 1$ ). On a pour cela deux équations linéaires de la forme

$$p_{no} + c^n p_{on} = K, \quad p_{no} + c'^n p_{on} = K',$$

les seconds membres  $K, K'$  ne dépendant que des dérivées déjà calculées.

9. En langage géométrique, le problème le plus général résolu jusqu'ici peut s'énoncer comme il suit :

*Déterminer une surface intégrale de l'équation*

$$(30) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, p, q),$$

*connaissant les sections de cette surface par deux plans  $y = cx, y = c'x$ , passant par l'axe des  $z$ .*

La généralisation s'offre d'elle-même. Au lieu de deux courbes planes dont les plans passent par l'axe  $Oz$ , considérons deux courbes quelconques, ayant un point commun, et satisfaisant à certaines conditions qui vont être précisées, et proposons-nous de déterminer une surface intégrale de la même équation passant par ces deux courbes.

Soient

$$y = \pi(x), \quad z = \varphi(x)$$

les équations de l'une des courbes  $\Gamma$ ,

$$y = \pi_1(x), \quad z = \varphi_1(x)$$

les équations de la seconde courbe  $\Gamma_1$ . Nous supposons que les fonctions  $\pi(x), \varphi(x), \pi_1(x), \varphi_1(x)$  sont holomorphes dans le domaine de l'origine et s'annulent pour  $x = 0$ , que  $\pi'(0), \pi'_1(0)$  sont différents de zéro et que le module du rapport  $\frac{\pi'(0)}{\pi'_1(0)}$  n'est pas égal à un. La première hypothèse revient à prendre pour origine le point commun aux deux courbes  $\Gamma, \Gamma_1$ . Les dérivées  $\pi'(0), \pi'_1(0)$  représentent les coefficients angulaires des tangentes à l'origine aux projections  $C, C_1$  des deux courbes  $\Gamma, \Gamma_1$  sur le plan des  $xy$ . Nous supposons par conséquent qu'aucune de ces courbes  $C, C_1$  n'est tangente <sup>(1)</sup> à l'un des axes  $Ox, Oy$ ,

(1) Les cas où il en est ainsi ont déjà été traités.

et, en outre, que le module du rapport de ces coefficients angulaires est différent de l'unité. Le nouveau problème que l'on se propose peut alors s'énoncer ainsi :

*Déterminer une intégrale de l'équation (30), régulière dans le domaine de l'origine, se réduisant à  $\varphi(x)$  quand on y remplace  $y$  par  $\pi(x)$ , et à  $\varphi_1(x)$  quand on y remplace  $y$  par  $\pi_1(x)$ .*

L'existence de cette intégrale étant admise, les coefficients du développement en série entière peuvent encore être calculés de proche en proche. Soit

$$z = \sum a_{ik} x^i y^k$$

le développement cherché; on démontre comme plus haut que les coefficients  $a_{ik}$ , où  $i$  et  $k$  sont positifs, s'expriment au moyen des coefficients  $a_{10}, a_{01}, \dots, a_{n0}, a_{0n}$ ,  $n$  étant au plus égal à  $i + k - 1$ . Pour calculer les coefficients  $a_{n0}$  et  $a_{0n}$ , observons que quand on remplace  $y$  par  $\pi(x)$  le coefficient de  $x^n$  est

$$a_{n0} + a_{0n} [\pi'(0)]^n + \dots,$$

les termes non écrits étant connus, si l'on a déjà calculé les coefficients  $a_{10}, a_{01}, \dots, a_{n-1,0}, a_{0,n-1}$ . Le coefficient de  $x^n$ , après la substitution de  $\pi_1(x)$  à la place de  $y$ , est de même

$$a_{n0} + a_{0n} [\pi'_1(0)]^n + \dots$$

En identifiant ces coefficients aux coefficients de  $x^n$  dans  $\varphi(x)$  et  $\varphi_1(x)$  respectivement, on a deux équations linéaires qui donneront  $a_{n0}$  et  $a_{0n}$  au moyen des coefficients précédents. En particulier, les coefficients  $a_{10}, a_{01}$ , c'est-à-dire les valeurs des dérivées partielles  $p$  et  $q$  à l'origine, sont déterminés par les deux équations

$$a_{10} + a_{01} \pi'(0) = \varphi'(0), \quad a_{10} + a_{01} \pi'_1(0) = \varphi'_1(0).$$

Au lieu d'étudier directement la convergence de ce développement, nous montrerons que ce nouveau problème peut se ramener à celui qui précède.

Les transformations ponctuelles effectuées sur les variables  $x, y$ , qui changent l'équation (30) en une équation de même espèce, sont de l'une des formes

$$(31) \quad \begin{cases} x' = F(x), \\ y' = \Phi(y), \end{cases} \quad \begin{cases} x' = F(y), \\ y' = \Phi(x), \end{cases}$$

la seconde se déduisant de la première par l'échange des variables  $x', y'$ . Cherchons s'il est possible de déterminer les fonctions  $F(x), \Phi(y)$  de façon que les deux

courbes planes  $C, C_1$

$$C \{ y = \pi(x), \quad C_1 \{ y = \pi_1(x),$$

soient remplacées par deux lignes droites

$$C' \{ y' = \gamma x', \quad C'_1 \{ y' = \gamma_1 x',$$

$\gamma, \gamma_1$  étant deux coefficients constants, tels que  $\left| \frac{\gamma}{\gamma_1} \right|$  soit différent de l'unité. On peut évidemment, sans diminuer la généralité, supposer  $\gamma_1 = 1$ .

Pour que la transformation (31) change la courbe  $C$  en la courbe  $C'$  et la courbe  $C_1$  en la courbe  $C'_1$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$(32) \quad \Phi(\pi(x)) = \gamma F(x), \quad \Phi(\pi_1(x)) = F(x),$$

et, par suite,

$$(33) \quad \Phi(\pi(x)) = \gamma \Phi(\pi_1(x)).$$

Cette dernière relation ne renferme plus qu'une fonction inconnue  $\Phi$ , puisque  $\pi(x)$  et  $\pi_1(x)$  sont des fonctions connues de  $x$ ; par hypothèse, ces deux fonctions sont développables en séries entières

$$\pi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$\pi_1(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots,$$

les deux coefficients  $a_1$  et  $b_1$  n'étant pas nuls. Si nous posons  $\pi_1(x) = X$ , inversement  $x$  est une fonction holomorphe de  $X$  dans le voisinage de  $X = 0$ ,

$$x = \frac{1}{b_1} X + \alpha_2 X^2 + \dots,$$

et  $\pi(x)$  se change à son tour en une fonction holomorphe  $\omega(X)$

$$\omega(X) = \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_n X^n + \dots$$

le premier coefficient  $\beta_1$  étant égal à  $\frac{a_1}{b_1}$ . La relation (33) prend la forme

$$(34) \quad \Phi(\omega(X)) = \gamma \Phi(X).$$

Nous voulons montrer que l'on peut satisfaire à cette relation en prenant pour  $\Phi(X)$  une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine

$$\Phi(X) = A_1 X + A_2 X^2 + \dots + A_n X^n + \dots,$$

le coefficient  $A_1$  n'étant pas nul. En remplaçant  $X$  par  $\omega(X)$  dans cette série et en identifiant les deux membres de la relation (34), on a d'abord

$$A_1 \beta_1 = \gamma A_1,$$

ce qui montre que le problème n'est possible que si l'on suppose  $\gamma = \beta_1 = \frac{a_1}{b_1}$ . Ayant pris pour  $\gamma$  cette valeur, le coefficient  $A_1$  est indéterminé; nous prendrons  $A_1 = 1$ .

Le coefficient de  $X^n$  dans le second membre de la relation (34) est  $\gamma A_n$ , et, dans le premier membre, il est égal à

$$A_n \gamma^n + P_n(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

$P$  désignant un polynôme dont tous les coefficients sont réels et positifs. On a donc la relation

$$(35) \quad A_n(\gamma - \gamma^n) = P_n(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Par hypothèse,  $\gamma$  ou  $\frac{a_1}{b_1}$  a son module différent de l'unité. On pourra donc calculer de proche en proche les coefficients  $A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$  et former une série entière qui satisfait à la relation proposée (34) pourvu qu'elle soit convergente.

La convergence se démontre par la méthode habituelle des fonctions majorantes. Nous pouvons supposer  $|a_1| < |b_1|$ , c'est-à-dire  $|\gamma| = \rho < 1$ . Cela étant, on a, quel que soit  $n$ ,

$$|\beta| \leq |\beta|^n + |\beta - \beta^n|$$

ou

$$|\beta - \beta^n| \geq \rho - \rho^n$$

et, par suite,

$$\frac{1}{|\beta - \beta^n|} \leq \frac{1}{\rho - \rho^n}.$$

Si nous remplaçons, dans la relation (34),  $\gamma$  par  $\rho$  et  $\omega(X)$  par une fonction majorante de la forme

$$\frac{\rho X}{1 - \alpha X},$$

$\alpha$  étant réel et positif, on obtient une équation de même forme

$$(34) \text{ bis} \quad F\left(\frac{\rho X}{1 - \alpha X}\right) = \rho F(X),$$

et si l'on cherche à satisfaire à cette relation par une fonction holomorphe

$$F(X) = X + B_1 X^2 + \dots + B_n X^n + \dots,$$



on obtiendra pour les coefficients  $B_n$  des nombres réels et positifs qui, d'après la façon même dont on les obtient, seront supérieurs aux modules des coefficients correspondants de la première série. Or, cette nouvelle série est convergente, car l'équation (34) *bis* admet la solution holomorphe

$$F(X) = \frac{X}{1 - \frac{aX}{1-\rho}}.$$

En remontant aux relations (32), on voit que l'on peut satisfaire à ces relations par des fonctions  $F(x)$ ,  $\Phi(x)$ , holomorphes dans le domaine de l'origine, s'annulant pour  $x=0$ , et dont les dérivées  $F'(0)$ ,  $\Phi'(0)$  ne sont pas nulles. Les fonctions  $F$  et  $\Phi$  étant déterminées de cette façon, inversement  $x$  et  $y$  sont des fonctions holomorphes des variables

$$x' = F(x), \quad y' = \Phi(y),$$

et l'équation proposée se change en une équation de même forme

$$(36) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} = f_1 \left( x', y', z, \frac{\partial z}{\partial x'}, \frac{\partial z}{\partial y'} \right).$$

Quant aux nouvelles conditions initiales, il est bien facile de les énoncer. Soient  $\psi(x')$  et  $\psi_1(x')$  ce que deviennent les fonctions  $\varphi(x)$  et  $\varphi_1(x)$  quand on remplace  $x$  par son expression en fonction de la nouvelle variable  $x'$ . L'intégrale de l'équation (36), qui correspond à l'intégrale cherchée de l'équation (30), doit se réduire à  $\psi(x')$  quand on y remplace  $y'$  par  $\gamma x'$  et à  $\psi_1(x')$  quand on y remplace  $y'$  par  $x'$ . Nous sommes donc ramenés à l'un des problèmes traités précédemment, et la convergence du développement obtenu est assurée dans un certain domaine autour de l'origine, sous les conditions habituelles sur lesquelles nous ne reviendrons pas.

10. Les résultats précédents peuvent être étendus aux équations plus générales

$$(37) \quad A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, p, q),$$

$A, B, C$  étant des fonctions des deux variables  $x, y$ . On sait, en effet, que l'on peut ramener ces équations à la forme simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} = F \left( X, Y, z, \frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y} \right)$$

par une transformation ponctuelle

$$(38) \quad X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

$X$  et  $Y$  étant les variables caractéristiques. Nous avons toujours supposé dans ce qui précède que le module du rapport  $\frac{a_1}{b_1}$  était différent de l'unité. Pour savoir ce que devient cette condition quand on fait subir aux variables  $x$  et  $y$  une transformation ponctuelle de la forme (38), observons que  $a_1$  et  $b_1$  représentent les coefficients angulaires des tangentes aux projections des deux courbes données  $\Gamma, \Gamma_1$  sur le plan des  $xy$ , tandis que les coefficients angulaires des tangentes aux directions caractéristiques issues de l'origine sont 0 et  $+\infty$ . Le rapport  $\frac{a_1}{b_1}$  est donc égal au rapport anharmonique de ces quatre droites. Comme ce rapport anharmonique se conserve dans toute transformation ponctuelle de la forme (38), on peut énoncer la proposition générale suivante :

*Deux courbes  $\Gamma, \Gamma_1$  ayant un point commun  $O$ , et non tangentes en ce point, déterminent une intégrale et une seule de l'équation (37), pourvu que le rapport anharmonique des tangentes à ces deux courbes, et des tangentes aux deux caractéristiques issues du point  $O$  dans l'élément qu'elles déterminent, ait un module différent de l'unité.*

41. Appliquons ce résultat au cas où les courbes données sont réelles, et où les coefficients  $A, B, C$  de l'équation (37) ont des valeurs réelles pour les valeurs réelles des variables  $x, y$ , au moins dans un certain domaine. Nous avons deux cas à distinguer, suivant que les caractéristiques sont réelles ou imaginaires.

Si les caractéristiques sont réelles, le rapport anharmonique des quatre droites est réel; le module de ce rapport ne peut être égal à l'unité que si le rapport lui-même est égal à  $\pm 1$ . Il n'y a donc que deux cas exceptionnels où l'énoncé général est en défaut : 1° le cas où les deux courbes données  $\Gamma, \Gamma_1$  sont tangentes; 2° le cas où les tangentes à ces deux courbes forment avec les tangentes aux caractéristiques une division harmonique.

Il n'en est plus de même si les caractéristiques sont imaginaires; dans ce cas, en effet, les coefficients angulaires des tangentes aux deux caractéristiques qui passent par un point sont imaginaires conjuguées, puisque  $A, B, C$  sont réels. Les courbes données  $\Gamma, \Gamma_1$  étant réelles, le rapport anharmonique considéré est le quotient de deux imaginaires conjuguées; son module est égal à l'unité. Nous sommes donc toujours dans un cas exceptionnel. On voit donc que, si l'on suppose les courbes données réelles, le résultat obtenu n'est vraiment complet que pour les équations du type *hyperbolique*. Pour les équations du type *elliptique*, on est, au contraire, dans un cas d'exception où les méthodes précédentes sont insuffisantes pour décider de la convergence des séries obtenues. L'étude qui a été faite nous apprend seulement que deux circonstances tout à fait différentes peuvent se présenter. Si le rapport anharmonique en question est racine de l'unité, les équations

tions qui déterminent les coefficients du développement de l'intégrale cherchée deviennent périodiquement incompatibles ou indéterminées. Au contraire, si ce rapport anharmonique n'est pas racine de l'unité, il ne peut y avoir qu'une intégrale holomorphe répondant à la question, mais la série obtenue n'est pas toujours convergente comme dans les cas déjà examinés.

12. Prenons, par exemple, l'équation de Laplace

$$(39) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

et soit à déterminer une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine, se réduisant à une fonction donnée  $\varphi(x)$  quand on y remplace  $y$  par  $mx$ , et à une autre fonction donnée  $\varphi_1(x)$  quand on y remplace  $y$  par  $m_1x$ , les deux fonctions  $\varphi(x)$  et  $\varphi_1(x)$  étant nulles pour  $x = 0$ , et holomorphes dans le domaine de ce point.

Les coefficients angulaires des tangentes caractéristiques sont dans ce cas  $+i$  et  $-i$ ; le rapport anharmonique  $r$  des quatre droites a donc pour expression

$$r = \frac{m-i}{m+i} : \frac{m_1-i}{m_1+i} = \frac{mm_1+1+i(m-m_1)}{mm_1+1-i(m-m_1)},$$

ou encore

$$r = \frac{1+i \operatorname{tang} \theta}{1-i \operatorname{tang} \theta} = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \theta + 2i \operatorname{tang} \theta}{1 + \operatorname{tang}^2 \theta},$$

$\theta$  étant l'angle des deux droites  $y = mx$ ,  $y = m_1x$ . Soit  $\alpha$  l'argument de  $r$ ; on déduit de la formule précédente

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \theta}{1 - \operatorname{tang}^2 \theta} = \operatorname{tang} 2\theta$$

et, par suite,  $\alpha = 2\theta$ . Pour que  $r$  soit racine de l'unité, il faut et il suffit que l'angle  $\theta$  soit commensurable avec  $\pi$ . Dans ce cas, il est facile de vérifier que le problème est impossible ou indéterminé, tandis qu'il ne peut admettre plus d'une solution, si  $\frac{\theta}{\pi}$  est incommensurable.

Supposons que l'on ait fait tourner les axes autour de l'origine de façon que l'axe des  $x$  vienne coïncider avec la droite  $y = mx$ ; la droite  $y = m_1x$  aura pour équation, dans ce nouveau système d'axes,

$$y = x \operatorname{tang} \theta;$$

et l'équation (39) ne change pas de forme.

Le problème revient à déterminer une intégrale, holomorphe dans le domaine de l'origine, se réduisant, pour  $y = 0$ , à une fonction donnée  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n,$$

et, pour  $y = x \tan \theta$ , à une fonction donnée  $\psi(r)$ , où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$\psi(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n r^n.$$

La solution cherchée peut s'écrire, en employant les coordonnées polaires  $\rho, \omega$ ,

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} \{ c_n \rho^n \cos n\omega + d_n \rho^n \sin n\omega \}.$$

Pour  $\omega = 0$ , on a  $\rho = x$ , et la série se réduit à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n;$$

on doit donc avoir  $c_n = a_n$ . Pour  $\omega = \theta$ ,  $\rho$  est égal à  $r$ ; on doit donc avoir

$$a_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta = b_n.$$

Lorsque  $\frac{\theta}{\pi}$  est égal à une fraction irréductible  $\frac{p}{q}$ ,  $\sin n\theta$  est nul, toutes les fois que  $n$  est un multiple de  $q$ , et dans ce cas seulement. Pour que le problème soit possible, il faut donc que l'on ait  $b_n = a_n \cos n\theta$ , lorsque  $n$  est un multiple de  $q$ . Si cette condition est remplie, les coefficients  $d_q, d_{2q}, \dots, d_{mq}, \dots$  restent arbitraires.

La série obtenue, en supposant nuls tous ces coefficients, est convergente dans le domaine de l'origine, car la valeur absolue de  $\sin n\theta$  reste supérieure à un nombre fixe positif, lorsque  $n$  n'est pas un multiple de  $q$ . En ajoutant à cette intégrale une série quelconque de la forme

$$g_1 \rho^q \sin q\omega + g_2 \rho^{2q} \sin(2q\omega) + \dots + g_\nu \rho^{\nu q} \sin(\nu q\omega) + \dots,$$

pourvu qu'elle soit convergente, on obtient encore une intégrale holomorphe répondant à la question. Le problème proposé est donc impossible ou indéterminé, lorsque  $\frac{\theta}{\pi}$  est un nombre rationnel.

Supposons, au contraire, que  $\frac{\theta}{\pi}$  soit un nombre irrationnel. Il ne peut y avoir plus d'une intégrale répondant à la question, et cette intégrale, si elle existe, est représentée par la série

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rho^n \cos n\omega + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n - a_n \cos n\theta}{\sin n\theta} \rho^n \sin n\omega.$$

La première série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rho^n \cos n\omega$$

peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (s^n + s_0^n),$$

en posant  $s = x + iy$ ,  $s_0 = x - iy$ , et représente une fonction holomorphe des variables  $x$  et  $y$  dans le domaine de l'origine, si la série  $\varphi(x)$  a un rayon de convergence différent de zéro, comme nous le supposons.

On peut écrire aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n - a_n \cos n\theta}{\sin n\theta} \rho^n \sin n\omega = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n - a_n \cos n\theta}{\sin n\theta} (s^n - s_0^n);$$

lorsque  $\frac{\theta}{\pi}$  est un nombre algébrique, ou un nombre transcendant tel que  $\sqrt[n]{|\sin n\theta|}$  ait pour limite l'unité, la série du second membre représente aussi une fonction holomorphe des variables  $x$  et  $y$  dans le domaine de l'origine, puisque nous supposons que la série  $\psi(r)$  a aussi un rayon de convergence différent de zéro. Mais lorsque  $\frac{\theta}{\pi}$  est un nombre transcendant tel que la plus petite limite de  $\sqrt[n]{|\sin n\theta|}$  soit zéro, on ne peut plus rien affirmer sans une étude particulière du numérateur  $b_n - a_n \cos n\theta$ .

Supposons, par exemple,  $a_n = 0$ ,  $b_n = 1$ . La série considérée se réduit à

$$\sum \frac{\rho^n \sin n\omega}{\sin n\theta} = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n - s_0^n}{\sin n\theta}.$$

La série  $\sum \frac{s^n}{\sin n\theta}$  est divergente, sauf pour  $s = 0$ , lorsque la plus petite limite de  $\sqrt[n]{|\sin n\theta|}$  est égale à zéro. L'équation de Laplace n'admet donc pas d'intégrale holo-

morphe se réduisant à zéro pour  $y=0$  et à  $\frac{1}{1-r}$  pour  $y=x \operatorname{tang} \theta$  ( $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ), lorsque le rapport  $\frac{\theta}{\pi}$  est un de ces nombres transcendants qui ont été définis plus haut (n° 3).

*Remarque.* — Il est à remarquer que, dans ce cas, la série

$$F(\rho, \omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n \sin n\omega}{\sin n\theta}$$

est cependant convergente pour des valeurs positives de  $\rho$ , en choisissant convenablement l'angle  $\omega$ . Posons en effet  $\omega = k\theta$ ,  $k$  étant entier, on a

$$\frac{\sin(nk\theta)}{\sin n\theta} = P(\sin n\theta, \cos n\theta),$$

$P$  étant un polynome en  $\sin n\theta$ ,  $\cos n\theta$ , de degré  $k-1$ , à coefficients entiers. La valeur absolue de ce polynome reste inférieure à un nombre fixe  $M$ , quel que soit le nombre entier  $n$ , car les coefficients de  $P$  ne dépendent pas de  $n$ . La série  $F(\rho, \omega)$  est donc convergente pour  $\omega = k\theta$ ,  $|\rho| < 1$ . En d'autres termes, si l'on mène par l'origine une droite faisant un angle  $k\theta$  avec l'axe  $ox$ , la série  $F(\rho, \omega)$  est convergente en tous les points de cette droite dont la distance à l'origine est inférieure à l'unité. Dans un angle quelconque ayant pour sommet l'origine, il y a toujours une infinité de ces droites, puisque le rapport  $\frac{\theta}{\pi}$  est incommensurable.

Au contraire, si  $\frac{\omega}{\pi}$  est un nombre algébrique,  $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$  a pour limite l'unité, et la série  $F(\rho, \omega)$  est divergente sauf pour  $\rho = 0$ . Sur une droite passant par l'origine et faisant avec l'axe  $ox$  un angle  $\omega$  tel que  $\frac{\omega}{\pi}$  soit un nombre algébrique, la série est donc divergente, sauf à l'origine. Il y a encore une infinité de droites de cette espèce dans tout angle ayant l'origine pour sommet. On voit donc que dans un angle, aussi petit qu'il soit, ayant son sommet à l'origine, il y a toujours une infinité de rayons sur lesquels la série est partout divergente, et une infinité de rayons sur lesquels la série est convergente, tant que la distance du point à l'origine est inférieure à l'unité.



---

SUR  
QUELQUES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES  
DU SECOND ORDRE,

PAR M. J. CLAIRIN,  
Maitre de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

---

Le problème que je me propose d'étudier dans ce travail est très particulier ; il m'a cependant semblé utile d'indiquer les résultats auxquels je suis parvenu. La théorie générale des transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre présente de nombreuses difficultés, la considération d'exemples intéressants peut rendre de très grands services.

Les transformations de Bäcklund permettent, dans certains cas, de remplacer une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes par une équation plus simple, dont l'étude soit plus aisée. Il est naturel tout d'abord de rechercher quelles sont les équations dont les transformées sont des équations linéaires : dans ce qui suit j'indiquerai quelques équations qui jouissent de cette propriété.

Soient

$$(\varepsilon) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

$$(\varepsilon_1) \quad F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0$$

deux équations aux dérivées partielles du second ordre écrites avec les notations ordinaires : dans la première  $x, y$  désignent les variables indépendantes,  $z$  représente la fonction inconnue, dont les dérivées premières prises respectivement par rapport à  $x$  et à  $y$  sont  $p$  et  $q$  ; on a, en outre,

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

dans la deuxième équation les lettres affectées d'un indice désignent des quantités analogues.

Supposons qu'il existe une transformation de Bäcklund <sup>(1)</sup> de deuxième espèce qui permette de passer de  $(\epsilon)$  à  $(\epsilon_1)$  et inversement, la transformation faisant correspondre à une intégrale de  $(\epsilon_1)$  une infinité d'intégrales de  $(\epsilon)$ , tandis qu'à une intégrale de  $(\epsilon)$  il ne correspond qu'une intégrale de  $(\epsilon_1)$ . S'il existe un invariant du premier ordre pour chacun des systèmes de caractéristiques de  $(\epsilon_1)$ , chacun des deux systèmes de caractéristiques de  $(\epsilon)$  possédera un invariant du premier ordre ou l'un d'entre eux seulement possédera un invariant du premier ordre, l'autre possédant un invariant du second ordre <sup>(2)</sup>. En particulier, si l'équation  $(\epsilon_1)$  est linéaire, on peut toujours supposer qu'elle soit mise sous la forme

$$s_1 = ap_1 + bz_1,$$

les deux systèmes de caractéristiques admettant respectivement les invariants  $x_1, y_1$ . A ces invariants correspondent deux invariants des systèmes de caractéristiques de  $(\epsilon)$  dont l'un au moins est du premier ordre; nous allons étudier le cas où ces deux invariants sont du premier ordre. Si l'on effectue une transformation de contact convenable, ces invariants deviennent égaux à  $x$  et  $y$ ; dans ce cas, on peut imaginer que deux des équations qui définissent la transformation sont

$$x_1 = x, \quad y_1 = y;$$

nous n'écrirons nulle part ces équations pour abréger un peu.

1. Les équations qui déterminent la transformation  $(B_2)$  par laquelle on peut passer de  $(\epsilon)$  à  $(\epsilon_1)$  sont résolubles par rapport à  $p$  et  $q$ ; elles deviennent, si l'on imagine la résolution effectuée,

$$\begin{aligned} p &= f(x, y, z; p_1, q_1, z_1), \\ q &= \varphi(x, y, z; p_1, q_1, z_1). \end{aligned}$$

Puisque la transformation ne fait correspondre à une intégrale de  $(\epsilon)$  qu'une intégrale de  $(\epsilon_1)$ , ces équations ne sont pas résolubles par rapport à  $p_1$  et  $q_1$ ; d'ailleurs, par hypothèse, en écrivant que les dérivées de  $p$  par rapport à  $y$  et de  $q$  par rapport à  $x$  sont égales, on doit trouver l'équation linéaire  $(\epsilon_1)$ , c'est-à-dire une équation qui ne contient pas  $q_1$ ,  $r_1$  ni  $t_1$ . Ces remarques montrent immédiatement que, en dehors de  $x, y, z$ ,  $f$  ne peut dépendre que de  $p_1$  et  $\varphi$  que de  $z_1$ , en excluant naturellement le cas où  $f$  serait une fonction de  $x, y, z, z_1$  et  $\varphi$  une fonction de  $x, y, z, q_1$  qui se déduit du précédent en permutant  $x$  et  $y$  ainsi que  $x_1$  et  $y_1$ .

<sup>(1)</sup> J'ai étudié ces transformations et en particulier indiqué leur classification dans ma Thèse (*Annales de l'École normale supérieure*, t. XIX, Suppl.; 1902).

<sup>(2)</sup> Thèse, n° 18.



Cela posé, écrivons les équations de la transformation

$$\begin{aligned} p &= f(x, y, z, p_1), \\ q &= \varphi(x, y, z, z_1); \end{aligned}$$

la condition

$$\frac{df}{dy} = \frac{d\varphi}{dx}$$

équivalent à l'équation linéaire  $(\varepsilon_1)$  si l'on a identiquement

$$(1) \quad \Omega(x, y, z, z_1, p_1) = \frac{\partial f}{\partial p_1} (ap_1 + bz_1) + \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - f \frac{\partial \varphi}{\partial z} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = 0.$$

Par des dérivations successives, on trouve les équations

$$(2) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = b \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z_1} - f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z_1} - p_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial p_1} = b \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z_1} - f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z_1} - p_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial^3 \Omega}{\partial z_1^2 \partial p_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial z_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial^4 \Omega}{\partial z_1^3 \partial p_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z_1} = 0.$$

2. Plusieurs cas sont à distinguer : si  $\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}$  n'est pas nul, non plus que  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}$ , c'est-à-dire si  $f$  n'est pas une fonction linéaire de  $p_1$  et si  $\varphi$  n'est pas une fonction linéaire de  $z_1$ , la dernière équation peut s'écrire

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_1^2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z_1^2}}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}} = \frac{\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z}}{H(x, y, z)}.$$

On tire de là

$$\begin{aligned} f(x, y, z, p_1) &= H(x, y, z) g(x, y, p_1) + l(x, y, z) p_1 + m(x, y, z), \\ \varphi(x, y, z, z_1) &= H(x, y, z) \theta(x, y, z_1) + \lambda(x, y, z) z_1 + \mu(x, y, z); \end{aligned}$$

on peut toujours supposer que  $H$  se réduise à l'unité, car on retrouve ce cas particulier si l'on fait un changement de variable défini par l'équation

$$dZ = \frac{dz}{H(x, y, z)}.$$

Cette opération étant supposée faite <sup>(1)</sup> remplaçons dans l'équation (5)  $f$  et  $\varphi$  par les valeurs indiquées, nous trouvons

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_1^2} \frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_1^2} = 0.$$

Si  $l$  n'est pas une fonction de  $x, y$  seulement, l'équation précédente donne

$$\begin{aligned} l &= u(x, y)z, \\ \theta &= \omega(x, y)e^{u(x, y)z}, \end{aligned}$$

en n'écrivant, comme nous le ferons constamment dans la suite, que les termes utiles. L'équation (7), par exemple, ne définit  $\theta$  qu'à une fonction linéaire de  $z$ , près, mais il suffit de changer  $\lambda$  et  $\mu$  et l'on peut supposer cette fonction nulle.

Remplaçons dans l'équation (4)  $f$  et  $\varphi$  par leurs valeurs, après avoir remarqué qu'il est toujours permis de supposer  $\omega$  égale à 1,

$$\begin{aligned} f &= g(x, y, p_1) + u(x, y)z p_1 + m(x, y, z), \\ \varphi &= e^{u(x, y)z} + \lambda(x, y, z)z_1 + \mu(x, y, z), \end{aligned}$$

nous aurons la condition

$$u^2 \frac{\partial m}{\partial z} - 2u \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 z_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

de laquelle on déduit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial z} = 0.$$

$u$  sera donc une fonction de  $y$  seulement que nous représenterons par  $Y$  <sup>(2)</sup>;  $m$  ne dépendant pas de  $z$  peut être supposée nulle. Prenons comme nouvelle fonction inconnue  $Yz_1$ , cela revient à remplacer  $Y$  par l'unité dans les expressions de  $f$  et  $\varphi$  qui se réduisent à

$$\begin{aligned} f &= g(x, y, p_1) + z p_1, \\ \varphi &= e^{z_1} + \lambda(x, y, z)z_1 + \mu(x, y, z). \end{aligned}$$

(1) Il serait trop compliqué de prendre de nouvelles lettres après chacun des changements de variables que nous aurons à effectuer. Nous conserverons les notations indiquées au commencement.

(2) Nous désignerons toujours par  $X, Y$ , ou par ces lettres affectées d'indices, des fonctions qui ne dépendent, la première que de  $x$ , la seconde que de  $y$ . Nous emploierons la notation de Lagrange pour représenter les dérivées de ces fonctions.

L'équation (3) devient

$$b \frac{\partial^2 g}{\partial p_1^2} + \lambda - \left( \frac{\partial g}{\partial p_1} + z \right) \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0.$$

En prenant la dérivée du premier membre par rapport à  $z$ , on trouve que  $\lambda$  doit être égale à une fonction linéaire de  $z$ :  $\rho(x, y)z + \sigma(x, y)$ . Nous avons donc, si  $\rho$  n'est pas nul,

$$(8) \quad \begin{cases} f = g(x, y, p_1) + zp_1, \\ \varphi = e^z + \rho(x, y) \left[ z + \frac{\sigma(x, y)}{\rho(x, y)} \right] z_1 + \mu(x, y, z); \end{cases}$$

nous prendrons, au lieu de  $z$ ,  $z + \frac{\sigma}{\rho}$  pour fonction inconnue, ce qui revient à supposer que  $\sigma$  est nulle.

Ecrivons maintenant que  $f$  et  $\varphi$  satisfont à l'équation (2)

$$b \left( \frac{\partial g}{\partial p_1} + z \right) - \rho g - z \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

cette équation exige que l'on ait

$$b = \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{\frac{\partial g}{\partial p_1}}{g} = \frac{\rho}{b} = A(x, y).$$

On en déduit

$$g = B(x, y) e^{A p_1},$$

Développons l'équation (1) en remplaçant  $f$  et  $\varphi$  par leurs expressions, nous trouvons

$$(9) \quad \begin{aligned} (AB e^{A p_1} + z) a p_1 + \frac{\partial B}{\partial y} e^{A p_1} + p_1 B \frac{\partial A}{\partial y} e^{A p_1} \\ + p_1 \mu - \rho z p_1 - \frac{\partial \mu}{\partial x} - B e^{A p_1} \frac{\partial \mu}{\partial z} - p_1 z \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

En annulant les coefficients de  $p_1 e^{A p_1}$  et  $e^{A p_1}$  nous obtenons les conditions

$$(10) \quad A a + \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = B \frac{\partial \mu}{\partial z},$$

nous voyons que  $\mu$  est une fonction linéaire de  $z$  et il reste l'équation

$$a p_1 z + p_1 \mu - \rho p_1 z - p_1 z \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0.$$

En développant on aperçoit immédiatement que  $\mu$  ne contient pas  $x$  et ne renferme pas de terme indépendant de  $z$ ; on pourra donc écrire, en tenant compte en outre de la deuxième équation (10),

$$\mu = \frac{Y'}{Y} z, \quad B = XY.$$

Nous prendrons pour fonction inconnue  $\bar{z}$  au lieu de  $z$  et pour variables indépendantes  $\int X dx$  et  $\int \frac{dy}{Y}$  au lieu de  $x$  et de  $y$ , les équations de la transformation ( $B_2$ ) se réduisent à

$$\begin{aligned} p &= e^{\Lambda(x,y)p_1} + z p_1, \\ q &= e^{\bar{z}_1} + \rho(x,y) z z_1. \end{aligned}$$

Pour que  $z_1$  satisfasse à une équation linéaire il faut et il suffit que l'on ait

$$\Lambda \rho + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0, \quad \Lambda \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho = 0.$$

On peut obtenir ces conditions en écrivant les équations trouvées dans le cours de la discussion précédente et non utilisées, ou directement en considérant les équations de la transformation telles qu'elles viennent d'être écrites. On satisfera à ces conditions en posant

$$\Lambda = -\frac{X+Y}{X'}, \quad \rho = -\frac{Y'}{X+Y}.$$

Les équations de la transformation sont donc

$$(11) \quad \begin{cases} p = e^{-\frac{X+Y}{X'} p_1} + z p_1, \\ q = e^{\bar{z}_1} - \frac{Y'}{X+Y} z z_1, \end{cases}$$

l'équation qui donne  $z_1$  étant

$$(12) \quad z_1 + \frac{Y'}{X+Y} p_1 - \frac{X' Y'}{(X+Y)^2} z_1 = 0.$$

L'intégrale générale de cette dernière équation peut être déterminée sans difficulté :

$$z_1 = \frac{X_0 + Y_0}{X+Y} - \frac{Y'_0}{Y},$$

$X_0$  représentant une fonction quelconque de  $x$  et  $Y_0$  une fonction quelconque

de  $y$ . Remplaçons  $z_1$  par  $z_1 + \frac{X_0 + Y_0}{X + Y} - \frac{Y'_0}{Y'}$  et  $z$  par  $e^{z + \frac{X_0 + Y_0}{X + Y}}$ ,  $X_0$  et  $Y_0$  étant définies par les conditions

$$X' e^{\frac{X_0}{X_0}} = 1, \quad Y' e^{\frac{Y_0}{Y_0}} = 1,$$

et prenons pour variables indépendantes —  $X$ , —  $Y$ , les équations (11) et (12) deviennent

$$(11)' \quad \begin{cases} p = -e^{-(x+y)p_1-z} + p_1, \\ q = -e^{z_1-z} - \frac{z_1}{(x+y)}, \end{cases}$$

$$(12)' \quad z_1 + \frac{p_1}{x+y} - \frac{z_1}{(x+y)^2} = 0.$$

Reste à trouver l'équation correspondante. Remarquons que si l'on pose  $z - z_1 = \zeta$  et si l'on remplace ensuite  $z$  par  $-\frac{\zeta}{x+y}$  on peut mettre la première équation (11)' sous la forme suivante

$$(13) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -e^{-(x+y)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + p};$$

quant à la deuxième équation on peut l'écrire

$$(14) \quad q = (x+y)e^{-\zeta} - \zeta$$

ou

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -e^{-\zeta} - \frac{z_1}{x+y} - q_1.$$

L'équation (12)' exprime que  $q_1 + \frac{z_1}{x+y}$  est une fonction de  $y$  seulement, la dernière équation écrite montre que  $\zeta$  est une fonction de la forme  $\log\left(-\frac{X+Y}{Y'}\right)$ , c'est-à-dire que  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  et  $-e^{-\zeta}$  sont les dérivées par rapport à  $x$  et à  $y$  d'une même fonction  $\log(X+Y) = -\xi(x, y)$ . Écrivons avec ces nouvelles notations les équations (13) et (14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= e^{p - (x+y)\frac{\partial \xi}{\partial x}}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= e^{q - (x+y)\frac{\partial \xi}{\partial y}}. \end{aligned}$$

Remplaçons  $z$  par  $z - (x + y) \log(x + y)$ , ces équations deviennent

$$1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 + e^{p - \left[ 1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]},$$

$$1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1 + e^{q - \left[ 1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right]}.$$

Nous en tirons

$$(15) \quad 1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \Phi(p), \quad 1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial y} = \Psi(q),$$

$\Phi$  et  $\Psi$  étant des fonctions implicites définies par les équations transcendentes

$$\Phi(p) = 1 + e^{p - \Phi(p)}, \quad \Psi(q) = 1 + e^{q - \Psi(q)}.$$

En prenant les dérivées des deux membres des équations (15), respectivement par rapport à  $y$  et par rapport à  $x$ , on trouve

$$(x + y) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{dp} s,$$

$$(x + y) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{d\Psi}{dq} s.$$

Retranchons membre à membre et remplaçons  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$  par leurs valeurs, nous obtenons

$$\Phi(p) - \Psi(q) = \left( \frac{d\Phi}{dp} - \frac{d\Psi}{dq} \right) (x + y) s.$$

D'après les équations qui définissent  $\Phi$  et  $\Psi$  on a

$$\frac{d\Phi}{dp} = \frac{\Phi - 1}{\Phi}, \quad \frac{d\Psi}{dq} = \frac{\Psi - 1}{\Psi},$$

et il reste simplement

$$s(x + y) = \Phi(p) \Psi(q).$$

C'est l'une des équations que nous nous proposons de déterminer; on passera de cette équation à l'équation (12)' par la transformation

$$p = e^{-\frac{(x+y)p_1 + \frac{z}{x+y}}{x+y}} - p_1(x + y) + \frac{z}{x + y} + 1,$$

$$q = e^{\frac{z_1 + \frac{z}{x+y}}{x+y}} + z_1 + \frac{z}{x + y} + 1.$$

L'équation (12)' étant intégrable par la méthode de Laplace, l'équation

transformée est intégrable par la méthode de M. Darboux; cette dernière équation a du reste été déjà étudiée à ce point de vue par M. Goursat dans un intéressant Mémoire (1).

3. Nous avons simplifié les équations (8) qui donnent les expressions de  $f$  et  $\varphi$  en fonction de  $x, y, z, z_1, p_1$  en supposant que  $\rho(x, y)$  n'était pas identiquement nulle : nous allons maintenant étudier ce cas particulier. Les équations qui définissent la transformation de Bäcklund étant

$$\begin{aligned} p &= g(x, y, p_1) + z p_1, \\ q &= e z_1 + \sigma(x, y) z_1 + \mu(x, y, z), \end{aligned}$$

cherchons à quelles conditions  $z_1$  sera déterminée par une équation linéaire. La condition (2) devient

$$b \frac{\partial g}{\partial p_1} + b z + \sigma p_1 - \frac{\partial \sigma}{\partial x} z_1 = 0,$$

il faut donc que l'on ait

$$b = 0, \quad \sigma = 0.$$

$f$  se réduit à  $g(x, y, p_1) + z p_1$  et  $\varphi$  à  $e z_1 + \mu(x, y, z)$  : portons ces valeurs dans (1), il vient

$$(16) \quad \left( \frac{\partial g}{\partial p_1} + z \right) a p_1 + \frac{\partial g}{\partial y} + p_1 \mu - \frac{\partial \mu}{\partial x} - g \frac{\partial \mu}{\partial z} - z p_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0.$$

En annulant la dérivée du premier membre par rapport à  $z$ , nous obtenons l'équation

$$a p_1 - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} - g \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - z p_1 \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = 0.$$

$g$  n'étant pas une fonction linéaire de  $p_1$ , nous voyons immédiatement que  $\mu$  doit être une fonction linéaire de  $z$ , le coefficient de  $z$  ne dépendant pas de  $x$ . Nous écrirons donc

$$\mu = \frac{Y'}{Y} z + M(x, y),$$

mais en remplaçant  $z$  par  $z + \varpi(x, y)$ ,  $\varpi$  satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \varpi}{\partial y} = \frac{Y'}{Y} \varpi + M,$$

nous pouvons toujours revenir au cas où  $M$  est nul.

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, t. I, 1899.  
Fac. de T., 2<sup>e</sup> S., V.

Prenons enfin  $\frac{z}{Y}$  pour nouvelle fonction inconnue et remplaçons  $y$  par  $\int \frac{dy}{Y}$ , nous trouvons

$$f = g(x, y, p_1) + z p_1, \quad \varphi = e^z;$$

pour satisfaire à l'équation (16), il suffit de supposer que  $g$  ne contient pas  $y$ .

Les équations de la transformation ( $B_2$ ) sont donc

$$p = g(x, p_1) + z p_1, \quad q = e^z,$$

$z_1$  est une intégrale de

$$s_1 = 0,$$

l'équation qui donne  $z$  est

$$p - z \frac{s}{q} = g\left(x, \frac{s}{q}\right).$$

Comme l'équation trouvée plus haut, cette équation a été étudiée par M. Goursat dans le Mémoire que nous avons cité.

4. En étudiant l'équation (7), nous avons supposé que  $\ell(x, y, z)$  dépendait effectivement de  $z$ . Si cette fonction ne contient que  $x$  et  $y$ , on peut imaginer qu'elle s'annule à condition de modifier  $g(x, y, p_1)$ , et (7) exprime que  $\theta$  est un polynôme du deuxième degré en  $z_1$ ; nous écrirons donc

$$\begin{aligned} p &= g(x, y, p_1) + m(x, y, z), \\ q &= \omega(x, y) z_1^2 + \lambda(x, y, z) z_1 + \mu(x, y, z). \end{aligned}$$

Dans ces équations nous remplacerons  $z$  par  $\omega(x, y) z$ , ce qui revient à supposer  $\omega$  égale à l'unité.

Écrivons la condition (1)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g}{\partial p_1} (a p_1 + b z_1) + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial z} (z_1^2 + \lambda z_1 + \mu) \\ & - 2 z_1 p_1 - \lambda p_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial x} z_1 - \frac{\partial \mu}{\partial x} - \left( z_1 \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) (g + m) = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de  $z_1^2$  étant  $\frac{\partial m}{\partial z}$ , cette quantité doit s'annuler,  $m$  désigne donc une fonction de  $x, y$  seulement, qu'il est permis de supposer nulle. Nous écrivons que le coefficient de  $z_1$  et le terme indépendant de  $z_1$  sont aussi égaux à zéro, et nous obtiendrons ainsi deux équations

$$(17) \quad \begin{cases} b \frac{\partial g}{\partial p_1} - 2 p_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial x} - g \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, \\ a p_1 \frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda p_1 - \frac{\partial \mu}{\partial x} - g \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \end{cases}$$



On aura encore, en dérivant par rapport à  $z$ ,

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial z} p_1 - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} - g \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = 0.$$

Les deux dernières égalités permettent d'écrire

$$\mu = \frac{Y'}{Y} z + M(x, y).$$

En opérant comme plus haut, on voit d'abord que l'on peut négliger  $M$ , puis on prend  $\frac{z}{Y}$  pour fonction inconnue et  $\int \frac{dy}{Y}$  pour seconde variable indépendante, ce qui revient à supposer la fonction  $\mu$  identiquement nulle. Remarquons, en outre, que  $\lambda$  ne dépend que de  $x$  et de  $y$ .

D'après la première équation (17),  $g$  est un polynôme du second degré en  $p_1$  :

$$g = \frac{1}{b} p_1^2 + \frac{1}{b} \frac{\partial \lambda}{\partial x} p_1 + \rho(x, y).$$

Écrivons donc les équations de la transformation

$$p = \frac{1}{b} p_1^2 + \frac{1}{b} \frac{\partial \lambda}{\partial x} p_1 + \rho(x, y) = \frac{1}{b} \left( p_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \rho(x, y) - \frac{1}{4b} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2,$$

$$q = z_1^2 + \lambda(x, y) z_1 = \left( z_1 + \frac{\lambda}{2} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{4}.$$

Remplaçons  $z_1$  par  $z_1 - \frac{\lambda}{2}$ , ces équations deviennent

$$p = \frac{1}{b} p_1^2 + \rho(x, y) - \frac{1}{4b} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2,$$

$$q = z_1^2 - \frac{\lambda^2}{4}.$$

En écrivant que l'équation qui définit  $z_1$  est linéaire, on voit que

$$\rho(x, y) - \frac{1}{4b} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 \quad \text{et} \quad -\frac{\lambda^2}{4}$$

sont les dérivées, par rapport à  $x$  et à  $y$ , d'une même fonction  $\gamma(x, y)$ .

Si nous remplaçons  $z$  par  $z + \gamma(x, y)$ , nous voyons que les équations de la transformation se réduisent à

$$p = \frac{1}{b} p_1^2,$$

$$q = z_1^2.$$

Cette transformation a été étudiée par M. Goursat <sup>(1)</sup>, elle permet de passer de l'équation

$$s = 2 \sqrt{b(x, y) pq}$$

à l'équation linéaire

$$s_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \log b}{\partial y} p_1 - b z_1 = 0.$$

§. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que  $f$  n'était pas une fonction linéaire de  $p_1$  et que  $\varphi$  n'était pas une fonction linéaire de  $z_1$  : nous allons rechercher ce qui se passe lorsque  $f$  est linéaire par rapport à  $p_1$  sans que  $\varphi$  le soit par rapport à  $z_1$ . Nous supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, le coefficient de  $p_1$  dans  $f$  égal à l'unité; nous avons donc

$$p = f(x, y, z, p_1) = p_1 + \mu(x, y, z),$$

$$q = \varphi(x, y, z, z_1).$$

L'équation (5) s'écrit alors

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^3} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial z_1^2} = 0$$

et, en intégrant, on trouve

$$\varphi(x, y, z, z_1) = \psi(x, y, z_1 - z) + A(x, y, z) z_1 + B(x, y, z).$$

Posons  $z_1 - z = u$ , l'équation (4) devient

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial u^2} + \mu \frac{\partial^3 \psi}{\partial u^3} = 0;$$

la dérivée par rapport à  $z$  du premier membre doit être nulle, on a, par conséquent,

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial u^3} = 0.$$

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$  ne s'annule pas, si  $\mu$  n'est pas une fonction de  $x, y$  seulement, on peut

---

<sup>(1)</sup> *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, 1897, p. 36. — *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 252.

écrire

$$\frac{\frac{\partial^3 \psi}{\partial u^3}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}} = - \frac{\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}}{\frac{\partial \mu}{\partial z}} = \omega(x, y),$$

et l'on tire de là

$$\psi = \alpha(x, y) e^{\omega(x, y)u}, \quad \mu = \beta(x, y) e^{-\omega(x, y)z} + \gamma(x, y).$$

Portons ces valeurs de  $\psi$  et de  $\mu$  dans (18), cette équation se réduit à

$$(18)' \quad \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \omega^2 e^{\omega u}) - \alpha \gamma \omega^3 e^{\omega u} = 0.$$

En développant, on trouve d'abord que  $\omega$  est une fonction de  $y$  seulement; on peut remplacer cette fonction par l'unité, en opérant comme nous avons déjà fait plusieurs fois; l'équation (18)' donne alors

$$\gamma = \frac{\partial \log \alpha}{\partial x}.$$

Cette égalité montre qu'il suffit de remplacer  $z$  par  $z - \log \alpha$  pour revenir au cas où l'on a

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 0.$$

Les équations de la transformation sont donc

$$p = p_1 + \beta(x, y) e^{-z}, \\ q = e^{z_1 - z} + A(x, y, z) z_1 + B(x, y, z).$$

Écrivons la condition (1)

$$(ap_1 + bz_1) + \frac{\partial \beta}{\partial y} e^{-z} - \beta e^{-z} (A z_1 + B) \\ - A p_1 - \frac{\partial A}{\partial x} z_1 - \frac{\partial B}{\partial x} - \left( \frac{\partial A}{\partial z} z_1 + \frac{\partial B}{\partial z} \right) (p_1 + \beta e^{-z}) = 0;$$

en annulant les coefficients de  $p_1 z_1$  et de  $z_1 e^{-z}$ , on voit que  $A$  doit se réduire identiquement à zéro et il reste les équations

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} - B \beta - \beta \frac{\partial B}{\partial z} = 0, \\ a = \frac{\partial B}{\partial z}, \quad b = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

Elles montrent d'abord que  $B$  est une fonction linéaire de  $z$  indépendante

de  $x$ , c'est-à-dire que l'on peut poser

$$B = Y_0 z + \frac{Y'}{Y}.$$

En portant dans la première équation, on voit que  $Y_0$  s'annule et que  $\beta$  est égale à  $XY$ . Si l'on remplace  $z$  par  $z + \log Y$ , et si l'on prend  $\int X dx$  et  $\int \frac{dy}{Y}$  pour variables indépendantes, les équations de la transformation se réduisent à

$$\begin{aligned} p &= p_1 + e^{-z}, \\ q &= e^{z_1 - z}. \end{aligned}$$

Les deux équations qui se correspondent par cette transformation sont

$$\begin{aligned} s_1 &= 0, \\ s + qe^{-z} &= 0. \end{aligned}$$

6. Dans la discussion précédente nous avons écarté le cas où  $\mu$  est une fonction de  $x, y$  seulement, cas que nous allons examiner maintenant. Comme on peut ajouter à  $z$  une fonction quelconque de  $x, y$ , il est permis de supposer que  $\mu$  s'annule.

En écrivant la condition (1), nous trouvons

$$(20) \quad ap_1 + bz_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x} - A p_1 - \frac{\partial A}{\partial x} z_1 - \frac{\partial A}{\partial z} z_1 p_1 - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial z} p_1 = 0.$$

Il faut d'abord que l'on ait

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0;$$

nous supposons nulle la fonction  $A$  qui ne dépend pas de  $z$ . On peut, en effet, dans ce cas, écrire

$$\varphi(x, y, z, z_1) = \psi(x, y, z_1 - z) + A(x, y)(z_1 - z) + B(x, y, z) + A(x, y)z,$$

ce qui montre que  $\varphi$  est la somme d'une fonction de  $x, y, z_1 - z$  et d'une fonction de  $x, y, z$ .

L'équation (20) se décompose en deux autres

$$a = \frac{\partial B}{\partial z}, \quad bz_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x}.$$

D'après la première il est permis de poser

$$B = \alpha(x, y)z + \alpha(x, y);$$

en portant dans la seconde, il vient

$$(21) \quad bz_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} z + \frac{\partial z}{\partial x}.$$

$\psi$  ne dépendant que de  $x, y, u$  ( $z_1 - z = u$ ), nous devons avoir

$$b = \frac{\partial a}{\partial x}.$$

Supposons qu'il en soit ainsi, on trouve en intégrant (21)

$$\psi(x, y, u) = \omega(y, u) + au - x.$$

Il suffit de remplacer  $u$  par sa valeur pour déduire de là les équations de la transformation de Bäcklund

$$\begin{aligned} p &= p_1, \\ q &= \omega(y, z_1 - z) + a(x, y)z_1. \end{aligned}$$

On trouve sans aucune difficulté les équations qui définissent  $z$  et  $z_1$  :

$$\begin{aligned} q &= \omega\left(y, \frac{z - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}} - z\right) + a(x, y) \frac{z - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}}, \\ z_1 - ap_1 - \frac{\partial a}{\partial x} z_1 &= 0. \end{aligned}$$

On peut encore satisfaire à l'équation (19) en prenant pour  $\mu$  une fonction linéaire de  $z$  et pour  $\psi$  un polynôme du second degré en  $u$ ; je ne développerai pas les calculs parce que cette étude ne fournit rien de nouveau : les transformations de Bäcklund que l'on obtient ne sont que des cas particuliers de celles que nous avons trouvées en dernier lieu.

7. Il reste à étudier le cas où  $\varphi$  est une fonction linéaire de  $z_1$ ,  $f$  n'étant pas linéaire par rapport à  $p_1$ . Nous pouvons, ici encore, supposer le coefficient de  $z_1$  dans  $\varphi$  égal à l'unité et écrire

$$\begin{aligned} p &= f(x, y, z, p_1), \\ q &= z_1 + \theta(x, y, z). \end{aligned}$$

L'équation (2) donne

$$b \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

et, en intégrant, il vient

$$f = g(x, y, p_1 - bz).$$

Posons  $p_1 - bz = u$  et écrivons la condition (1)

$$au \frac{\partial g}{\partial u} + abz \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} - b\theta \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial x} - u - bz - g \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

En dérivant d'abord deux fois par rapport à  $z$ , puis une fois par rapport à  $u$ , nous trouvons

$$(22) \quad b \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z^2} + g \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^3} = 0,$$

$$(23) \quad b \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0.$$

$\frac{\partial g}{\partial u}$  est certainement différent de zéro; s'il en est de même de  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ , nous pouvons écrire la dernière équation

$$-\frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}}{b \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}} = \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}}{\frac{\partial g}{\partial u}} = \alpha(x, y),$$

et en déduire

$$\begin{aligned} p &= g(x, y, p_1 - bz) = \varpi(x, y) e^{\alpha(x, y)(p_1 - bz)} + \tau(x, y), \\ q &= z_1 + \theta(x, y, z) = z_1 + \omega(x, y) e^{-\alpha(x, y)bz} + \rho(x, y)z + \sigma(x, y). \end{aligned}$$

En remplaçant  $z$  par  $z + \zeta(x, y)$ ,  $\zeta$  satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \rho \zeta + \sigma,$$

nous substituons au système précédent un système analogue où l'on aurait supprimé  $\sigma$ . Quant à l'équation (22) elle devient

$$\frac{\partial}{\partial x} (\omega \alpha^2 b^2) - \omega \tau \alpha^2 b^2 - \omega \alpha^2 b^2 z \frac{\partial(\alpha b)}{\partial x} = 0.$$

Nous avons d'abord  $\alpha b = Y$ . En remplaçant  $\alpha$  par sa valeur, les équations de la transformation deviennent

$$\begin{aligned} p &= \varpi(x, y) e^{\frac{Y}{b} p_1 - Yz} + \tau(x, y), \\ q &= z_1 + \omega(x, y) e^{-Yz} + \rho z, \end{aligned}$$

et, en prenant  $Yz$  et  $Yz_1$  pour nouvelles fonctions inconnues, nous leur donnons la forme plus simple

$$(24) \quad \begin{cases} p = \varpi e^{\frac{p_1}{b} - z} + \tau, \\ q = z_1 + \omega e^{-z} + \rho z. \end{cases}$$

Écrivons la condition (1),

$$\begin{aligned} \frac{\varpi}{b} e^{\frac{p_1}{b}-z} (ap_1 + bz_1) + \frac{\partial \varpi}{\partial y} e^{\frac{p_1}{b}-z} - \frac{\varpi}{b^2} \frac{\partial b}{\partial y} p_1 e^{\frac{p_1}{b}-z} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - \varpi e^{\frac{p_1}{b}-z} (z_1 + \rho z) \\ - p_1 - \frac{\partial \omega}{\partial x} e^{-z} - \frac{\partial \rho}{\partial x} z + \omega \tau e^{-z} - \rho \left( \varpi e^{\frac{p_1}{b}-z} + \tau \right) = 0. \end{aligned}$$

On aperçoit qu'il y a un terme en  $p_1$  qui ne peut pas disparaître quelles que soient les expressions des fonctions  $\varpi, \tau, \omega, \rho$ ; les équations (24) ne peuvent donc dans aucun cas définir une transformation  $(B_2)$  telle que  $z_1$  satisfasse à une équation linéaire.

8. On peut encore satisfaire à la condition (23) en supposant que  $\theta$  soit une fonction linéaire de  $z$  ou en supposant que l'on ait

$$(25) \quad b = 0, \quad \frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} = 0.$$

Examinons le premier cas : en raisonnant comme nous avons fait à plusieurs reprises, on voit que l'on peut supprimer dans  $\theta$  le terme indépendant de  $z$  et écrire

$$\begin{aligned} p &= g(x, y, p_1 - bz), \\ q &= z_1 + \alpha(x, y)z. \end{aligned}$$

L'équation (1) devient, en remplaçant  $p_1$  par  $u + bz$ ,

$$(26) \quad \alpha(u + bz) \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} - z \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u} - \alpha b z \frac{\partial g}{\partial u} - u - bz - \alpha g - z \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

et, en annulant le coefficient de  $z$ , nous trouvons

$$\left( ab - \frac{\partial b}{\partial y} - \alpha b \right) \frac{\partial g}{\partial u} - b - \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$(27) \quad ab - \frac{\partial b}{\partial y} - \alpha b = 0, \quad b + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

puisque, par hypothèse,  $f$  n'est pas une fonction linéaire de  $p_1$ , c'est-à-dire  $g$  n'est pas une fonction linéaire de  $u$

Posons

$$\alpha = -\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

il vient

$$b = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \quad a = -\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Quant à l'équation (26) elle se réduit à

$$au \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} - u - \alpha g = 0;$$

cette équation s'intègre facilement si l'on remplace  $\alpha$  et  $\alpha$  par leurs expressions et l'on a, en désignant par  $\omega$  une fonction arbitraire,

$$g(x, y, u) = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} u + e^{-\eta} \omega \left( x, \frac{e^{\eta} u}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} \right).$$

Écrivons maintenant  $p_1 - bz$  au lieu de  $u$ ,  $b$  ayant la valeur indiquée plus haut, et nous avons les équations de la transformation de Bäcklund

$$p = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} p_1 - \frac{\partial \eta}{\partial x} z + e^{-\eta} \omega \left( x, \frac{e^{\eta} p_1}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} - e^{\eta} z \right),$$

$$q = z_1 - \frac{\partial \eta}{\partial y} z.$$

En prenant  $e^{\eta} z$  comme nouvelle fonction inconnue, on met ces équations sous la forme un peu plus simple

$$(28) \quad \begin{cases} p = e^{\eta} \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} p_1 + \omega \left( x, \frac{e^{\eta} p_1}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} - z \right), \\ q = e^{\eta} z_1. \end{cases}$$

$z_1$  satisfait à l'équation linéaire

$$s_1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \log \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}}{\partial y} \right) p_1 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} z_1 = 0,$$

à laquelle la transformation précédente fait correspondre

$$p = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} \left( s - q \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \omega \left( x, \frac{s - q \frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} - z \right).$$



Remarquons que, si après avoir permuté  $x$  et  $y$  on remplace  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  par  $a(x, y)$ , cette dernière équation devient

$$(29) \quad q = \frac{a}{\frac{\partial a}{\partial x}} (s - ap) + \omega \left( y, \frac{s - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}} - z \right),$$

c'est-à-dire que l'on retrouve l'équation obtenue plus haut (n° 6). De chacun des deux systèmes de caractéristiques de cette équation on peut déduire une transformation  $(B_2)$  <sup>(1)</sup> qui permet de la remplacer par une équation linéaire. En échangeant  $x$  et  $y$  dans les équations (28) on trouve

$$(30) \quad \begin{cases} p = e^\eta z'_1, \\ q = e^\eta \frac{\frac{\partial \eta}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} q'_1 + \omega \left( y, \frac{e^\eta q'_1}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} - z \right). \end{cases}$$

A l'aide de cette transformation on passe de l'équation (29) à

$$s'_1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \log \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}}{\partial x} \right) q'_1 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} z'_1 = 0,$$

$a$  étant toujours égale à  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ .

La transformation (30) de l'équation (29) est déduite du système de caractéristiques qui possède l'invariant  $y$  tandis que la transformation du n° 6 était déduite du système qui possède l'invariant  $x$ .

9. Nous avons laissé de côté les équations (25). La deuxième de ces équations exprime que  $\theta$  est un polynome du second degré en  $z$ ; en formant les fonctions  $f$  et  $\varphi$  et en écrivant qu'elles satisfont à la condition (1) on voit de suite que le coefficient de  $z^2$  est nul et il semble que nous soyons immédiatement ramenés au cas précédent; mais,  $b$  étant nul, la première équation (27) ne donne plus  $a$ , il faut reprendre l'étude de cette question.

On a

$$\begin{aligned} p &= g(x, y, p_1), \\ q &= z_1 + \alpha(x, y)z, \end{aligned}$$

---

(1) Thèse, n° 4.

et la condition (1) s'écrit

$$ap_1 \frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial g}{\partial y} - p_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x} z - \alpha g = 0;$$

$\alpha$  est une fonction  $\frac{Y'}{Y}$  de  $y$  seulement. Si l'on prend  $\frac{z}{Y}$  pour nouvelle fonction et  $\int \frac{dy}{Y}$  pour nouvelle variable à la place de  $y$ , on donne aux équations de la transformation la forme

$$p = g(x, y, p_1),$$

$$q = z_1,$$

$g$  devant satisfaire à

$$ap_1 \frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial g}{\partial y} - p_1 = 0.$$

En intégrant, on trouve

$$g = \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} p_1 + \psi\left(\frac{p_1}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right),$$

$\psi$  étant une fonction arbitraire, si l'on a posé

$$a = \frac{\partial \log \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\partial y}.$$

La transformation

$$p = \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} p_1 + \psi\left(\frac{p_1}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right),$$

$$q = z_1$$

établit une correspondance entre les intégrales de l'équation

$$p - \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} s = \psi\left(\frac{s}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right)$$

et celles de l'équation linéaire

$$s_1 - \frac{\partial \log \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\partial y} p_1 = 0.$$

En particulier, si  $\eta$  est égale à  $y$ , on voit que l'équation

$$p - sy = \psi(s, x),$$

intégrée par M. Goursat, a pour transformée

$$s_1 = 0.$$

10. Il faudrait encore considérer le cas où  $f$  est une fonction linéaire de  $p$ , et  $\varphi$  une fonction linéaire de  $z$  : cette étude ne présente pas de difficulté ; on trouve ainsi les transformations étudiées par M. Lucien Lévy qui permettent de déduire d'une équation linéaire une autre équation également linéaire dès que l'on connaît une intégrale de l'équation donnée.

En résumé, abstraction faite des équations linéaires, les équations que nous nous sommes proposé de déterminer sont les suivantes :

$$(I) \quad s(x+y) = \Phi(p) \Psi(q),$$

$$[\Phi(p) = 1 + e^{p-\Phi(p)}, \quad \Psi(q) = 1 + e^{q-\Psi(q)}],$$

$$(II) \quad p - z \frac{s}{q} = g\left(x, \frac{s}{q}\right),$$

$$(III) \quad s = 2\sqrt{b(x, y) p q},$$

$$(IV) \quad s + q e^{-z} = 0,$$

$$(V) \quad p - \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} s = \psi\left(\frac{s}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right),$$

$$(VI) \quad q = \omega\left(y, \frac{s - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}} - z\right) + a(x, y) \frac{s - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}}.$$

Les équations qui leur correspondent sont

$$(I)' \quad s_1 + \frac{p_1}{x+y} - \frac{z_1}{(x+y)^2} = 0,$$

$$(II)' \quad s_1 = 0,$$

$$(III)' \quad s_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \log b}{\partial y} p_1 - b z_1 = 0,$$

$$(IV)' \quad s_1 = 0,$$

$$(V)' \quad s_1 - \frac{\partial \log \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\partial y} p_1 = 0;$$

à l'équation (VI) on peut faire correspondre soit l'équation

$$(VI)' \quad s_1 - ap_1 - \frac{\partial a}{\partial x} z_1 = 0,$$

soit l'équation

$$(VI)'' \quad s_1 + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \log \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right)}{\partial x} \right] q_1 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} z_1 = 0,$$

$$\left( a = \frac{\partial \eta}{\partial y} \right).$$

On peut passer de l'équation (VI)' à (VI)'' par une transformation de Laplace. Les équations (I) et (III) sont aussi telles que des deux systèmes de caractéristiques on puisse déduire une transformation (B<sub>2</sub>) qui permette de passer de l'équation donnée à une équation linéaire, mais si l'on permute  $x$  et  $y$  chacune de ces équations est remplacée par une équation de même forme; les deux transformations ne sont donc pas essentiellement différentes comme celles dont dérivent (VI)' et (VI)''.

Remarquons encore que, si l'on excepte (III)' et (VI)'', toutes les équations linéaires que nous avons trouvées ont au moins un invariant nul <sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> Cf. un Mémoire de M. Goursat (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, t. IV, 1902, p. 334).



---

# NOTICE

sur

## KARL - MICHAÏLOVITCH PETERSON,

PAR MM. D.-T. EGOROV ET B.-K. MŁODZIEIOWSKI.

---

Traduit du russe <sup>(1)</sup> par M. Édouard DAVAUX,

Ingénieur de la Marine à Toulon.

---

### I. — KARL-MICHAÏLOVITCH PETERSON ET SES TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES,

PAR M. B.-K. MŁODZIEIOWSKI.

J'ai l'intention, dans cet aperçu, de donner des renseignements sur la vie et sur la caractéristique des travaux géométriques d'un de nos grands mathématiciens, Karl-Michaïlovitch Peterson. Bien que les mérites scientifiques de Peterson aient déjà rendu son nom célèbre de son vivant parmi les mathématiciens russes, ce n'est que dans ces dernières années qu'il est arrivé à une réputation plus juste et plus complète. Peterson s'occupa de deux branches des Mathématiques : des équations aux dérivées partielles et de la Géométrie différentielle. Ce furent, avant tout, ses recherches sur les équations aux dérivées partielles qui fixèrent sur lui l'attention et qui, en 1879, lui firent obtenir le grade de Docteur de l'Université de la Nouvelle Russie. Les travaux de Peterson sur la Géométrie différentielle furent aussi hautement appréciés par ses collègues immédiats de la Société mathématique de Moscou, mais ils furent moins connus

---

(1) Les deux Parties de cette Notice, dues respectivement, la première à M. Młodzieiowski et la seconde à M. Egorov, ont paru séparément en 1903 dans le premier fascicule du Tome XXIV (p. 1-21 et 22-29) du *Recueil mathématique* (МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИКЪ), publié par la Société mathématique de Moscou; on a adopté comme titre, pour chaque Partie, la traduction française du titre russe de l'article correspondant.

dans de plus grands cercles de mathématiciens, peut-être parce que, à cette époque, on s'occupait peu en Russie de cette branche de la Géométrie. Et pourtant la première place appartient incontestablement à ces travaux de Peterson, par la richesse des résultats qu'il a obtenus et par l'abondance des idées profondes et ingénieuses. Tandis que Peterson, dans ses recherches sur les équations aux dérivées partielles, n'a fait que se mettre au niveau de ses contemporains, dans ses travaux de Géométrie il s'est placé sur beaucoup de points en avant de son temps. Quand plus tard les recherches de Peterson acquirent une plus grande notoriété, il fut reconnu qu'une série entière de propositions, trouvées plus tard par Darboux, Lie, Bianchi, Schwarz, Maurice Lévy et d'autres savants, avaient été déjà obtenues beaucoup plus tôt par Peterson. Mais, indépendamment des résultats, la méthode fondamentale dont s'est servi Peterson dans ses recherches est féconde au plus haut degré et sans aucun doute peut encore donner beaucoup de choses intéressantes et nouvelles. Dans ces derniers temps, les travaux de Peterson ont attiré de plus en plus sur eux l'attention des savants occidentaux, principalement des savants allemands. Le mérite en revient surtout au professeur Stäckel, de Kiel, dont de nombreux travaux se rapportent à l'étude de Peterson; le professeur Stäckel a publié <sup>(1)</sup> en 1901 une biographie de Peterson.

Pour faire connaître les circonstances très simples de la vie de Peterson, je me suis surtout servi des documents et renseignements mis gracieusement à ma disposition par le directeur de l'École de Pétropavlovsk, K.-R. Vernander, et par un professeur de cette école, K.-A. Grévé, qui avaient connu de près Peterson; je me suis servi aussi de la biographie de Peterson, que j'ai mentionnée plus haut, faite par le professeur Stäckel. En dehors de ces sources, j'ai emprunté quelques renseignements sur la vie de Peterson à l'*Aperçu sur la vie et les travaux d'auteurs russes défunts*, de D.-D. Jazikov, à la *Bibliographie russe*, année 1881, et à un article de V.-V. Bobinine sur Peterson dans le *Dictionnaire biographique russe*.

---

Karl-Michaïlovitch Peterson est né à Riga le 13 mai de l'année 1828; il descendait d'une famille bourgeoise et, à ce qu'il semble, lithuanienne.

Ayant terminé ses études au collège de Riga en 1847, il entra la même année à l'Université de Dorpat, où il s'occupa de sciences mathématiques et naturelles. A cette époque, Senff et Minding enseignaient les Mathématiques à l'Université de Dorpat. Peterson entendit chez Senff la théorie des courbes et des surfaces; mais le célèbre Minding fut surtout le guide de Peterson en Géométrie. Cet

---

<sup>(1)</sup> *Karl Peterson (1828-1881)*, von Paul Stäckel, in Kiel (*Bibliotheca mathematica*, dritte Folge, zweiter Band, 1901, p. 122-132).

illustre savant publia une série de remarquables travaux sur la Théorie de la déformation des surfaces, se rapportant au fameux Mémoire de Gauss : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Ainsi Minding découvrit entre autres l'invariabilité de la courbure géodésique dans la déformation d'une surface, il trouva les conditions de l'application d'une surface sur une autre et donna des surfaces applicables sur les surfaces de révolution. Les travaux suivants de Peterson ont un rapport direct avec ces travaux de Minding; c'est à lui-même que Peterson présenta sa thèse, et Minding l'apprécia par la mention *ausgezeichnet*.

Le professeur Stäckel, dans sa biographie de Peterson, fait connaître, d'après une Communication du professeur Kneser, le contenu de cette thèse, conservée dans les dossiers de l'Université de Dorpat. La première Partie se rapporte à la théorie des lignes sur les surfaces et principalement à la théorie de la courbure géodésique et de la courbure normale. Peterson y démontre le théorème simple et élégant qui suit :

*Si une courbe est donnée sur une surface développable, sa relation en chaque point avec la surface est définie très simplement par l'inclinaison  $\varphi$  de son plan osculateur sur le plan tangent à la surface développable, par l'angle  $\omega$  de la tangente à la courbe avec une droite génératrice, et par la distance  $l$  du point de la courbe à l'arête de rebroussement, en la comptant sur la génératrice. Si les génératrices de la surface sont définies par un paramètre  $t$ , une équation de la forme  $f(l, \omega, \varphi, t) = 0$  exprime la nature d'une courbe tracée sur la surface. Si la surface développable et la forme de la fonction  $f$  sont données, la courbe correspondante s'exprime sans constantes arbitraires, avec une ou deux constantes, selon que la fonction  $f$ , en plus de  $t$ , dépend seulement de  $l$ , ou également de  $\omega$ , ou en outre de  $\varphi$ ; inversement, si une courbe est donnée et si l'on recherche une surface développable pour laquelle une courbe donnée possède une propriété définie par une équation donnée  $f(l, \omega, \varphi, t) = 0$ , le nombre des constantes arbitraires dans l'équation de la surface sera 0, 1 ou 2, selon qu'il entre dans  $f$ , en plus de  $t$ , seulement  $\varphi$  ou également  $\omega$ , ou en outre  $l$ .*

La seconde partie de la thèse de Peterson se rapporte à la déformation des surfaces. Peterson démontre que, si l'on connaît pour chaque point d'une surface, en plus des coefficients  $E, F, G$  de l'élément linéaire, les deux rayons de courbure principaux  $r_1$  et  $r_2$  et l'angle  $\varphi$  entre une des lignes de courbure et une des lignes de coordonnées sur la surface, la forme de la surface est par là entièrement définie; on voit facilement que  $r_1, r_2$  et  $\varphi$  se relient immédiatement aux paramètres du second ordre  $L, M, N$  ou  $D, D', D''$ , de sorte que la proposition de Peterson est, au fond, équivalente aux trois équations fondamentales de Mai-

nardi-Codazzi qui jouent un rôle si important dans la théorie des surfaces et qui expriment la même idée sous une forme plus symétrique et plus commode. Si nous appelons l'attention sur ce que Mainardi a donné ses formules en 1856 et sur ce que la thèse de Peterson est de 1853, nous devons reconnaître, avec le professeur Stäckel, que le talent de Peterson l'avait déjà conduit dans ce premier travail sur une voie sûre et que, en la suivant, il devait arriver aux propositions les plus importantes de la théorie de la déformation des surfaces. Il est regrettable que l'idée émise par Peterson dans sa thèse n'ait pas reçu de lui, à ce qu'il semble, de développement ultérieur. Nous verrons ci-dessous que, dans ses travaux postérieurs, la théorie de la déformation l'occupa non pas tant en elle-même que dans son rapport avec d'autres formes de correspondance des surfaces.

Peterson étudia à l'Université de Dorpat de 1847 à 1852 et, au commencement de 1853, il subit l'examen de candidat. Comme on le voit par une copie du registre, Peterson passa brillamment son examen. Il obtint les notes les plus élevées dans tous les sujets, sauf deux; l'un de ces derniers était la *reine höhere Geometrie*. Il passa seulement *ziemlich gut* l'examen de langue russe obligatoire à Dorpat. C'est ici le lieu de remarquer que, bien que, selon l'attestation de personnes ayant connu Peterson dans la période moscovite de sa vie, sa façon de parler le russe donna toujours l'impression qu'il n'était pas d'origine russe, tous ses articles dans le *Recueil mathématique* n'en sont pas moins écrits dans une très belle langue, précise et claire.

Il est difficile de fixer avec précision l'époque à laquelle Peterson s'établit à Moscou, où il devint précepteur dans une famille distinguée. En 1865, Peterson entra comme professeur de Mathématiques à l'École allemande de Petropavlovsk en qualité de suppléant, et devint en 1879 professeur titulaire. Il sut transmettre à ses élèves une partie de cet amour de la Science qui l'animait lui-même, et beaucoup de ses élèves, entraînés par son enseignement, choisirent, à la fin de leur cours à l'École, la Faculté de Mathématiques. En outre, tous les anciens élèves de Peterson, avec lesquels j'ai eu occasion de m'entretenir, parlaient unanimement de lui comme d'un homme leur ayant inspiré un profond respect, non seulement par ses connaissances étendues, mais encore par son caractère droit et noble. S'étant établi à Moscou, Peterson fit partie du Cercle des Mathématiciens moscovites, groupés à cette époque autour des professeurs Braschmann et Davidov de l'Université de Moscou. Davidov avait été attaché à l'École de Petropavlovsk et, depuis 1866, il y avait même enseigné quelque temps les Mathématiques; selon toute apparence, il s'y rencontra avec Peterson. En octobre 1864, les membres de ce Cercle proposèrent de se réunir chaque mois, de septembre à avril, pour échanger des communications sur les différentes branches des Mathématiques. Peterson fut un des agents actifs de ces réunions et, dans le *Recueil*



*mathématique*, publié en 1866 par le Cercle, contenant les Communications lues par les membres du Cercle, se trouve son Mémoire *Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes*, qui inaugurerait la série de ses travaux sur la Géométrie différentielle.

Le 23 janvier 1867, ce Cercle de mathématiciens fut réorganisé en Société mathématique de Moscou et, en même temps, le *Recueil mathématique* devint une publication périodique. Avec d'autres mathématiciens du Cercle, Peterson entra dans la nouvelle Société comme membre fondateur et continua à prendre part à ses travaux avec son ancienne ardeur. Les procès-verbaux des séances de la Société notent de lui, de 1865 à 1879, dix-huit Communications dans le domaine de la Géométrie différentielle et de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Peterson publia en même temps dans le *Recueil mathématique* six Mémoires, dont trois se rapportent à la Géométrie différentielle et trois à la théorie des équations aux dérivées partielles. Ces Mémoires sont les suivants :

1. Объ отношеніяхъ и сродствахъ между кривыми поверхностями (*Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes*), t. I, 1866, p. 391-438.
2. О кривыхъ на поверхностяхъ (*Sur les courbes tracées sur les surfaces*), t. II, 1867, p. 17-44.
3. Объ изгибании поверхностей второго порядка (*Sur la déformation des surfaces du second degré*), t. X, 1883, p. 476-523.
- 4, 5, 6. Объ интегрированіи уравненій съ частными производными (*Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*), t. VIII, 1877, p. 291-361; t. IX, 1878, p. 137-192; t. X, 1882, p. 169-223.

Les deux premiers Mémoires de Peterson, refondus et augmentés, furent publiés par lui en 1868 en langue allemande sous le titre : *Ueber Curven und Flächen*. Ce travail de Peterson est intéressant parce que nous y avons l'exposé le plus complet et le plus systématique des idées que Peterson prit pour base de ses recherches géométriques.

Le 28 novembre 1879, Peterson, sur la présentation des professeurs E.-T. Sabine, N.-A. Oumov et V.-V. Preobrajensky, fut élevé par le Conseil de l'Université de la Nouvelle Russie au grade de Docteur *honoris causa* en Mathématiques pures. Comme on le voit par la présentation elle-même, publiée dans les Comptes rendus des séances du Conseil (*Mémoires de l'Université de la Nouvelle Russie*, t. XXX), la place principale fut assignée dans celle-ci aux recherches de Peterson sur les équations aux dérivées partielles; il fut fait seulement mention de ses travaux géométriques.

Peterson ne s'est pas marié. Il mena une vie paisible et retirée, occupant tout

son temps à des recherches scientifiques ou à des entretiens avec quelques amis, ses collègues à l'École de Petropavlovsk. En mars 1881, il tomba malade, et le 19 avril de la même année il mourut à l'hôpital de l'École d'une inflammation du péritoine.

---

Nous avons déjà dit que les idées de Peterson et les résultats qu'il obtint sont présentés de la façon la plus complète dans son livre *Ueber Curven und Flächen*. Aussi nous suivrons surtout ce livre pour l'exposé des travaux géométriques de Peterson. Son analyse circonstanciée est d'autant plus nécessaire qu'il est actuellement une curiosité bibliographique, et l'on ne peut que se joindre au professeur Stäckel pour souhaiter qu'il soit publié de nouveau.

Un des principaux mérites de Peterson dans la Géométrie différentielle des surfaces consiste en ce qu'il a indiqué la propriété suivante, simple et en même temps générale, de toute correspondance entre deux surfaces : dans toute correspondance entre deux surfaces, il existe en général sur chaque surface un système de lignes conjuguées auquel correspond sur l'autre un système également conjugué. Cette proposition apparaît avec toute sa simplicité fondamentale, dans la pleine acception du mot, dans la théorie de la correspondance des surfaces, non seulement parce que les variables, correspondant à ce réseau général conjugué, représentent par-dessus tout un système commode de coordonnées pour l'étude de la correspondance donnée, mais aussi parce que, entre les propriétés de la correspondance et les propriétés de ce réseau conjugué, existe un lien géométrique étroit. Nous verrons ci-dessous quels riches résultats Peterson a tirés de sa proposition, et en particulier dans la théorie de la déformation des surfaces.

Le livre *Ueber Curven und Flächen* fut publié par Peterson comme une première livraison après laquelle d'autres devraient paraître.

À en juger par plusieurs passages du livre, et aussi par des parties des Mémoires de Peterson qui n'entrèrent pas dans la première Partie du livre, on peut supposer que la seconde Partie devait être principalement consacrée à la représentation conforme ou, comme l'appelle Peterson, à la *relation graphique* des surfaces. La première livraison, qui représente par elle-même un tout complet, commence par l'exposé des propriétés fondamentales des courbes dans l'espace et des courbes sur les surfaces. Peterson y démontre une propriété fondamentale indiquée dans la suite par Darboux, à savoir que si  $u, v$  sont des coordonnées conjuguées sur une surface, les coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  satisfont à une même équation de la forme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = m \frac{\partial g}{\partial u} + n \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Ensuite Peterson introduit diverses familles de lignes qui doivent trouver leur application dans des recherches ultérieures. Telles sont les *lignes hélicoïdales*, dont les tangentes sont également inclinées sur une direction déterminée, les *lignes cylindriques et coniques*, représentant les lignes de contact avec la surface de cylindres et de cônes qui lui sont circonscrits. Peterson s'arrête avec une attention particulière sur deux familles remarquables de lignes, qu'il a appelées *lignes de lumière* et *lignes d'ombre* (*Licht- und Schattenlinien*). Les premières sont des lignes d'égal éclaircissement, c'est-à-dire les lieux géométriques des points pour lesquels un faisceau de droites normales rencontre une surface sous un angle constant; les lignes d'ombre sont les enveloppes des ombres portées par les normales à une surface sur les plans tangents correspondants dans l'hypothèse où les rayons lumineux sont parallèles. Peterson indique une série de propriétés intéressantes de ces lignes et découvre que les lignes de lumière et d'ombre, correspondant à une même direction des rayons incidents, forment sur la surface un réseau conjugué <sup>(1)</sup>.

Plus loin, Peterson établit la notion d'une forme particulière d'équations qu'il a appelées *équations d'une courbe particulière avec des variables conjuguées*. Supposons que nous ayons sur une surface une famille de lignes dépendant d'un paramètre, par exemple une des familles de lignes coniques. Prenons sur la surface une famille de lignes conjuguées avec les lignes de la famille donnée et prenons les deux familles pour système de lignes de coordonnées sur la surface. Alors notre surface sera représentée avec les coordonnées  $u, v$  par des équations de la forme

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v),$$

où  $u = \text{const.}$  représente l'équation de la famille que nous avons prise, et  $v = \text{const.}$  de la famille conjuguée. Peterson appelle ces équations : *équations de courbes de forme donnée à variables conjuguées*. Si dans les fonctions  $\varphi$  entrent toutes les quantités arbitraires dont peuvent dépendre les lignes d'une famille donnée, ces équations seront les équations générales de la famille de courbes considérées. Peterson affirme que l'on peut obtenir les formes de ces équations sans connaître la surface sur laquelle sont les lignes cherchées; dans ce cas, les fonctions  $\varphi$  doivent dépendre encore d'une fonction arbitraire des coordonnées  $u, v$  dont la présence transforme les équations précédentes en l'équation d'une famille de lignes donnée sur une surface arbitraire. Les exemples donnés par Peterson en vue de l'application de cette idée sont très intéressants et l'on peut encore espérer beaucoup de son développement ultérieur. Peterson lui-même a appliqué sa méthode à la déduction des équations des courbes coniques et cylindriques, dont un cas particulier a été indiqué plus tard par Kœnigs. En désignant

---

(<sup>1</sup>) Cette proposition a été retrouvée en 1892 par M. Pieri.

par  $\alpha(v)$ ,  $\beta(v)$ ,  $\gamma(v)$  les coordonnées des sommets des cônes circonscrits, Peterson trouve les équations générales suivantes des courbes coniques

$$x = \left( a + \int \alpha \frac{\partial w}{\partial v} dv \right) : w, \quad y = \left( b + \int \beta \frac{\partial w}{\partial v} dv \right) : w, \quad z = \left( c + \int \gamma \frac{\partial w}{\partial v} dv \right) : w,$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont des fonctions de  $u$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , de  $v$ , et où  $w$  dépend des deux variables. Nous avons pour les courbes cylindriques

$$x = a + \int \alpha w dv, \quad y = b + \int \beta w dv, \quad z = c + \int \gamma w dv.$$

Un cas particulièrement intéressant et élégant est celui où les deux familles de lignes conjuguées sont coniques. Alors les formules précédentes prennent la forme

$$x = \frac{\alpha + a}{l + \lambda}, \quad y = \frac{\beta + b}{l + \lambda}, \quad z = \frac{\gamma + c}{l + \lambda},$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dépendent de  $u$ , et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de  $v$ . Si le second système se compose de lignes cylindriques, alors  $\lambda = \text{const.}$ , et en remplaçant  $l$  par  $\frac{1}{l}$ , nous avons

$$x = l(a + \alpha), \quad y = l(b + \beta), \quad z = l(c + \gamma).$$

Enfin, dans le cas où les deux systèmes sont cylindriques, nous trouvons

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta, \quad z = c + \gamma.$$

Ce sont les surfaces connues de translation, étudiées en détail par Peterson et trouvées dans la suite par Bianchi.

Peterson passe ensuite à l'exposé des idées fondamentales de ses travaux sur la correspondance, ou, comme il l'appelle, sur la *relation* et l'*affinité* des surfaces. Si à chaque point d'une surface correspond un point déterminé d'une autre et inversement, Peterson appelle cette dépendance une *relation* des surfaces : il est évident que cette relation s'exprime analytiquement par deux équations entre les coordonnées courantes  $(x, y, z)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$  des points des deux surfaces ou par deux équations entre les coordonnées curvilignes  $(u, v)$ ,  $(u_1, v_1)$  sur ces surfaces. S'il est donné plus de deux équations entre ces quantités, la relation entre les surfaces correspondantes ne sera possible que dans le cas où toutes ces équations seront la conséquence de deux d'entre elles, ce qui, en général, impose des conditions aux surfaces elles-mêmes. Aussi une relation de la dernière sorte n'est pas possible entre tout couple de surfaces, mais seulement entre des surfaces qui se trouvent dans une dépendance réciproque déterminée. Peterson appelle ces relations des *affinités* de deux surfaces. Peterson démontre ici le théorème fondamental dont on a parlé plus haut, à savoir que dans chaque

relation ou affinité de deux surfaces il existe sur chacune d'elles un réseau de lignes conjuguées, auquel correspond sur l'autre surface un réseau également conjugué. Peterson appelle ce réseau, qui peut être réel, imaginaire ou formé de lignes confondues, la *base de la relation ou de l'affinité*. Comme exemples, Peterson indique les relations suivantes : 1° le *parallélisme*, pour lequel les normales correspondantes des deux surfaces sont parallèles ; 2° la *perspective*, où les points correspondants des deux surfaces sont sur les rayons d'une gerbe de droites ; 3° la *conjonction*, pour laquelle les deux surfaces ont aux points correspondants une tangente commune. Deux autres relations ne dépendent pas de la position relative des surfaces ; 4° la *conjugaison*, pour laquelle à chaque système de lignes conjuguées sur une surface correspond un système conjugué sur l'autre ; 5° la *relation graphique*, pour laquelle les angles correspondants sur les deux surfaces sont égaux entre eux. Il est évident par la définition même de la relation (4) que sa base est indéterminée.

Ensuite Peterson indique des formes diverses d'affinités. D'abord il est clair que si nous donnons, dans une relation donnée, la base de la relation, c'est-à-dire le système de lignes conjuguées qui reste conjugué sur la seconde surface, nous introduisons par là une nouvelle condition et nous n'obtenons plus une relation, mais une affinité ; ainsi chaque relation sur une base donnée est une affinité. En outre, Peterson donne comme exemples d'affinités : 1° la *déformation* ; 2° la *perspective graphique*, où deux surfaces se trouvent simultanément en relation graphique et en relation de perspective ; 3° le *développement*, pour lequel une des surfaces est tangente aux normales de l'autre ; 4° la *perspective parallèle*, pour laquelle les rayons vecteurs menés d'un point aux points de la première surface sont parallèles aux normales aux points correspondants de l'autre et réciproquement ; 5° l'*affinité des plans correspondants*, où à des courbes planes d'une surface correspondent des courbes planes de l'autre.

Ainsi Peterson a eu en vue non seulement les formes de correspondance entre des surfaces qui étaient plus ou moins étudiées en détail à son époque, mais encore des formes dont la signification dans la théorie des surfaces n'a été découverte que plus tard. Ainsi le parallélisme se trouve en relation étroite avec la représentation sphérique d'une surface, la conjonction n'est pas autre chose que la correspondance entre les deux surfaces focales d'une congruence rectiligne, la conjugaison renferme comme cas particulier les congruences connues W, dans lesquelles les lignes asymptotiques des deux surfaces focales se correspondent l'une à l'autre. La perspective graphique également est tout à fait identique à l'inversion et à la similitude <sup>(1)</sup> ; le développement est la relation entre une surface et sa développée ; la perspective parallèle est, comme il n'est pas difficile de s'en

---

(1) Ce résultat a été retrouvé en 1877 par Éd. Weyr.

convaincre, la transformation par polaires réciproques relative à une sphère de rayon égal à un; enfin, l'affinité de plans correspondants est identique à la collinéation. Dans les travaux imprimés de Peterson, beaucoup de ces relations ne sont qu'effleurées, bien que nous y trouvions beaucoup de choses intéressantes.

Dans les Mémoires de Peterson, les relations de parallélisme et de perspective sont étudiées plus en détail; aussi une grande attention est-elle portée sur l'application de ces deux transformations géométriques à des formes diverses d'affinité.

Peterson commence son étude du parallélisme par la démonstration du théorème suivant dont l'importance est évidente.

*Dans tout couple de surfaces parallèles il existe deux familles de courbes conjuguées auxquelles les tangentes en deux points correspondants sont parallèles entre elles et qui représentent ainsi la base de la correspondance donnée.*

Peterson a indiqué en même temps des relations simples permettant de passer d'une surface à une autre qui lui est *parallèle sur une base donnée* : sous la forme qu'il leur a donnée, elles conduisent à une suite de conséquences très importantes, en particulier dans la théorie de la déformation. Peterson a examiné avec une attention particulière le parallélisme sur une base rectangulaire, c'est-à-dire le cas où les lignes conjuguées qui servent de base au parallélisme sont rectangulaires, autrement dit sont des lignes de courbure. Comme sur la sphère toutes les lignes conjuguées sont orthogonales, le problème revient à l'étude du parallélisme d'une surface arbitraire avec la sphère. En prenant sur la sphère des circonférences de grands cercles pour l'une des deux familles de lignes conjuguées, Peterson en tire les équations générales des surfaces avec des lignes de courbure cylindriques.

Dans l'application du parallélisme à la théorie de la déformation, Peterson découvrit le théorème remarquable qui constitue un des ornements de son travail. Il consiste en ce qui suit. Supposons que l'on ait deux surfaces  $S$  et  $S'$ , applicables l'une sur l'autre, et que l'on connaisse la base de la déformation, c'est-à-dire le système de lignes conjuguées qui demeure conjugué après déformation. Alors, si l'on sait trouver toutes les surfaces  $\Sigma$  parallèles à  $S$  sur la même base, et toutes les surfaces  $\Sigma'$  parallèles à  $S'$  sur cette base, les surfaces  $\Sigma'$  s'appliqueront sur les surfaces  $\Sigma$ .

Ce théorème permet, connaissant un couple de surfaces applicables l'une sur l'autre, d'en déduire une infinité d'autres couples semblables, pourvu que l'on sache résoudre pour les surfaces primitives le problème du parallélisme sur une base donnée. Ce dernier problème exige l'intégration d'une équation de Laplace et peut être résolu jusqu'au bout dans beaucoup de cas. Peterson a appliqué sa

méthode avec un succès éclatant à une série de cas particuliers en partie nouveaux, en partie déjà connus avant lui, mais résolus par des procédés particuliers et artificiels. Ainsi il a donné des surfaces applicables sur les surfaces de révolution (Minding), sur les hélicoïdes et sur les surfaces moulures (Bour). En outre, Peterson a déduit de là les surfaces applicables sur les surfaces minima trouvées ensuite en 1875 par Schwarz, les surfaces applicables sur les surfaces de translation obtenues en 1878 par Bianchi. De plus, Peterson a trouvé les surfaces spirales, qui ont la propriété d'être semblables à elles-mêmes, et il en a donné des déformations; ces surfaces ont également été découvertes en 1878 simultanément par Sophus Lie et Maurice Levy.

Les surfaces applicables sur les surfaces du second ordre trouvées par Peterson sont particulièrement remarquables. Peterson a considéré ces surfaces comme un cas particulier des surfaces de la forme

$$x = m(u)\mu(v), \quad y = m(u)\nu(v), \quad z = \eta(u),$$

où  $u$  et  $v$  sont les coordonnées d'un système conjugué de lignes coniques et cylindriques. Peterson a trouvé que ces lignes peuvent être prises pour base de la déformation et que sur cette base chaque surface de la forme indiquée peut être déformée sous une infinité de formes. J'ai considéré dans la suite en 1886 <sup>(1)</sup> les déformations de ce genre avec plus de détails.

Dans les recherches de Peterson les lignes de déformation principales ont une grande importance. Peterson a appelé ainsi des lignes conjuguées sur une surface et telles qu'elles demeurent conjuguées dans la déformation de la surface, non pas dans une nouvelle forme quelconque, mais dans une infinité de nouvelles formes. Du théorème fondamental de Peterson résulte que si les lignes de déformation sont principales pour une surface donnée nous obtiendrons aussi des lignes de déformation principales, si nous transformons la surface donnée en une autre qui lui est parallèle, de façon que le système donné de lignes serve de base à ce parallélisme. Peterson lui-même a trouvé les lignes de déformation principales pour les surfaces de révolution, de translation, pour les surfaces minima, pour les surfaces du second ordre et pour les hélicoïdes s'appliquant sur une caténoïde. Le problème général des lignes de déformation principales des hélicoïdes a été résolu en 1896 par Stäckel.

Peterson a étudié en outre la relation de perspective. Il démontra ici cette proposition, que la perspective graphique, c'est-à-dire une transformation par perspective pour laquelle la similitude est conservée dans les parties infiniment petites,

---

<sup>(1)</sup> *Mémoires scientifiques de l'Université de Moscou*, Section physico-mathématique, tome VII.

ne peut être qu'une transformation par similitude ou une inversion, proposition qui étend ses propriétés sur la transformation des surfaces, et qui fut démontrée par Liouville pour la transformation de l'espace. A ce sujet Peterson a démontré que la transformation considérée conserve les lignes de courbure, théorème qui fut démontré dans la suite par Darboux.

Peterson a ensuite donné le moyen de découvrir, pour une surface donnée, toutes les surfaces perspectives avec elle sur une base donnée et enfin il a démontré que toute transformation projective ou toute affinité des plans correspondants, comme il l'appelle, conserve la conjugaison de toutes les lignes sur les surfaces; cette même proposition fut également démontrée dans la suite par Darboux. Peterson en déduisit une équation générale très élégante des surfaces ayant un système de lignes conjuguées planes.

La dernière partie du Livre de Peterson est consacrée aux équations des lignes géodésiques. En remarquant que l'inversion conserve les lignes de courbure, Peterson appliqua aux surfaces avec des lignes de courbure cylindriques, dont les équations avaient été obtenues par lui antérieurement, successivement la transformation par inversion et la transformation par parallélisme, pour base de laquelle sont prises les lignes de courbure. Il obtient de cette manière des surfaces à lignes de courbure de plus en plus compliquées, et démontre que cette méthode permet d'obtenir l'équation générale des lignes de courbure avec deux séries de fonctions arbitraires d'une variable. Il donne lui-même sous forme de quadratures les équations générales de surfaces avec des lignes de courbure coniques et planes. Comme aux lignes de courbure d'une surface donnée correspond sur son développement une famille de lignes géodésiques et de lignes qui leur sont conjuguées, possédant l'équation de lignes de courbure avec un certain nombre de fonctions arbitraires, nous aurons alors l'équation des lignes géodésiques avec le même nombre de fonctions arbitraires.

Tels sont, dans les grandes lignes, les résultats obtenus par Peterson dans son Livre : *Ueber Curven und Flächen*. Comme ses deux premiers Mémoires ont paru presque en entier dans le *Recueil mathématique*, nous n'examinerons pas en détail ces articles, mais nous en donnerons brièvement le contenu.

Le Mémoire *Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes* contient la théorie générale des relations et des affinités, le théorème sur la base d'une relation, c'est-à-dire sur l'existence d'un réseau conjugué commun pour tout couple de surfaces correspondantes, la théorie de la relation de parallélisme et son application à la déformation des surfaces, la perspective graphique, la perspective conjuguée et l'affinité de plans correspondants. Dans ce Mémoire ne figurent pas les surfaces applicables sur les surfaces minima, ni celles applicables sur les surfaces moulures, mais en revanche il y a une déformation intéressante qui ne se rencontre pas dans l'Ouvrage allemand de Peterson. C'est la déformation



suivante :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin hu}{\cosh u + \cos v}, & y &= \frac{\sin cv}{\cosh u + \cos v}, & z &= \frac{a \cosh cu + b \cos cv}{\cosh u + \cos v}, \\ x &= \frac{c \sin hu}{\cosh u + \cos v}, & y &= \frac{c \sin v}{\cosh u + \cos v}, & z &= \frac{b \cosh cu + a \cos cv}{\cosh u + \cos v}, \end{aligned}$$

où les constantes  $a$  et  $b$  sont liées par la relation

$$b^2 - a^2 = 1.$$

Les deux surfaces ont un système de courbes conjuguées coniques  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$

Il est intéressant de remarquer que, dans les travaux de Peterson, sont considérés presque exclusivement les cas de déformation dans lesquels des courbes coniques et cylindriques servent de base de la déformation : tels sont, outre celui que l'on vient de citer, ceux des déformations des surfaces du second ordre et des surfaces de translation. Cela fait naître la supposition que Peterson a possédé des méthodes plus générales inconnues de nous, pour la résolution du problème de la déformation des surfaces de ce genre <sup>(1)</sup>. Le dernier travail de Peterson *Sur la déformation des surfaces du second degré* fut livré à l'impression en 1882, après la mort de son auteur. Ce travail ne se trouve pas en relation très étroite avec le Livre : *Ueber Curven und Flächen*, auquel il n'emprunte que les déductions nécessaires pour le développement ultérieur du contenu principal du Mémoire.

L'article est consacré à l'étude plus détaillée des surfaces applicables sur les surfaces du second ordre qui ont été données par Peterson dans son premier Mémoire. Si l'on considère l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les surfaces en question, qui sont applicables sur lui, sont représentées par les équations

$$x = r \cos \varphi \cos u, \quad y = r \sin \varphi \cos u, \quad z = \int \sqrt{a^2(1 - k^2) \sin^2 u + c^2 \cos^2 u} \, du,$$

---

<sup>(1)</sup> Dans la séance de la *Société mathématique* du 15 octobre 1902 a été exposée une solution générale que j'ai trouvée du problème de la déformation des surfaces sur une base conique ou cylindrique.

où

$$r = \sqrt{a^2 k^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 v},$$

$$\varphi = \int \frac{a \sqrt{k^2 (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) - (a^2 - b^2) \sin^2 v}}{a^2 k^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 v} dv.$$

Ici  $k$  est un paramètre de la déformation,  $u$  et  $v$  sont des coordonnées curvilignes, conjuguées pour toutes les surfaces d'une famille donnée, les lignes  $u = \text{const.}$  sont des lignes coniques,  $v = \text{const.}$  des lignes cylindriques; la surface primitive correspond à  $k = 1$ . Il est évident qu'en échangeant les rôles des axes nous pouvons obtenir pour chaque ellipsoïde trois familles de surfaces applicables semblables; en changeant les signes de  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ , nous trouvons des surfaces applicables sur d'autres surfaces à centre du second ordre.

Peterson appelle entre autres l'attention ici sur l'existence, pour les surfaces du second ordre, de *surfaces applicables en dehors des limites*, c'est-à-dire dont tous les points réels correspondent à des points imaginaires de la surface primitive. La possibilité analytique de telles surfaces applicables résulte de ce fait que l'expression d'un élément linéaire d'une surface donnée

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

peut rester une forme quadratique positive des différentielles  $du$ ,  $dv$  pour des valeurs réelles des coordonnées  $u$ ,  $v$  auxquelles ne correspondent pas de points réels de la surface donnée, et même pour des valeurs complexes de ces coordonnées.

Peterson, dans son Mémoire, s'arrête surtout sur la déformation des surfaces du second ordre dont les longueurs d'axes prennent des valeurs limites particulières. Ces valeurs peuvent être de trois sortes : un axe peut devenir infini, ou nul, ou égal à un autre axe. Peterson examine ces trois cas et arrive à des conséquences paradoxales, mais très intéressantes.

Quand les axes d'une surface du second ordre deviennent infinis, la courbure des points qui s'éloignent à l'infini tend, en général, vers 0. Dans ce cas, la surface devient un plan, et ses déformations ne présentent pas d'intérêt, mais il y a trois cas où la courbure ne tend pas vers 0, mais vers une autre limite finie. Ce sera : 1° Quand  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{c}{a^2}$  ont des limites finies; 2° quand  $\frac{a^3}{bc}$  a une limite finie; 3° quand  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{c}{a}$  ont des limites finies. Dans le premier cas, on obtient les paraboloïdes ordinaires dont des déformations avaient été déjà trouvées par Peterson auparavant. Dans les deux autres cas, la surface du second ordre devient un plan, mais, par suite du choix des ordres d'infinitude des axes, la courbure de la partie de la surface qui s'éloigne ne tend pas vers 0. Aussi on peut trouver une surface

courbe dont notre surface tend à prendre la forme à la limite, et, en outre, telle qu'aux régions finies de cette surface correspondront les points éloignés à l'infini de notre parabolôide, et inversement. Peterson appelle ces *surfaces des déformées de parabolôides*. Parmi les trois cas précédents, le troisième est particulièrement remarquable, car l'élément linéaire y a une forme homogène qui, comme l'a démontré Peterson, correspond à une surface spirale.

On obtient de la même manière des déformations des surfaces à deux demi-axes égaux. Outre le simple passage à la limite qui conduit à la déformation ordinaire des surfaces de révolution, on obtient à la limite une autre forme de déformées de la manière suivante. Si nous rapportons les points d'une surface du second ordre, par exemple d'un ellipsoïde, à un système de coordonnées elliptiques sur la surface, nous obtenons l'élément linéaire de la surface sous la forme

$$ds^2 = \frac{u-v}{4} \left[ \frac{u du^2}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)} - \frac{v dv^2}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)} \right].$$

Tous les points réels de la surface s'obtiennent quand

$$a^2 \geq u \geq b^2, \quad b^2 \geq v \geq c^2.$$

Si nous rapprochons maintenant les longueurs des demi-axes  $b$  et  $c$ , alors le domaine des valeurs de  $v$  se rétrécit et à la limite à tous les points de la surface correspondra une seule valeur

$$v = b^2 = c^2.$$

En outre, l'expression de l'élément linéaire, prenant maintenant la forme

$$ds^2 = \frac{u-v}{4} \left[ \frac{u du^2}{(a^2-u)(b^2-u)^2} - \frac{v dv^2}{(a^2-v)(b^2-v)^2} \right],$$

conserve un sens même pour  $v$  non égal à  $b^2$ . De cette manière nous avons l'élément d'une surface, que nous pouvons appeler, d'après son origine, *déformée* d'une surface du second ordre à deux axes égaux; elle ne se déforme pas elle-même suivant une surface de révolution, et tous les points de la surface donnée du second ordre correspondent à des points éloignés à l'infini de la surface.

En supposant égaux les trois axes d'une surface du second ordre, nous obtiendrons de la même manière à la limite trois formes de déformées. Ce seront : 1° les déformées de la sphère; 2° les déformées d'une surface de révolution; 3° la déformée d'une surface générale du second ordre à trois axes égaux. Les déformées de la deuxième et de la troisième espèce sont telles que leurs points à distance finie correspondent à des points éloignés à l'infini des surfaces correspondantes du second ordre. On obtient de la même manière les déformées des surfaces du

second ordre avec des axes infiniment petits ; pour qu'elles soient déterminées, il est nécessaire qu'un demi-axe demeure fini ou tende vers l'infini, et que les deux autres demi-axes  $a$  et  $b$  tendent vers 0, de telle sorte que le rapport  $\frac{a}{b}$  ait pour limite l'unité.

Le trait caractéristique du talent de Peterson qui perce à travers tous ses travaux est cette conception nette à un degré suprême de la Géométrie, grâce à laquelle toute l'Analyse de Peterson est toujours exempte de complications superflues et se fond étroitement avec le sens géométrique. Les connaissances profondes de Peterson en Analyse, connaissances qu'il a manifestées d'une manière brillante dans ses travaux sur les équations aux dérivées partielles, se font sentir ici, bien qu'elles ne s'étalent pas aux yeux du lecteur sous des formes volumineuses et qu'elles ne donnent lieu à des conséquences purement géométriques, toujours remarquablement élégantes, que là où c'était possible.

Cet aperçu des travaux géométriques de Peterson montre que nous étions en droit d'affirmer que Peterson a été, dans ses travaux, non seulement tout à fait à la hauteur de son temps, mais encore en avance sur son temps. Bien que quelques-uns des résultats qu'il obtint aient été retrouvés dans la suite par d'autres savants, il est resté, dans les Mémoires de Peterson, encore beaucoup d'idées qui attendent d'être exploitées. On doit espérer que les recherches de Peterson obtiendront une plus grande notoriété, et que ses mérites scientifiques seront enfin appréciés comme ils le méritent.

---

## II. — TRAVAUX DE K.-M. PETERSON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. D.-T. EGOROV.

On doit à K.-M. Peterson, sur la théorie des équations aux dérivées partielles, trois Mémoires qui ont été publiés dans les Tomes VIII, IX et X du *Recueil mathématique*, sous le titre général *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*. Ces Mémoires, qui s'élèvent au-dessus de tous les autres travaux scientifiques de l'auteur, lui ont valu, de l'Université impériale de la Nouvelle-Russie, le grade de docteur *honoris causa* en mathématiques pures. Dans le Tome 30 des *Mémoires de l'Université impériale de la Nouvelle-Russie*, a été publié à cette occasion un rapport de Sabinine, Préobrajensky et Oumov, professeurs à la Faculté physico-mathématique, contenant l'analyse des deux premiers Mémoires de K.-M. Peterson sur la Théorie des équations aux dérivées partielles avec l'in-

dication de tous les résultats auxquels l'auteur lui-même attachait le plus grand intérêt et qui sont reconnus par les critiques comme les plus importants. Dans l'état actuel de la théorie des équations aux dérivées partielles, les recherches de Peterson ne présentent peut-être pas un intérêt particulier au point de vue des résultats qui y sont contenus, car les plus importants de ces résultats se trouvent dans les travaux d'autres auteurs contemporains ou de devanciers de K.-M. Peterson; mais le mode même d'exposition de K.-M. Peterson présente de tels mérites, et les méthodes sur lesquelles est basée toute son étude sont si ingénieuses et si originales, qu'aujourd'hui même les trois Mémoires de K.-M. Peterson dans le *Recueil mathématique* n'ont pas perdu de leur importance et méritent une grande notoriété.

Le point de départ des travaux de K.-M. Peterson est la notion d'équations différentielles appelées *conditionnelles* (selon la terminologie de l'auteur), c'est-à-dire d'équations qui n'ont lieu que dans le cas où nous admettons l'existence d'une ou plusieurs équations différentielles, distinctes des premières et appelées *conditions*. Ainsi par exemple, si D et A sont deux expressions linéaires homogènes avec des différentielles totales de la forme

$$D = \sum_{i=1}^n D_i dx_i, \quad A = \sum_{i=1}^n A_i dx_i,$$

où  $D_i$  et  $A_i$  sont des fonctions des variables  $x_i$ , et, s'il résulte des données de la question que, sous la condition que l'expression A s'annule, l'expression D s'annule nécessairement aussi : alors, selon la terminologie de K.-M. Peterson, l'équation  $D = 0$  est l'équation conditionnelle, et l'équation  $A = 0$  est la condition. Il faut, d'ailleurs, remarquer que, dans le cas considéré, les deux équations joueront souvent le même rôle et que l'on pourra prendre l'équation  $D = 0$  pour la condition et l'équation  $A = 0$  pour l'équation conditionnelle. Si les expressions D et A, après multiplication par des facteurs respectifs, deviennent des différentielles exactes, et si les relations

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= b, \\ \varphi(x_1, \dots, x_n) &= a \end{aligned}$$

sont les intégrales des équations  $D = 0$  et  $A = 0$ , alors, en vertu de notre hypothèse, la différentielle  $df$  ne s'annule que lorsque la différentielle  $d\varphi$  s'annule, ou, ce qui revient au même,  $b$  ne reste constant que si  $a$  reste constant, et, par conséquent, nous avons, en général,

$$b = \psi(a)$$

ou

$$(1) \quad f = \psi(\varphi),$$

où  $\psi$  désigne une fonction arbitraire. La relation (1) sert d'expression analytique à la liaison qui existe entre les expressions différentielles  $D$  et  $A$ ; elle est l'intégrale de l'équation conditionnelle  $D = 0$  qui a lieu pour la condition  $A = 0$ .

Plusieurs équations conditionnelles différentes peuvent être données sous une même condition. Ainsi, si, sous la condition que l'expression différentielle  $A$  s'annule, les expressions différentielles  $B$  et  $C$  s'annulent, et si  $\varphi = a$ ,  $\psi = b$ ,  $\chi = c$  sont respectivement les intégrales des équations  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ , nous aurons

$$(2) \quad \psi = F(\varphi), \quad \chi = \Phi(\varphi),$$

où  $F$  et  $\Phi$  sont des fonctions arbitraires et où les relations (2) servent d'intégrales des équations conditionnelles  $B = 0$ ,  $C = 0$ , données sous la condition  $A = 0$ .

De même une ou plusieurs équations conditionnelles peuvent être données sous plusieurs conditions. Ainsi, si l'expression différentielle  $D$  s'annule sous la condition que les expressions différentielles  $A$  et  $B$  s'annulent simultanément, et, si les relations  $f = \text{const.}$ ,  $\varphi = \text{const.}$ ,  $\psi = \text{const.}$  servent respectivement d'intégrales aux équations  $D = 0$ ,  $A = 0$ ,  $B = 0$ , nous aurons alors

$$(3) \quad f = F(\varphi, \psi),$$

où  $F$  désigne une fonction arbitraire et où la relation (3) est l'intégrale de l'équation conditionnelle  $D = 0$ , donnée sous les conditions  $A = 0$ ,  $B = 0$ . Peterson appelle *arguments des conditions*, les arguments  $\varphi$  et  $\psi$  dans la relation (3), de même que l'argument  $\varphi$  dans les relations (2) et (1).

Les premiers paragraphes du premier Mémoire de Peterson sont entièrement consacrés aux méthodes d'intégration et à l'étude de la forme des intégrales d'un système d'équations différentielles, composé d'équations *non conditionnelles* et de groupes d'équations conditionnelles dont chacune a lieu sous une condition. Les résultats de l'intégration, selon Peterson, s'expriment par des équations dans lesquelles entrent des fonctions arbitraires, dépendant chacune d'un argument.

Dans le Paragraphe 4 du premier Mémoire, K.-M. Peterson aborde le problème important de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles d'ordre  $n$  à deux variables indépendantes. A cet effet, il considère toutes les dérivées partielles

$$z_k^{(l)} = \frac{\partial^{l+k} z}{\partial x^l \partial y^k},$$

au même titre que  $z$ ,  $x$ ,  $y$ , comme des variables indépendantes, liées par l'équation donnée

$$(4) \quad F(x, y, z, z', z_1, \dots, z^{(n)}, z_1^{(n-1)}, \dots, z_n) = 0$$

$$(5) \quad dz_k^{(i)} = z_{k+1}^{(i+1)} dx + z_{k+1}^{(i)} dy.$$

Le fond de la méthode de K.-M. Peterson consiste en ceci : il adjoint à l'équation donnée (4) les équations  $\frac{dF}{dx} = 0$  et  $\frac{dF}{dy} = 0$ , qui sont identiques en vertu de  $F = 0$ , et qui *font connaître que cette dernière a lieu pour  $x$  et  $y$  arbitraires*, et de plus les relations différentielles

$$(6) \quad \begin{cases} dz^{(n)} = z^{(n+1)} dx + z_1^{(n)} dy, \\ \dots\dots\dots, \\ dz_n = z_n^1 dx + z_{n+1} dy, \end{cases}$$

$$(7) \quad \mathbf{M} + \mathbf{N} z_{n+1} = 0,$$
$$u = -\frac{dy}{dx}, \quad z_k^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z_k^{(i)}}, \quad \mathbf{Y} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}},$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{Z}^{(n)} u^n + \mathbf{Z}_1^{(n-1)} u^{n-1} + \dots + \mathbf{Z}_n,$$

$$\mathbf{M} dx = \mathbf{Y} dx + \mathbf{Z}^{(n)} dz_1^{(n-1)} + (\mathbf{Z}^{(n)} u + \mathbf{Z}_1^{(n-1)}) dz_2^{(n-2)} + (\mathbf{Z}^{(n)} u^2 + \mathbf{Z}_1^{(n-1)} u + \mathbf{Z}_2^{(n-2)}) dz_3^{(n-3)} + \dots$$

**Fac. de T., 2° S., V.**

racines de l'équation *caractéristique*  $N = 0$ . On obtient de cette manière  $n$  *équations conditionnelles*

$$M_i dx = 0, \quad \text{si} \quad dy + u_i dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

auxquelles il faut adjoindre toutes les équations non conditionnelles (5). En supposant que toutes les conditions et équations qui en dépendent sont intégrées, Peterson démontre que dans ce cas toutes les équations non conditionnelles (5) s'intègrent (au moyen de quadratures), et l'on obtient de cette manière l'intégrale générale  $F = 0$ , dépendant de  $n$  fonctions arbitraires d'un argument.

On voit facilement que si l'on considère l'ensemble de toutes les équations différentielles, introduites par K.-M. Peterson pour une quelconque des racines  $u_i$  de l'équation *caractéristique*  $N = 0$ , elles ne sont autres que les équations différentielles des variétés caractéristiques d'ordre  $n$  pour l'équation donnée  $F = 0$ . Peterson se borne ainsi dans son étude presque exclusivement au cas où pour les équations différentielles de *chaque* système de caractéristiques il existe deux combinaisons intégrables; il obtient seulement dans ce cas par sa méthode l'intégrale générale de l'équation donnée.

Dans le Paragraphe 7 du premier Mémoire, Peterson introduit des équations conditionnelles d'ordre supérieur, en appliquant des raisonnements, entièrement semblables à ceux que l'on a cités plus haut, à une dérivée quelconque de l'équation donnée  $\frac{d^{m+n}F}{dx^m dy^n} = 0$ . Les équations différentielles auxquelles il arrive coïncident avec les équations différentielles des caractéristiques d'ordre supérieur.

Le deuxième Mémoire du *Recueil mathématique* est consacré principalement aux équations aux dérivées partielles linéaires et *bilinéaires*, qui admettent des équations conditionnelles d'un ordre inférieur d'une unité à l'ordre de l'équation donnée, en d'autres termes, qui admettent des variétés caractéristiques d'ordre inférieur. Il semble que Peterson ait ignoré que des équations de forme plus générale peuvent posséder une propriété semblable.

Enfin, le troisième Mémoire est consacré à l'extension des méthodes précédentes à des équations avec un nombre quelconque de variables indépendantes. Peterson est obligé pour cela de considérer des équations conditionnelles, ayant lieu sous *plusieurs* conditions, par suite de quoi s'introduisent dans l'intégration des fonctions arbitraires de plusieurs arguments.

On trouve comme résultat que toutes les équations aux dérivées partielles se partagent en trois classes : 1° les équations du *premier* ordre avec un nombre arbitraire de variables indépendantes; 2° les équations d'un ordre quelconque avec *deux* variables indépendantes; 3° les équations du second ordre et d'ordre



supérieur à deux avec trois et plus de trois variables indépendantes. La méthode de K.-M. Peterson est *toujours* applicable aux équations de la première et de la deuxième classe, en ce sens que pour une équation *quelconque* de ces deux classes on peut former un système d'équations conditionnelles et non conditionnelles, dont l'intégration est équivalente à l'intégration de l'équation donnée; en ce qui concerne les équations de la troisième classe, cette méthode ne s'applique pas, en général, et l'on ne réussit que pour quelques types spéciaux d'équations de la troisième classe à former un système d'équations différentielles (conditionnelles et non conditionnelles) dont l'intégration conduit à la détermination de l'intégrale générale de l'équation donnée. On peut expliquer cette différence essentielle entre les équations des deux premières classes et celles de la dernière, comme l'a remarqué Peterson, par ce fait que l'intégrale générale pour la première classe dépend *d'une* fonction arbitraire, pour la deuxième classe de plusieurs fonctions arbitraires, mais, en outre, *d'un* argument, et pour la troisième classe de plusieurs fonctions arbitraires de plusieurs arguments.

Tel est, dans ses lignes les plus générales, le contenu de l'étude de K.-M. Peterson. Comme nous le voyons, les résultats donnés par l'auteur sur l'intégration des équations aux dérivées partielles sont presque tous connus maintenant, mais ils sont tous obtenus à l'aide d'une méthode générale et à un point de vue général. D'ailleurs, les mérites de l'œuvre de Peterson ne se bornent pas là, et l'on pourrait citer toute une série de points isolés, présentant chacun un intérêt particulier; si l'on tient compte encore de l'abondance heureuse des exemples importants qu'il a réunis, et qui illustrent toutes les parties de ses recherches, on peut dire à bon droit que les Mémoires de K.-M. Peterson sur la théorie des équations aux dérivées partielles méritent encore maintenant d'être sérieusement étudiés.



## TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Recherches sur l'Hydrodynamique (troisième Partie); par M. <i>P. Duhem</i> .....	5
Les groupes d'ordre $16p$ , $p$ étant un nombre premier impair; par M. <i>R. Le Vasseur</i> .....	63
Théorie des formes à coefficients entiers décomposables en facteurs linéaires; par M. <i>X. Stouff</i> .....	129
Exposé de la méthode de M. C. Glasenapp pour la réduction des observations des éclipses des satellites de Jupiter; par M. <i>Nicolas Stoyanoff</i> .....	157
Recherches sur l'Hydrodynamique (quatrième Partie); par M. <i>P. Duhem</i> .....	197
Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé; par MM. <i>H. Bouasse</i> et <i>Z. Car-</i> <i>rière</i> .....	257
Étude expérimentale des actions photographiques; par M. <i>C. Camichel</i> .....	323
Recherches sur l'Hydrodynamique (5 <sup>e</sup> et 6 <sup>e</sup> Parties); par M. <i>P. Duhem</i> .....	353
Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. <i>É. Goursat</i> .....	405
Sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. <i>J. Clairin</i> ...	437
Notice sur Karl-Michaïlovitch Peterson; par MM. <i>D.-T. Egorov</i> et <i>B.-K. Mlod-</i> <i>zieiowski</i> (traduit du russe par M. Édouard Davaux).....	459

FIN DU TOME CINQUIÈME DE LA DEUXIÈME SÉRIE.



# TABLE DES MATIÈRES (FASCICULE N° 4, 1905).

Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. E. GOURSAT.....	
Sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. J. CLAIRIN.....	
Notice sur Karl-Michailovitch Peterson; par MM. D.-T. EGOROV et R.-K. MŁOZIEDOWSKI.....	
Table des matières du Tome V de la deuxième Série.....	

## LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

- BOREL (Émile)**, Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — *Leçons sur la théorie des fonctions. Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8; 1898..... 3 fr. 50 c.
- BOREL (Émile)**. — *Nouvelles Leçons sur la théorie des fonctions.* 4 volumes grand in-8, se vendant séparément :
- Leçons sur les fonctions entières*; 1900..... 3 fr. 50 c.
  - Leçons sur les séries divergentes*; 1901..... 4 fr. 50 c.
  - Leçons sur les séries à termes positifs* professées au Collège de France, recueillies et rédigées par ROBERT D'ADAMAR; 1902..... 3 fr. 50 c.
  - Leçons sur les fonctions méromorphes* professées au Collège de France, recueillies et rédigées par LUDOVIC ZOROTTI; 1903..... 3 fr. 50 c.
  - Leçons sur les séries de polynômes*..... (En préparation.)
- BOUSSINESQ (J.)**, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — *Théorie analytique de la Chaleur*, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la Lumière. (COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8 se vendant séparément :
- TOME I** : *Problèmes généraux.* Volume de xxvii-333 pages avec 14 figures; 1901..... 10 fr.
  - TOME II** : *Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité des tiges, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* Volume de xxxiv-625 pages; 1903..... 18 fr.
- FRENET**, Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon. — *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal.* Ouvrage destiné aux Candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale, aux Éléves de ces Écoles et aux aspirants à la Licence des Sciences mathématiques. Nouveau tirage augmenté d'un *Appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales*, par H. LABRENT, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. In-8, avec figures; 1904..... 8 fr.
- JOUFFRET (E.)**, Lieutenant-Colonel d'Artillerie en retraite, ancien Élève de l'École Polytechnique. — *Traité de Géométrie à quatre dimensions et Introduction à la Géométrie à n dimensions.* Grand in-8 de xxv-261 pages avec 65 figures; 1903..... 7 fr. 50 c.
- MOREL (Marie-Angusto)**, Ingénieur, ancien Élève de l'École des Ponts et Chaussées, Directeur des usines à ciment de Lambres. — *L'acétylène. Théorie et applications.* Grand in-8 de xii-172 pages avec 7 figures; 1903..... 5 fr.
- PICARD (Émile)**, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — *Traité d'Analyse.* (Cours de la Faculté des Sciences.) Quatre volumes grand in-8 avec figures, se vendant séparément :
- TOME I** : *Intégrales simples et multiples. — L'équation de ses applications. Développement en séries. — Application générale du Calcul infinitésimal.* 2<sup>e</sup> édition, revue et corrigée; 1901.....
  - TOME II** : *Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Application à la théorie des équations différentielles. Intégrales et surfaces de Riemann.* 2<sup>e</sup> édition. Un fascicule est paru. Prix-complet pour les souscripteurs.....
  - TOME III** : *Des singularités des intégrales et des équations différentielles. Étude du cas où la variable reste réelle et des courbes définies par des équations différentielles. Équations linéaires; analogie entre les algébriques et les équations linéaires;* 1896.....
  - TOME IV** : *Équations aux dérivées partielles*..... (En préparation.)
- PICARD (Émile)**, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et **SIMART (Georges)**, Capitaine de frégate, Répétiteur à l'École Polytechnique. — *Théorie des fonctions algébriques de deux indéterminées.* 2 volumes grand in-8, se vendant séparément :
- TOME I** : Volume de vi-246 pages; 1897.....
  - TOME II** : Prix du volume complet pour les souscripteurs..... (Deux fascicules de vi-385 pages ont paru.)
- PONTHIERE (H.)**, Professeur de Métallurgie et d'Électricité à l'Université de Louvain, Directeur de l'Institut électromécanique. — *Traité d'Électrometallurgie. Théorie de l'électrolyse. Galva. Procédés. Tubes. Tôles. Fils galvanoplastiques. Affinage. Des minerais. Fusion. Soudure. Triage.* 3<sup>e</sup> édition. Grand in-8 de 71 figures et 1 planche en 4 couleurs; 1903.....
- ROUCHÉ (Eugène)**, Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique. — *Leçons de Calcul différentiel.* Grand in-8 de viii-557 pages, avec 45 figures; 1900.....
- LEVY (Lucien)**, Répétiteur d'Analyse et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — *Analyse infinitésimale à l'usage des candidats.* 2 volumes grand in-8 se vendant séparément :
- TOME I** : *Calcul différentiel. Dérivées et différentielles. Ch. de variables. Séries. Formules de Taylor. Courbes planes et surfaces. Congruences. Complexes. Lignes tracées sur les surfaces.* Volume grand in-8 de viii-557 pages, avec 45 figures; 1900.....
  - TOME II** : *Calcul intégral. Intégrales indéfinies et définies de Fourier. Fonctions elliptiques. Équations différentielles, et aux dérivées partielles. Calcul des variations.* Volume grand in-8 de viii-618 pages; 1903.....

















